

复数高斯投影变换非迭代算法的 2条路径

方春波^{1,2*}, 刘大海^{1,2#}, 莫晓锋², 洪声亮², 李文魁³

¹深圳地质科技创新中心, 广东 深圳

²深圳地质建设工程公司, 广东 深圳

³海军工程大学电气工程学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年6月8日; 录用日期: 2025年6月30日; 发布日期: 2025年7月7日

摘 要

高斯投影非迭代符号变换式, 不需要迭代计算, 更方便直接。将现有高斯投影变换以偏心率参数 e 表达的级数系数, 用第3扁率 n 表达, 级数幂次可降低一半, 收敛更快, 系数更为简洁。本文讨论了显函数及隐函数的Taylor级数展开的导数法及Series函数法。以复数高斯投影变换的非迭代算法为基础, 利用计算机代数系统, 对角度变换式, 全新导出了以第3扁率 n 为参数的7次幂符号级数表达式。事实上, 当级数幂次取至5次, 高斯投影的变换精度为直角坐标 $< 10^{-6} \text{ m}$, 角度 $< 10^{-12} \text{ rad}$ ($10^{-7}''$)。复数高斯投影变换的核心是实数经纬度 (B, l) 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的角度变换。对复数等角纬度 φ_c 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的角度变换, 给出了2条实现路径: 间接变换路径(以复数纬度 B_c 为间接变量)及直接变换路径。

关键词

高斯投影, 正变换, 反变换, 迭代, 非迭代, 复数, 路径

Two Paths of Non-Iterative Algorithm for Complex Gaussian Projection Transformation

Chunbo Fang^{1,2*}, Dahai Liu^{1,2#}, Xiaofeng Mo², Shengliang Hong², Wenkui Li³

¹Shenzhen Geological Science and Technology Innovation Center, Shenzhen Guangdong

²Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen Guangdong

³School of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 方春波, 刘大海, 莫晓锋, 洪声亮, 李文魁. 复数高斯投影变换非迭代算法的 2 条路径[J]. 测绘科学技术, 2025, 13(3): 151-164. DOI: 10.12677/gst.2025.133018

Abstract

Gaussian projection is a non-iterative symbol transformation that does not require iterative calculations and is more convenient and direct. Expressing the series coefficients of the existing Gaussian projection transform as eccentricity parameter e and using the third flattening parameter n can reduce the series power by half, converge faster, and simplify the coefficients. This article discusses the derivative method and Series function method for Taylor series expansion of explicit and implicit functions. Based on the non-iterative algorithm of complex Gaussian projection transformation, using computer algebra system, a new expression of the 7th power signed series with the third flattening n as the parameter is derived for the angle transformation formula. In fact, when the power of the series is set to 5, the accuracy of Gaussian projection transformation is less than 10^{-6} m for Cartesian coordinates and less than 10^{-12} rad ($10^{-7}''$) for angles. The core of complex Gaussian projection transformation is the angle transformation between real latitude and longitude (B, l) and complex equidistant latitude ψ_c . Two implementation paths are proposed for the angle transformation between complex equiangular latitude φ_c and complex equidistant latitude ψ_c : indirect transformation path (with complex latitude B_c as the indirect variable) and direct transformation path.

Keywords

Gaussian Projection, Forward Transformation, Inverse Transformation, Iterative, Non-Iterative, Complex, Path

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

高斯投影变换是一经典课题，其投影属于等角投影[1]-[3]。传统的高斯投影变换，主要研究域为实数域。进入上世纪 90 年代后，引入计算机代数系统，复数域的高斯投影变换成为研究热点，聚焦于大地纬度 B 由实数域向复数域的拓展、数值迭代法、符号迭代法(迭代稳定符号解)，以及基于复数等角纬度 φ_c 的高斯投影变换等。

复变量 z 与的 w 之间的变换为[4]-[7]：

$$\text{复变量: } \begin{cases} z = x + i \cdot y \\ w = q + i \cdot l \end{cases}。$$

$$\text{即正反变换为: } \begin{cases} z = f(w) = x(q, l) + i \cdot y(q, l) \\ w = f^{-1}(z) = q(x, y) + i \cdot l(x, y) \end{cases}。$$

边少锋等(2001, 2004, 2008, 2018)将高斯投影变换从实数域拓展到复数域，得到了关于复数大地纬度 B_c 的积分式[8]-[12]。李厚朴、边少锋等(2007, 2009, 2012, 2016, 2017, 2021)研究了基于复变量等角纬度 φ_c 的非迭代的正反解表达式[13]-[18]。金立新等(2017)在基于复变量等角纬度 φ_c 高斯投影变换的基础

上, 将其解析到实数域, 给出了实数域非迭代的正反解表达式及其变换系数[19]。刘大海等(2024)基于实数等角纬度的高斯投影反变换采用数值迭代法计算[20]。

高斯投影非迭代符号变换式, 不需要迭代计算, 使用更方便、更直接。

现有的高斯投影变换, 基于将被积函数展开为 Taylor 级数并积分得到三角级数式, 级数系数以偏心率 e 表达。将级数系数用第 3 扁率 n 表达, 可将级数幂次降低一半, 系数表达更为简洁, 收敛速度更快。

复数高斯投影变换的核心是实数经纬度 (B, l) 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的角度变换。

复数等角纬度 φ_c 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的角度变换, 有 2 条实现路径: 间接变换路径(以 B_c 为间接变量)及直接变换路径。

本文讨论了显函数及隐函数的 Taylor 级数展开, 采用计算机代数系统, 以复数高斯投影变换非迭代算法为基础, 对高斯投影变换相关的角度变换式, 全新导出了以第 3 扁率 n 为参数的 7 次幂符号级数表达式; 给出了复数高斯投影变换非迭代算法的 2 条实现路径。

2. 复数高斯投影变换的 2 条实现路径

在实数域, 高斯投影正解(中央子午线弧长 X)为[4]-[7]:

$$X = \int_0^B M \cdot dB = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^B \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \sin(B)^2}} dB \quad (1)$$

其级数近似解为[4]-[7]:

$$X = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left(k_0 B + \sum_{j=1}^n k_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) \right) \quad (2)$$

边少锋等(2001, 2004, 2008, 2018)将式(2)拓展到复数域[8]-[12]:

$$z = a \cdot (1 - e^2) \cdot \left(k_0 B_c + \sum_{j=1}^n k_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \right) \quad (3)$$

令:

$$\begin{cases} \kappa_0 = (1 - e^2) \cdot k_0 \\ c_{2j} = k_{2j} / k_0 \\ \psi_c = B_c + \sum_{j=1}^n c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \end{cases} \quad (4)$$

则, 复数域高斯投影正反算变换为:

$$\begin{cases} z = a \cdot \kappa_0 \cdot \psi_c \\ \psi_c = \frac{z}{a \cdot \kappa_0} \end{cases} \quad (5)$$

即, 复数高斯投影变换, 为直角坐标 z 与等距离纬度 ψ_c 之间的变换。

复数高斯投影变换的核心是实数 (B, l) 与复数 ψ_c 之间的变换。

要将实数经纬度 (B, l) 转换为等距离纬度 ψ_c , 其实现路径详见图 1。 φ_c 与 ψ_c 变量之间的变换有 2 条路径实现: 间接变换路径(以 B_c 为间接变量)及直接变换路径。

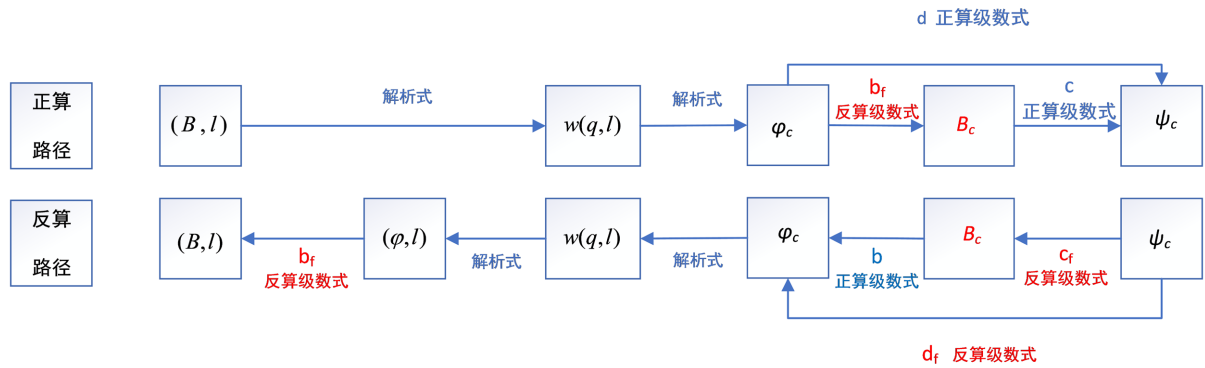


Figure 1. Non-iterative transformation path diagram of forward and backward calculation between geodetic longitude and latitude (B, l) and complex equidistant latitude ψ_c

图 1. 大地经纬度 (B, l) 与复数等距离纬度 ψ_c 正反算非迭代变换路径图

其中:

(B, l) 为实数纬度及经差;
 $w = q + i \cdot l$ 为复数等量纬度;
 $\varphi_c = \varphi_x + i \cdot \varphi_y$ 为复数等角纬度;
 $\psi_c = \psi_x + i \cdot \psi_y$ 为复数等距离纬度;
 $z = x + i \cdot y$ 为复数直角坐标。

3. 函数的 Taylor 级数展开

高斯投影变换, 因积分式没有找到闭合解, 解决的办法是将其被积函数展开为 Taylor 级数, 然后积分得到级数近似解。

在高斯投影变换中, 正变换, 被积函数为显函数; 反变换, 被积函数为隐函数。

3.1. 显函数的 Taylor 级数展开

显函数的 Taylor 级数展开可以采用导数法及代数系统的 Series 内置函数法。

1) 导数法

设显函数为:

$$y = \int f(x) \cdot dx \quad (6)$$

当上述积分找不到闭合解时, 可将 $f(x)$ 在 $x_0 = 0$ 点展开为 m 阶 Taylor 级数:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(1)}}{1!} \cdot (x - x_0) + \frac{f^{(2)}}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}}{m!} \cdot (x - x_0)^m \quad (7)$$

然后积分得到函数级数式:

$$y = F(0) + \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot g(x_j) \quad (8)$$

2) Series 函数法

利用代数系统的内置函数 Series, 可直接在 $x_0 = 0$ 点展开为 m 阶 Taylor 级数:

$$f(x) = \text{Series}[f, \{x, 0, m\}] \quad (9)$$

3.2. 隐函数的 Taylor 级数展开

设隐函数为:

$$y = \int f(x, y) \cdot dx \quad (10)$$

要得到积分式, 需引入中间变量 t , 将隐函数 $f(x, y)$ 展开为 $f(t)$ 的 Taylor 级数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ f(x, y) = f(t) \end{cases} \quad (11)$$

则积分:

$$y = \int f(x(t), y(t)) \cdot dx = \int f(t) \cdot dt \quad (12)$$

其中, 被积函数 $f(t)$ 的各阶导数:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{d}{dt}(f) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ f''(t) = \frac{d}{dt}(f') = \frac{\partial f'(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f'(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \\ f^{(j)}(t) = \frac{d}{dt}(f^{j-1}) = \frac{\partial f^{j-1}(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f^{j-1}(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (13)$$

由式(10), 有:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y) \quad (14)$$

则有:

$$\begin{cases} f'(t) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y) \cdot \frac{dx}{dt} \\ f''(t) = \left[\frac{\partial f'(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y) + \frac{\partial f'(x, y)}{\partial x} \right] \cdot \frac{dx}{dt} \\ \vdots \\ f^{(m)}(t) = \left[\frac{\partial f^{m-1}(x, y)}{\partial y} \cdot f(x, y) + \frac{\partial f^{m-1}(x, y)}{\partial x} \right] \cdot \frac{dx}{dt} \end{cases} \quad (15)$$

$f(t) = f(x(t), y(t))$ 在 $t_0 = 0$ 点展开为 Taylor 级数:

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(1)}}{1!} \cdot (t - t_0)^1 + \frac{f^{(2)}}{2!} \cdot (t - t_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(m)}}{m!} \cdot (t - t_0)^m \quad (16)$$

最终得到隐函数积分级数式:

$$y = F(0) + \sum_{j=1}^m \beta \cdot h(x_j) \quad (17)$$

导数法的高阶导数(或偏导数)计算难度大, 需要高配置计算机, 计算时间长, 低配置甚或导致计算闪退。Series 内置函数法, 对计算机配置要求低, 计算时间短, 效率高。本文采用 Series 内置函数法展开 Taylor 级数。

4. 复数高斯投影的角度变换系数

在图 1 路径中, 角度变换涉及到系数 k 、 κ 、 b 、 c 、 d 。

4.1. 变换系数 k 、 κ

由式(4)、(5), 利用计算机代数系统, 可导出以 e 参数表达的 14 次幂系数 k 、 κ 。

第 3 扁率定义为:

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \quad (18-1)$$

则有:

$$e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} \quad (18-2)$$

由式(1)及式(18-2), 利用计算机代数系统, 对被积函数显函数进行 Taylor 级数展开并积分, 就可得到变换式(2), 导出以 n 参数表达的 7 次幂系数 k 、 κ 。

以参数 e 及 n 表达的系数 k 、 κ 对比表分别见表 1、表 2。

Table 1. Comparison table of k coefficients

表 1. k 系数对比表

以参数 e 表达的系数 k	以参数 n 表达的系数 k
$k_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1048576}e^{12} + \frac{2760615}{4194304}e^{14}$	$k_0 = 1 + 3n + \frac{21}{4}n^2 + \frac{31}{4}n^3 + \frac{657}{64}n^4 + \frac{819}{64}n^5 + \frac{3925}{256}n^6 + \frac{4575}{256}n^7$
$k_2 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12} - \frac{19324305}{33554432}e^{14}$	$k_2 = -\frac{3}{2}n - \frac{9}{2}n^2 - \frac{117}{16}n^3 - \frac{159}{16}n^4 - \frac{1605}{128}n^5 - \frac{1935}{128}n^6 - \frac{36225}{2048}n^7$
$k_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12} + \frac{6441435}{33554432}e^{14}$	$k_4 = \frac{15}{16}n^2 + \frac{45}{16}n^3 + \frac{285}{64}n^4 + \frac{375}{64}n^5 + \frac{14805}{2048}n^6 + \frac{17535}{2048}n^7$
$k_6 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{105}{4096}e^8 - \frac{10395}{262144}e^{10} - \frac{55055}{1048576}e^{12} - \frac{2147145}{33554432}e^{14}$	$k_6 = -\frac{35}{48}n^3 - \frac{35}{16}n^4 - \frac{875}{256}n^5 - \frac{3395}{768}n^6 - \frac{11025}{2048}n^7$
$k_8 = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12} + \frac{585585}{33554432}e^{14}$	$k_8 = \frac{315}{512}n^4 + \frac{945}{512}n^5 + \frac{5859}{2048}n^6 + \frac{7497}{2048}n^7$
$k_{10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12} - \frac{117117}{33554432}e^{14}$	$k_{10} = -\frac{693}{1280}n^5 - \frac{2079}{1280}n^6 - \frac{25641}{10240}n^7$
$k_{12} = \frac{1001}{8388608}e^{12} + \frac{15015}{33554432}e^{14}$	$k_{12} = \frac{1001}{2048}n^6 + \frac{3003}{2048}n^7$
$k_{14} = -\frac{6435}{234881024}e^{14}$	$k_{14} = -\frac{6435}{14336}n^7$

Table 2. Comparison table of κ coefficients
表 2. κ 系数对比表

以参数 e 表达的系数 κ	以参数 n 表达的系数 κ
$\kappa_0 = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} - \frac{4851}{1048576}e^{12} - \frac{14157}{4194304}e^{14}$	$\kappa_0 = 1 - n + \frac{5}{4}n^2 - \frac{5}{4}n^3 + \frac{81}{64}n^4 - \frac{81}{64}n^5 + \frac{325}{256}n^6 - \frac{325}{256}n^7$
$\kappa_2 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{45}{1024}e^6 - \frac{105}{4096}e^8 - \frac{2205}{131072}e^{10} - \frac{6237}{524288}e^{12} - \frac{297297}{33554432}e^{14}$	$\kappa_2 = -\frac{3}{2}n + \frac{3}{2}n^2 - \frac{21}{16}n^3 + \frac{21}{16}n^4 - \frac{165}{128}n^5 + \frac{165}{128}n^6 - \frac{2625}{2048}n^7$
$\kappa_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \frac{525}{16384}e^8 + \frac{1575}{65536}e^{10} + \frac{155925}{8388608}e^{12} + \frac{495495}{33554432}e^{14}$	$\kappa_4 = \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{16}n^3 + \frac{45}{64}n^4 - \frac{45}{64}n^5 + \frac{1365}{2048}n^6 - \frac{1365}{2048}n^7$
$\kappa_6 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{175}{12288}e^8 - \frac{3675}{262144}e^{10} - \frac{13475}{1048576}e^{12} - \frac{385385}{33554432}e^{14}$	$\kappa_6 = -\frac{35}{48}n^3 + \frac{35}{48}n^4 - \frac{385}{768}n^5 + \frac{385}{768}n^6 - \frac{945}{2048}n^7$
$\kappa_8 = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{2205}{524288}e^{10} + \frac{43659}{8388608}e^{12} + \frac{189189}{33554432}e^{14}$	$\kappa_8 = \frac{315}{512}n^4 - \frac{315}{512}n^5 + \frac{819}{2048}n^6 - \frac{819}{2048}n^7$
$\kappa_{10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{6237}{5242880}e^{12} - \frac{297297}{167772160}e^{14}$	$\kappa_{10} = -\frac{693n^5}{1280} + \frac{693n^6}{1280} - \frac{693n^7}{2048}$
$\kappa_{12} = \frac{1001}{8388608}e^{12} + \frac{11011}{33554432}e^{14}$	$\kappa_{12} = \frac{1001}{2048}n^6 - \frac{1001}{2048}n^7$
$\kappa_{14} = -\frac{6435}{234881024}e^{14}$	$\kappa_{14} = -\frac{6435}{14336}n^7$

对比以参数 e 、 n 表达的系数 k 及 κ ，由式(18-2)，利用第 3 扁率 n ，表达式幂次降低了一半。其次，由表 1、表 2，以 n 表达的分母数位比以 e 表达的分母数位减少近一半。 k_{14} 、 κ_{14} 系数，以 n 表达的分母数位仅 5 位，比以 e 表达的分母数位减少了 4 个。

据此，本文对高斯投影变换的角度变换系数，全新给出了以 n 为参数的 7 次幂级数表达式。

4.2. 变换系数 b 、 b_f

正算系数 b 是 $\varphi = f(B)$ 变换式的级数系数。

$$\varphi = f(B) = 2 \cdot \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin B}{1 + e \cdot \sin B} \right)^{e/2} \right] - \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

将显函数 f 利用导数法或 Series 函数法将式(19)展开为 Taylor 级数并积分，得到正算变换式(20-1)及正算级数系数 b ：

正算变换式：

$$\varphi = B + \sum_{j=1}^m b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) \quad (20-1)$$

$$b_2 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{82}{45}n^4 + \frac{32}{45}n^5 + \frac{4642}{4725}n^6 - \frac{8384}{4725}n^7$$

$$b_4 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 + \frac{904}{315}n^5 - \frac{1522}{945}n^6 - \frac{2288}{1575}n^7$$

$$b_6 = -\frac{26}{15}n^3 + \frac{34}{21}n^4 + \frac{8}{5}n^5 - \frac{12686}{2835}n^6 + \frac{44644}{14175}n^7$$

$$b_8 = \frac{1237}{630}n^4 - \frac{12}{5}n^5 - \frac{24832}{14175}n^6 + \frac{1077964}{155925}n^7$$

$$b_{10} = -\frac{734}{315}n^5 + \frac{109598}{31185}n^6 + \frac{1040}{567}n^7$$

$$b_{12} = \frac{444337}{155925}n^6 - \frac{941912}{184275}n^7$$

$$b_{14} = -\frac{2405834}{675675}n^7$$

利用正算变换式(20-1)进行 10 次符号迭代, 得到稳定的反算变换式(20-2)及反算系数 b_f :
反算变换式:

$$B = \varphi - \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi) \quad (20-2)$$

$$b_{f2} = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6 + \frac{16822}{4725}n^7$$

$$b_{f4} = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5 + \frac{2323}{945}n^6 - \frac{31256}{1575}n^7$$

$$b_{f6} = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5 + \frac{73814}{2835}n^6 + \frac{98738}{14175}n^7$$

$$b_{f8} = \frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5 - \frac{399572}{14175}n^6 + \frac{11763988}{155925}n^7$$

$$b_{f10} = \frac{4174}{315}n^5 - \frac{144838}{6237}n^6 - \frac{2046082}{31185}n^7$$

$$b_{f12} = \frac{601676}{22275}n^6 - \frac{115444544}{2027025}n^7$$

$$b_{f14} = \frac{38341552}{675675}n^7$$

其中, b 、 b_f 系数的分母位数, 以 n 表达的比以 e 表达的减少近一半, b_{14} 、 b_{f14} 减少了 4 个数位。

4.3. 变换系数 c 、 c_f

正算系数 c 是 $\psi = f(B)$ 变换式的级数系数。

正算式:

$$\begin{cases} \psi = B + \sum_{j=1}^m c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) \\ c_{2j} = k_{2j}/k_0 \end{cases} \quad (21-1)$$

由式(21-1)子式, 得到正算变换系数 c :

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{3}{2}n + \frac{9}{16}n^3 - \frac{3}{32}n^5 + \frac{57}{2048}n^7 \\
c_4 &= \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{32}n^4 + \frac{135}{2048}n^6 \\
c_6 &= -\frac{35}{48}n^3 + \frac{105}{256}n^5 - \frac{105}{2048}n^7 \\
c_8 &= \frac{315}{512}n^4 - \frac{189}{512}n^6 \\
c_{10} &= -\frac{693}{1280}n^5 + \frac{693}{2048}n^7 \\
c_{12} &= \frac{1001}{2048}n^6 \\
c_{14} &= -\frac{6435}{14336}n^7
\end{aligned}$$

利用正算式(21-1)进行 10 次符号迭代, 得到稳定的反算式(21-2)及反算系数 c_f :
反算式:

$$B = \psi + \sum_{j=1}^m c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi) \quad (21-2)$$

$$\begin{aligned}
c_{f2} &= \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5 - \frac{6607}{24576}n^7 \\
c_{f4} &= \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \frac{6759}{4096}n^6 \\
c_{f6} &= \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5 + \frac{87963}{20480}n^7 \\
c_{f8} &= \frac{1097}{512}n^4 - \frac{15543}{2560}n^6 \\
c_{f10} &= \frac{8011}{2560}n^5 - \frac{69119}{6144}n^7 \\
c_{f12} &= \frac{293393}{61440}n^6 \\
c_{f14} &= \frac{6459601}{860160}n^7
\end{aligned}$$

其中, c 、 c_f 系数的分母数位, 以 n 表达的比以 e 表达的减少近一半, c_{14} 、 c_{f14} 分别减少 4、5 个数位。

4.4. 变换系数 d 、 d_f

正算系数 d 是 $\psi = f(\varphi)$ 变换的级数系数。

将式(21-1)式 B 代入式(20-2), 得到正算式(22-1)及正算系数 d :

正算式:

$$\psi = \varphi + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi) \quad (22-1)$$

$$d_2 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 - \frac{127}{288}n^5 + \frac{7891}{37800}n^6 + \frac{72161}{387072}n^7$$

$$\begin{aligned}
d_4 &= \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \frac{281}{630}n^5 - \frac{1983433}{1935360}n^6 + \frac{13769}{28800}n^7 \\
d_6 &= \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \frac{15061}{26880}n^5 + \frac{167603}{181440}n^6 - \frac{67102379}{29030400}n^7 \\
d_8 &= \frac{49561}{161280}n^4 - \frac{179}{168}n^5 + \frac{6601661}{7257600}n^6 + \frac{97445}{49896}n^7 \\
d_{10} &= \frac{34729}{80640}n^5 - \frac{3418889}{1995840}n^6 + \frac{14644087}{9123840}n^7 \\
d_{12} &= \frac{212378941}{319334400}n^6 - \frac{30705481}{10378368}n^7 \\
d_{14} &= \frac{1522256789}{1383782400}n^7
\end{aligned}$$

同样, 利用正算式(22-1)进行 10 次符号迭代, 得到稳定的反算式(22-2)及反算系数 d_f :
反算式:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \psi + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi) \quad (22-2) \\
d_{f2} &= -\frac{1}{2}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{37}{96}n^3 + \frac{1}{360}n^4 + \frac{81}{512}n^5 - \frac{96199}{604800}n^6 + \frac{5406467}{38707200}n^7 \\
d_{f4} &= -\frac{1}{48}n^2 - \frac{1}{15}n^3 + \frac{437}{1440}n^4 - \frac{46}{105}n^5 + \frac{1118711}{3870720}n^6 - \frac{51841}{1209600}n^7 \\
d_{f6} &= -\frac{17}{480}n^3 + \frac{37}{840}n^4 + \frac{209}{4480}n^5 - \frac{5569}{90720}n^6 - \frac{9261899}{58060800}n^7 \\
d_{f8} &= -\frac{4397}{161280}n^4 + \frac{11}{504}n^5 + \frac{830251}{7257600}n^6 - \frac{466511}{2494800}n^7 \\
d_{f10} &= -\frac{4583}{161280}n^5 + \frac{108847}{3991680}n^6 + \frac{8005831}{63866880}n^7 \\
d_{f12} &= -\frac{20648693}{638668800}n^6 + \frac{16363163}{518918400}n^7 \\
d_{f14} &= -\frac{219941297}{5535129600}n^7
\end{aligned}$$

其中, d 、 d_f 系数的分母数位, 以 n 表达的比以 e 表达的减少近一半, d_{14} 、 d_{f14} 减少 4 个数位。

由式(5)及(22-1)、(22-2), 得到基于复数等角纬度的高斯投影正反算变换式:

$$\begin{cases} z = a \cdot \kappa_0 \cdot \left[\varphi_c + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c) \right] \\ \varphi_c = \frac{z}{a \cdot \kappa_0} + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin \left[2j \cdot \left(\frac{z}{a \cdot \kappa_0} \right) \right] \end{cases} \quad (23)$$

4.5. 角度变换 Taylor 展开式的余项估算

设角度变换 Taylor 级数展开式为:

$$y = x + \sum_{j=1}^m \alpha_{2j} \cdot \sin(2j \cdot x) + O(x)^{m+1} \quad (24)$$

则有:

$$O(x)^{m+1} < \alpha_{2m} \cdot \sin(2m \cdot x) \quad (25)$$

即:

$$O(x)^{m+1} < \alpha_{2m} \quad (26)$$

Taylor 级数余项估算 - 截断误差, 详见表 3。取幂次 $m = 5$, 角度变换截断误差 $< 10^{-12} \text{ rad}$ ($10^{-7}''$), 足以满足高斯投影变换的精度要求。

Table 3. Table of truncation error of angle transformation coefficient

表 3. 角度变换系数截断误差表

角度 变换式	变换 系数	级数 末项	级数末项值/rad ($m = 5$)	级数末项值/rad ($m = 4$)
$\varphi = f(B)$	b	b_{2m}	-3.101060E-14	1.557100E-11
$B = f(\varphi)$	b_f	b_{f2m}	1.762720E-13	5.384660E-11
$\psi = f(B)$	c	c_{2m}	-7.223520E-15	4.889010E-12
$B = f(\psi)$	c_f	c_{f2m}	4.175120E-14	1.702610E-11
$\psi = f(\varphi)$	d	d_{2m}	5.707720E-15	2.427780E-12
$\varphi = f(\psi)$	d_f	d_{f2m}	-3.785210E-16	-2.163550E-13

5. 复数高斯投影变换的非迭代算法

在 (B, l) 与 ψ_c 之间的角度变换路径中, 以 φ_c 为界, 可分为 2 个区段: $(B, l) - \varphi_c$ 区段及 $\varphi_c - \psi_c$ 区段。后一区段实现的路径有: 间接变换路径(以 B_c 为中间变量)及直接变换路径。间接变换有助于理解高斯投影变换由实数域向复数域的拓展。

复数高斯投影变换正反算表达式为:

高斯投影正变换:

$$\left\{ \begin{array}{l} z = a \cdot \kappa_0 \cdot \psi_c \\ \psi_c \text{ 间接变换: } B_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c) \\ \psi_c = B_c + \sum_{j=1}^m c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \\ \psi_c \text{ 直接变换: } \psi_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c) \end{array} \right. \quad (27)$$

高斯投影反变换:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_c = \frac{z}{a \cdot \kappa_0} \\ \varphi_c \text{ 间接变换: } B_c = \psi_c + \sum_{j=1}^m c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c) \\ \varphi_c = B_c + \sum_{j=1}^m b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \\ \varphi_c \text{ 直接变换: } \varphi_c = \psi_c + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c) \end{array} \right. \quad (28)$$

5.1. 角度正变换 $(B, l) \rightarrow \psi_c$

1) 解析变换 $(B, l) \rightarrow \varphi_c$

$$q = \arctanh(\sin B) - e \cdot \arctanh(e \cdot \sin B)$$

$$w = q + i \cdot l$$

$$\varphi_c = \arcsin[\tanh(w)]$$

2-1) 间接变换(基于 B_c) $\varphi_c \rightarrow \psi_c$

$$B_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c)$$

$$\psi_c = B_c + \sum_{j=1}^m c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c)$$

2-2) 直接变换 $\varphi_c \rightarrow \psi_c$

$$\psi_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c)$$

5.2. 角度反变换 $(B, l) \leftarrow \psi_c$

1-1) 间接变换(基于 B_c) $\varphi_c \leftarrow \psi_c$

$$B_c = \psi_c + \sum_{j=1}^m c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c)$$

$$\varphi_c = B_c + \sum_{j=1}^m b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c)$$

1-2) 直接变换 $\varphi_c \leftarrow \psi_c$

$$\varphi_c = \psi_c + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c)$$

2) 反算 $(B, l) \leftarrow \varphi_c$

$$w = \operatorname{arctanh}[\sin(\varphi_c)]$$

$$q = \operatorname{Re}(w)$$

$$l = \operatorname{Im}(w)$$

$$\varphi = \arcsin[\tanh(q)]$$

$$B = \varphi + \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)$$

6. 变换实例

[实例 1] 选自文献[5] (p. 168)实例, 点名 1。坐标系为 BJ54 坐标系, 投影带中央子午线 $L_0 = 111^\circ$, 变换点大地坐标为: $B = 31^\circ 04' 41.6832''$, $L = 111^\circ 47' 24.8974''$ 。

解算: 1) 由大地坐标 (B, L) 正算直角坐标 (x, y) ;

2) 由直角坐标 (x, y) 反算大地坐标 (B, L) 。

高斯投影非迭代变换正反算结果详见表 4、表 5。计算结果表明, 当第 3 扁率 n 的幂次取至 $m = 5$ 时, 高斯投影的变换精度足以满足实际需要, 直角坐标误差 $< 10^{-6}$ m, 角度误差 $< 10^{-12}$ rad ($10^{-7}''$)。利用正算结果的坐标值 (x, y) 进行反算, 可精确还原到原大地坐标值 (B, L) 。

Table 4. Non-iterative Gaussian projection forward calculation result
表 4. 非迭代高斯投影正算结果

参量		原文正算	本文正算 幂次 $m = 7$	本文正算 幂次 $m = 5$	计算误差 (7 次幂~5 次幂)	正算 序次
中央子午线	L0/deg	111	111	111	111	
纬度	B	31°04'41.6832"	31°04'41.6832"	31°04'41.6832"		0
经度	L	111°47'24.8974"	111°47'24.8974"	111°47'24.8974"		
等量纬度	q/rad		0.567699332168	0.567699332168	4.359846E-13	1
经差	l/rad		0.013792451809	0.013792451809	0.000000E+00	
等角纬度	φ_x /rad		0.539495977396	0.539495977396	4.620748E-13	2
	φ_y /rad		0.011833952487	0.011833952487	4.646006E-13	
大地纬度	Bx/rad		0.542460595682	0.542460595682	0.000000E+00	3
	By/rad		0.011871291124	0.011871291124	5.230018E-14	
等距离纬度	ψ_x /rad		0.540235157914	0.540235157914	0.000000E+00	4
	ψ_y /rad		0.011843294798	0.011843294798	3.183998E-13	
直角坐标	x/m	3439978.971	3439978.970083	3439978.970083	9.778887E-09	5
	y/m	757412.873	75412.872424	75412.872424	5.966285E-10	
	y5/m		575412.872424	575412.872424	0.000000E+00	

Table 5. Non-iterative Gaussian projection transformation result
表 5. 非迭代高斯投影反算结果

参量		原文正算	本文反算 幂次 $m = 7$	本文反算 幂次 $m = 5$	计算误差 (7 次幂~5 次幂)	反算 序次
中央子午线	L0/deg	111	111	111	111	
纬度	B	31°04'41.6832"	31°04'41.6832"	31°04'41.6832"		5
经度	L	111°47'24.8974"	111°47'24.8974"	111°47'24.8974"		
等量纬度	q/rad		0.567699332168	0.567699332168	4.359846E-13	4
经差	l/rad		0.013792451809	0.013792451809	-5.100087E-15	
等角纬度	φ_x /rad		0.539495977396	0.539495977396	0.000000E+00	3
	φ_y /rad		0.011833952487	0.011833952487	4.602013E-13	
大地纬度	Bx/rad		0.542460595682	0.542460595682	0.000000E+00	2
	By/rad		0.011871291124	0.011871291124	4.789918E-14	
等距离纬度	ψ_x /rad		0.540235157914	0.540235157914	0.000000E+00	1
	ψ_y /rad		0.011843294798	0.011843294798	0.000000E+00	
直角坐标	x/m	3439978.971	3439978.970083	3439978.970083	-3.697351E-07	0
	y/m	757412.873	75412.872424	75412.872424	-2.789602E-08	
	y5/m		575412.872424	575412.872424	-2.700835E-08	

7. 结语

- 1) 符号迭代法导出的高斯投影变换的非迭代符号变换式, 不需要迭代计算, 使用更直接、更方便。
- 2) 本文讨论了显函数及隐函数的 Taylor 级数展开。导数法, 高阶导数计算困难, 需要高配置计算机, 配置不足会导致计算闪退; Series 内置函数法, 对计算机配置要求不高, 计算速度快。
- 3) 将级数系数用第 3 扁率 n 表达, 级数幂次降低一半, 收敛速度快; 系数 k 、 κ 及角度变换系数, 其 14 项系数分母位数比用 e 表达的减少 4 个数位, 系数更为简略实用, 计算速度更快。
- 4) 利用计算机代数系统, 全新导出了以第 3 扁率 n 为参数的 7 次幂级数表达式。事实上, 高斯投影相关的角度变换, 当第 3 扁率 n 幂次取至 $m = 5$ 时, 变换精度足以满足要求, 直角坐标误差 $< 10^{-6}$ m, 角度误差 $< 10^{-12}$ rad ($10^{-7}''$)。
- 5) 复数高斯投影变换的核心是实数大地经纬度 (B, l) 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的变换。复数等角纬度 φ_c 与复数等距离纬度 ψ_c 之间的变换, 实现的路径有间接变换及直接变换。推荐使用直接变换。

致 谢

海军工程大学边少锋教授对课题研究给予了大力支持, 在此表示衷心感谢!

基金项目

国家自然科学基金项目(42174051)。

参考文献

- [1] 杨启和. 等角投影数值变换的研究[J]. 测绘学报, 1982, 11(4): 268-282.
- [2] 程阳. 复变函数与等角投影[J]. 测绘学报, 1985, 14(1): 51-60.
- [3] 杨启和. 等角投影理论和方法[J]. 解放军测绘学院学报, 1994, 11(2): 133-139.
- [4] 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京: 解放军出版社, 1988: 48-49.
- [5] 陈健, 晁定波. 椭球大地测量学[M]. 北京: 测绘出版社, 1989: 18, 168.
- [6] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 测绘出版社, 1990: 56.
- [7] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础(第 2 版)[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 1990: 115, 169.
- [8] 边少锋, 张传定. Gauss 投影的复变函数表示[J]. 测绘学院学报, 2001, 18(3): 157-159.
- [9] 李厚朴, 边少锋. 高斯投影的复变函数表示[J]. 测绘学报, 2008, 37(1): 5-9.
- [10] 边少锋, 许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004: 107-110.
- [11] 边少锋, 许江宁. 大地坐标系与大地基准[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 99-101.
- [12] 边少锋, 李厚朴. 大地测量计算机代数分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 91-95.
- [13] 李厚朴, 边少锋. 等量纬度展开式的新解法[J]. 海洋测绘, 2007, 27(4): 6-10.
- [14] 李厚朴, 王瑞, 边少锋. 复变函数表示的高斯投影非迭代公式[J]. 海洋测绘, 2009, 29(6): 5-9.
- [15] 李厚朴, 边少锋, 李海波. 常用等角投影及其解析变换的复变函数表示[J]. 测绘科学技术学报, 2012, 29(2): 109-117.
- [16] 边少锋, 李厚朴. 高斯投影的复变函数表示[M]. 北京: 科学出版社, 2021: 127-130.
- [17] 李厚朴, 边少锋, 李海波. 利用复变函数高斯换带的方法[J]. 海军工程大学学报, 2016, 28(1): 15-19.
- [18] 边少锋, 李厚朴, 李忠美. 地图投影计算机代数分析研究进展[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1557-1569.
- [19] 金立新, 许常文, 魏桂华. 高斯投影复变函数表示的实数解[J]. 海洋测绘, 2017, 37(2): 27-31.
- [20] 刘大海, 方春波, 陈永红, 等. 基于实数等角纬度的高斯投影变换[J]. 测绘科学技术, 2024, 12(4): 349-358.