

复数高斯投影非迭代优化变换

刘大海^{1,2}, 李文魁³

¹深圳地质科技创新中心, 广东 深圳

²深圳地质建设工程公司, 广东 深圳

³海军工程大学电气工程学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年3月16日; 录用日期: 2026年4月9日; 发布日期: 2026年4月16日

摘要

现有复数高斯投影非迭代变换, 基于以偏心率 e 为参数的Taylor级数展开式, 表达式较为冗长。以第3扁率 n 为参数的Taylor级数展开式, 级数幂次降低一半, 系数表达式得到简化, c 及 c_f 系数的精简尤为显著。本文在现有高斯投影非迭代变换的基础上, 选择适当的优化因子, 使高斯投影椭圆积分的级数系数 k 及归一化系数 k_1 得到特别显著的精简优化。高斯投影变换的Taylor级数展开式, 取级数幂次 $je = 12$ 或 $jn = 6$, 其截断误差 $< 1E-15$, 误差足以满足实际用于需求。变换实例表明, 反算结果可精准回溯正算结果, 回溯误差 $< 1E-15$ 。

关键词

高斯投影, 正变换, 反变换, 非迭代, 复数, 偏心率, 第3扁率, 优化因子

Non-Iterative Optimization Transformation of Complex Gaussian Projection

Dahai Liu^{1,2}, Wenkui Li³

¹Shenzhen Geological Science and Technology Innovation Center, Shenzhen Guangdong

²Shenzhen Geological Construction Engineering Company, Shenzhen Guangdong

³School of Electrical Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

Received: March 16, 2026; accepted: April 9, 2026; published: April 16, 2026

Abstract

The existing non-iterative transformation of complex Gaussian projection is based on the Taylor series expansion with eccentricity e as a parameter, and the coefficient expression is relatively

文章引用: 刘大海, 李文魁. 复数高斯投影非迭代优化变换[J]. 测绘科学技术, 2026, 14(2): 111-124.

DOI: 10.12677/gst.2026.142011

lengthy. The Taylor series expansion with the third flattening rate n as the parameter reduces the power of the series by half, simplifying the expression, especially the coefficients c and c_f . Based on the existing Gaussian projection non-iterative transformation, this paper selects appropriate optimization factors to achieve particularly significant simplification and optimization of the series coefficient k and normalization coefficient k_A in the Taylor expansion of the Gaussian projection elliptic integral. The Taylor series expansion of the Gauss projection transformation, with the series power $je = 12$ or $jn = 6$, has a truncation error of $< 1E-15$, which is sufficient to meet the requirements of practical applications. The transformation example shows that the inverse calculation results can accurately trace back to the forward calculation results, with a traceback error less than $1E-15$.

Keywords

Gaussian Projection, Positive Transformation, Negative Transformation, Non Iterative, Complex, Eccentricity, 3rd Flattening, Optimization Factor

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 前言

高斯投影变换为等角投影[1]-[3]。上世纪,其主要研究域为实数域。实际上,复数域的高斯投影变换比实数域变换更为简洁。

高斯投影,复变量 z 与 w 之间的变换为[4]-[7]:

$$\text{复变量: } \begin{cases} z = x + i \cdot y; \\ w = q + i \cdot l \end{cases}$$

$$\text{即正反变换为: } \begin{cases} z = f(w) = x(q, l) + i \cdot y(q, l) \\ w = f^{-1}(z) = q(x, y) + i \cdot l(x, y) \end{cases}。$$

边少锋等(2001, 2004)引入计算机代数系统后,将高斯投影变换从实数域拓展到复数域,得到了复数高斯投影变换的系列研究成果[8]-[12]。李厚朴、边少锋等(2007, 2009, 2012, 2015~2017)研究了基于复数等角纬度 φ_c 的非迭代解算式[13]-[18]。金立新等(2017)将复数变换解析到实数域[19];刘大海等(2024)基于实数等角纬度的高斯投影反变换采用数值迭代法计算[20]。

将复数高斯投影变换解析到实数域的研究成果,为 Excel 大众计算工具进行复数高斯投影变换奠定了基础。

现有的复数高斯投影变换,为基于偏心率 e 参量将高斯投影变换的被积函数展开为 Taylor 级数表达式,表达式较为冗长。方春波等(2025)基于第 3 扁率 n 将高斯投影变换及其相关的角度变换展开为 Taylor 级数,大大简化了级数表达式,级数幂次降低一半[21]。

本文在基于第 3 扁率 n 参量展开的高斯投影变换基础上,对高斯投影椭圆积分,探索选择适当的优化因子,使椭圆积分的 Taylor 展开式的级数系数得到了显著的精简优化。

通常,复数高斯投影变换(正反算)步骤为:

变换方法 1,以复数等角纬度 φ_c 为中间转换桥梁:

$$\text{正变换: } (B, l) \rightarrow w = q + i \cdot l \rightarrow [\varphi_c = \varphi_x + i \cdot \varphi_y] \Rightarrow B_c = B_x + i \cdot B_y \rightarrow \psi_c = \psi_x + i \cdot \psi_y \rightarrow z = x + i \cdot y;$$

反变换: $(B, l) \leftarrow w = q + i \cdot l \leftarrow [\varphi_c = \varphi_x + i \cdot \varphi_y] \leftarrow B_c = B_x + i \cdot B_y \leftarrow \psi_c = \psi_x + i \cdot \psi_y \leftarrow z = x + i \cdot y$ 。

变换方法 2, 以复数大地纬度 B_c 为转换桥梁:

正变换: $(B, l) \rightarrow w = q + i \cdot l \Rightarrow [B_c = B_x + i \cdot B_y] \rightarrow z = x + i \cdot y$;

反变换: $(B, l) \leftarrow w = q + i \cdot l \leftarrow [B_c = B_x + i \cdot B_y] \leftarrow z = x + i \cdot y$ 。

显然, 变换方法 2 比变换方法 1 要简洁得多。

单箭头转换过程为正算, 可直接用解析式计算。双线箭头转换过程为反算, 是非线性正算解析式的逆解, 一般需利用迭代法、方程求解法等数值方法进行求解。

变换方法 1, 是目前的研究热点。反算逆解不使用数值方法, 是对非线性正算解析式进行 Taylor 级数展开, 并采用符号迭代法获取逆解的 Taylor 级数计算式, 为非迭代计算式。

边少锋团队, 将椭圆实数中央子午线弧长表达式 X 扩展到复数域, 以偏心率 e 参数为变量(目前基于第 3 扁率 n 参数), 导出了中央子午线弧长的复数表达式 z 。在复数拓展表达基础上, 导出了以参数 e (或 n) 为变量的各种复数纬度之间的高阶 Taylor 级数展开式[21]。进一步, 在通常变换步骤的基础上进行优化, 省略了间接算法中 B_c 的转换步骤。

边少锋团队的核心算法:

直接算法($\psi_c \leftrightarrow \varphi_c$)

间接算法($\psi_c \leftrightarrow B_c \leftrightarrow \varphi_c$)

$$\text{直接正算: } \begin{cases} \psi_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^{\infty} d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c) \\ z = a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \end{cases}$$

$$\text{间接正算: } \begin{cases} B_c = \varphi_c + \sum_{j=1}^{\infty} b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi_c) \\ \psi_c = B_c + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \\ z = a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \end{cases}$$

$$\text{直接反算: } \begin{cases} \psi_c = \frac{z}{a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0} = \frac{z}{a \cdot k_{A0}} \\ \varphi_c = \psi_c + \sum_{j=1}^{\infty} d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c) \end{cases}$$

$$\text{间接反算: } \begin{cases} \psi_c = \frac{z}{a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0} = \frac{z}{a \cdot k_{A0}} \\ B_c = \psi_c + \sum_{j=1}^{\infty} c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi_c) \\ \varphi_c = B_c + \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \end{cases}$$

$$\text{其中: } k_{A0} = (1 - e^2) \cdot k_0 = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \cdot k_0$$

Charles F. F. Karney 于 2011 年发表论文 “Transverse Mercator with an Accuracy of a Few Nanometers” [22], 使用复数等角纬度 ζ (为我们常用符号 φ) 和等积球半径 A 解算框架, 以第 3 扁率为参数, 以复数映射变换为工具, 导出了正反解的高精度级数展开式, 转换精度达到纳米级。

Karney 核心算法:

$$\begin{cases} A = a \cdot k_A \\ k_A = \frac{1}{1 + n} \cdot \left[1 + \frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{64} n^4 + \frac{1}{256} n^6 + \frac{25}{16384} n^8 + \frac{49}{65536} n^{10} + O(n^{12}) \right] \end{cases}$$

$$\text{其中: } k_{A0} = (1 - e^2) \cdot k_0 = \left(\frac{1 - n}{1 + n} \right)^2 \cdot k_0$$

$$\text{正算: } \begin{cases} \zeta = \xi + i \cdot \eta \\ z = x + i \cdot y = A \cdot \left[\zeta + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \cdot \sin(2j \cdot \zeta) \right] \end{cases}$$

$$\text{反算: } \zeta = \frac{z}{A} - \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \cdot \sin\left(2j \cdot \frac{z}{A}\right)$$

比较 Karney 及边少锋团队的核心算法, Karney 算法的 k_A 、 z/A 及 ζ 分别相当于边少锋团队算法的 k_{A0} 、 ψ_c 及 φ_c 。变换系数 α 及 β 与边少锋团队的变换系数 d 及 d_f 完全相同[21]。Karney 的核心算法, 采用了 ψ_c 与 φ_c 之间的直接算法, 省略了间接算法中的 B_c 转换步骤。

两个团队算法的核心, 实际上就是建立了复数等距离纬度 ψ_c 与复数等角纬度 φ_c 的 Taylor 级数高精度转换关系式。两者核心算法具有同一性, 精度等同。

复数高斯投影变换, 边少锋团队算法始于本世纪初, 早于 Karney 算法, 初始以偏心率 e 为参数进行研究, 目前已进入以第 3 扁率 n 为参数的相关变换研究[21]。

2. 复数高斯投影变换

2.1. 复数高斯投影变换

在实数域, 高斯投影正解(中央子午线弧长 X)为[4]-[7]:

$$X = \int_0^B M \cdot dt = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^B [1 - e^2 \cdot \sin(t)^2]^{-3/2} dt \tag{1}$$

边少锋将实数域 B 拓展到复数域 B_c [8]-[11]:

$$z = \int_0^{B_c} M \cdot dt = a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^{B_c} [1 - e^2 \cdot \sin(t)^2]^{-3/2} dt \tag{2}$$

由于扁率 f 、偏心率 e 与第 3 扁率 n 有下述关系:

$$\begin{cases} n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} = \frac{f}{2-f} \\ e^2 = \frac{4n}{(1+n)^2} \\ 1-e^2 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \end{cases} \tag{3}$$

则, 式(2)可写为:

$$\begin{aligned} z &= a \cdot (1 - e^2) \cdot \int_0^{B_c} e^{-3} \cdot [e^{-2} - \sin(t)^2]^{-3/2} dt \\ &= a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \end{aligned} \tag{4a}$$

$$\begin{aligned} z &= a \cdot \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \cdot \int_0^{B_c} (1+n)^3 \cdot [(1+n)^2 - 4n \sin(t)^2]^{-3/2} dt \\ &= a \cdot \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \end{aligned} \tag{4b}$$

$$\begin{cases} \psi_c = k_0 \cdot B_c + \sum_{j=1}^{\infty} k_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \\ = k_0 \cdot \left[B_c + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B_c) \right] \\ c_{2j} = k_{2j} / k_0 \end{cases} \tag{5}$$

因此, 复数域高斯投影变换表达为:

$$\begin{cases} z = a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \\ \psi_c = \frac{z}{a \cdot (1 - e^2) \cdot k_0} = \frac{z}{a \cdot k_{A0}} \end{cases} \quad (6a)$$

$$\begin{cases} z = a \cdot [(1 - n)/(+n)]^2 \cdot k_0 \cdot \psi_c = a \cdot k_{A0} \cdot \psi_c \\ \psi_c = \frac{z}{a \cdot [(1 - n)/(+n)]^2 \cdot k_0} = \frac{z}{a \cdot k_{A0}} \end{cases} \quad (6b)$$

复数高斯投影变换, 本质上为直角坐标 z 与等距离纬度 ψ_c 之间的变换。

2.2. 高斯投影椭圆积分 Taylor 级数展开式系数优化

为不失一般性, 设 Taylor 级数展开式为:

$$y = f(x) \quad (7a)$$

并设优化因子为: $p(x)$

则函数等价式为:

$$y = [f(x) \cdot p(x)] / p(x) = g(x) / p(x) \quad (7b)$$

选取适当的优化因子 $p(x)$, 则函数 $g(x)$ 有可能得到规律化的精简, 从而使 $f(x) = g(x) / p(x)$ 的等价表达式得到显著的精简优化。

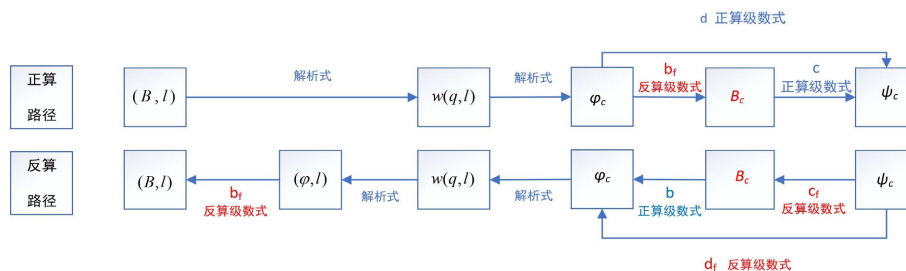
高斯投影是一椭圆积分, 对以参数 n 表达的 Taylor 级数系数 k 及归一化系数 k_A , 分别选择优化因子 $p(n) = (1 + n)^{-3}$ 及 $p(n) = 1 + n$, 则椭圆积分的 Taylor 级数展开式系数 k 及 k_A 得到了显著的精简优化, 详见附录, 表 A1-1 及表 A1-2。

参数 e 表达的 k 及 k_A 系数, 没有找到实质性的精简优化因子。

相同的椭圆积分, 不同的参数, 其定义域发生了变化。以参数 e 表达的椭圆积分, 有本质的超越奇点, 无法通过乘以有理函数来消除奇点; 而以参数 n 表达的椭圆积分, 是在复平面上除极点外的全纯函数, 只有局部奇点, 从而可以通过乘以有理函数来消除奇点, 使表达式得到简洁优化。

3. 复数高斯投影变换的实现

复数高斯投影变换, 核心是实数 (B, l) 与复数 ψ_c 之间的变换。



其中: (B, l) 为实数纬度及经差; $w = q + i \cdot l$ 为复数等量纬度; $\varphi_c = \varphi_x + i \cdot \varphi_y$ 为复数等角纬度; $\psi_c = \psi_x + i \cdot \psi_y$ 为复数等距离纬度; $z = x + i \cdot y$ 为复数直角坐标。

Figure 1. Non iterative transformation path diagram of forward and backward calculation between geodetic longitude and latitude (B, l) and complex equidistant latitude ψ_c

图 1. 大地经纬度 (B, l) 与复数等距离纬度 ψ_c 正反算非迭代变换路径图

方春波等(2025)给出了高斯投影变换实数经纬度 (B, l) 与等距离纬度 ψ_c 正反算实现的 2 条路径(详见图 1), 同时利用计算机代数系统导出了相关角度变换的 Taylor 级数系数 k 、 k_A 、 b 、 c 、 d [21]。

4. 复数高斯投影相关角度转换系数

4.1. 等距离纬度与大地纬度变换系数 k 及归一化系数 k_A

变换系数 k 是 $\psi = f(B)$ 变换式的级数系数。

$$\begin{aligned}\psi &= \int_0^B e^{-3} \cdot [e^{-2} - \sin(t)^2]^{-3/2} dt \\ &= \int_0^B (1+n)^3 \cdot [(1+n)^2 - 4n \cdot \sin(t)^2]^{-3/2} dt\end{aligned}\quad (8)$$

利用计算机代数系统, 可对式(8)展开为 Taylor 级数, 导出椭圆积分的级数系数。

$$\psi = f(B) = k_0 \cdot B + \sum_{j=1}^{\infty} k_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) = k_0 \cdot \left[B + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) \right]\quad (9)$$

变换系数 k_A 是归一化系数:

$$k_A = (1 - e^2) \cdot k_0 = \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^2 \cdot k_0\quad (10)$$

k 及 k_A 数详见附录, 表 A1-1、表 A1-2。

以 n 参数表达的 k 及 k_A 系数得到显著的精简优化。

4.2. 等角纬度与大地纬度变换系数 b 、 b_f

正算系数 b 是 $\varphi = f(B)$ 变换式的级数系数。

$$\varphi = f(B) = 2 \cdot \arctan \left[\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{B}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 - e \cdot \sin B}{1 + e \cdot \sin B} \right)^{e/2} \right] - \frac{\pi}{2}\quad (11)$$

利用计算机代数系统, 将式(11)展开为 Taylor 级数, 得到正算变换式及正算级数系数 b :

$$\text{正算变换式: } \varphi = f(B) = B + \sum_{j=1}^{\infty} b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B)\quad (12a)$$

利用正算变换式(12a)进行 7 次符号迭代, 得到符号反算变换式及反算系数 b_f :

$$\text{反算变换式: } B = f^{-1}(\varphi) = \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)\quad (12b)$$

正算变换系数 b 详见附录, 表 A2-1; 反算变换系数 b_f 详见附录, 表 A2-2。

4.3. 等距离纬度与大地纬度变换系数 c 、 c_f

正算系数 c 是 $\psi = f(B)$ 变换式的级数系数。

对式(4)积分函数展开为 Taylor 级数, 可以得到角度变换式

$$\text{正算式: } \begin{cases} \psi = B + \sum_{j=1}^{\infty} c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B) \\ c_{2j} = k_{2j} / k_0 \end{cases}\quad (13a)$$

利用正算式(13a)进行符号迭代, 得到反算变换式及其级数系数 c_f :

$$\text{反算式: } B = \psi + \sum_{j=1}^{\infty} c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi) \quad (13b)$$

正算变换系数 c 详见附录, 表 A3-1; 反算变换系数 c_f 详见附录, 表 A3-2。

对比 c 系数表, n 参量的系数表达式与 e 参量的系数表达式相比, 精简尤为明显。

4.4. 等距离纬度与等角纬度变换系数 d 、 d_f

角度正算系数 d 是 $\psi = f(\varphi)$ 直接转换的 Taylor 展开式级数系数。

用间接符号代入法, 将 $B = f^{-1}(\varphi)$ 关系式(12b)间接代入 $\psi = f(B)$ 关系式(13a), 得到角度符号正算式 $\psi = f(\varphi)$ 及其正算系数 d :

$$\text{角度正算式: } \psi = \varphi + \sum_{j=1}^{\infty} d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi) \quad (14a)$$

对角度正算式(14a)进行符号迭代, 得到角度反算式及反算系数 d_f :

$$\text{角度反算式: } \varphi = \psi + \sum_{j=1}^{\infty} d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi) \quad (14b)$$

角度正算系数 d 详见附录, 表 A4-1; 反算系数 d_f 详见附录, 表 A4-2。

对比 d 系数表, n 参量的系数表达式与 e 参量的系数表达式相比, 有明显简化。

以 n 参量表达的变换系数 d 及 d_f 与 Karney 变换系数 α 及 β 完全相同。

5. 角度转换 Taylor 级数截断余项估算

为不失一般性, 设角度转换的 Taylor 级数展开式为:

$$\beta = \alpha + \sum_{j=1}^m h_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \alpha) + O(\alpha^{2m+2}) \quad (15)$$

则有:

$$O(\alpha^{2m+2}) < h_{2m} \cdot \sin(2m \cdot \alpha) < h_{2m} \quad (16)$$

即:

$$O(\alpha^{2m+2}) < h_{2m} \quad (17)$$

Taylor 级数截断误差估算, 详见表 1, 取级数幂次 $je = 12$ 或 $jn = 6$, 各转换式的 Taylor 级数的截断误差均 $< 1E-15$, 变换精度足以满足实际需要。

Table 1. Taylor series truncation error table

表 1. Taylor 级数截断误差表

角度 变换式	系数 名称	1940 克拉索夫斯基椭球		CGCS2000 椭球	
		$O(e^{14})$	$O(n^7)$	$Q(e^{14})$	$Q(n^7)$
$B = f(\psi)$	k_{12}	1.07308289E-17	1.100428100E-17	1.07400512E-17	1.1013778E-17
$k_A = (1-e^2)k$	k_{A12}	1.07308289E-17	1.09306863E-17	1.07400512E-17	1.09401093E-17
$\varphi = f(B)$	b_{12}	6.25641966E-17	6.383643E-17	6.26179655E-17	6.38914769E-17
$B = f(\varphi)$	b_{f12}	5.93026529E-16	6.05085633E-16	5.93536188E-16	6.05607406E-16

续表

$\psi = f(B)$	c_{12}	1.07308289E-17	1.09490387E-17	1.07400512E-17	1.09584802E-17
$B = f(\psi)$	$c_{\rho 2}$	1.04840163E-16	1.06972072E-16	1.04930265E-16	1.07064315E-16
$\psi = f(\varphi)$	d_{12}	1.46014132E-17	1.48983307E-17	1.4613962E-17	1.49111778E-17
$\varphi = f(\psi)$	$d_{\rho 2}$	7.09816373E-19	7.24250381E-19	7.10426403E-19	7.2487491E-19

6. 变换实例验算

【实例】选自文献[16] (p. 117)例 9.1。坐标系为 CGCS2000，变换点大地坐标为： $B = 45^\circ$ ， $l = 3^\circ$ 。

解算：1) 由大地坐标 (B, l) 正算直角坐标 (x, y) ；

2) 由直角坐标 (x, y) 反算大地坐标 (B, l) 。

本文根据图 1 高斯投影正反算变换路径的实施步骤，分别用参量 e 及参量 n 进行高斯投影正反算变换。

高斯投影 e 参量正反算结果详见表 2(a)， n 参量正反算结果详见表 2(b)。

计算结果表明，反算结果可精准回溯正算结果，回溯误差 $< 1E-15$ 。

Table 2. (a) Table of complex Gaussian projection transform calculation results (e parameters); (b) Table of complex Gaussian projection transform calculation results (n parameters)

表 2. (a) 复数高斯投影变换计算结果表(e 参量); (b) 复数高斯投影变换计算结果表(n 参量)

(a)						
正算	参量	原文正算	本文正算	本文反算	反算	
序次	中央子午线	L_0/deg	0	0	0	序次
0	纬度	B	45°00'00"	45°00'00"	45°00'000000"	6
	经度	L	3°00'00"	3°00'00"	3°00'000000"	
	等角纬度	φ/rad			0.782041616955646	5
	经差	l/rad			0.052359877559830	
1	等量纬度	q/rad		0.876634653411383	0.876634653411383	4
	经差	l/rad		0.052359877559830	0.052359877559830	
2	等角纬度	φ_x/rad		0.782727307042200	0.782727307042200	3
		φ_y/rad		0.037148195539064	0.037148195539064	
3	大地纬度	B_x/rad		0.786093131674639	0.786093131674639	2
		B_y/rad		0.037148548751222	0.037148548751222	
4	等距离纬度	ψ_x/rad		0.783567347057148	0.783567347057148	1
		ψ_y/rad		0.037148414843202	0.037148414843202	
5	直角坐标	x/m	489325.235	4989325.234673	4989325.234673	0
		y/m	236540.6424	236540.642360	236540.642360	
		y_s/m		736540.642360	736540.642360	

续表

(b)						
正算	参量		原文正算	本文正算	本文反算	反算
序次	中央子午线	L_0/deg	0	0	0	序次
0	纬度	B	45°00'00"	45°00'00"	45°00'000000"	6
	经度	L	3°00'00"	3°00'00"	3°00'000000"	
	等角纬度	φ/rad			0.782041616955646	5
	经差	l/rad			0.052359877559830	
1	等量纬度	q/rad		0.876634653411383	0.876634653411383	4
	经差	l/rad		0.052359877559830	0.052359877559830	
2	等角纬度	φ_x/rad		0.782727307042200	0.782727307042200	3
		φ_y/rad		0.037148195539064	0.037148195539064	
3	大地纬度	B_x/rad		0.786093131674639	0.786093131674639	2
		B_y/rad		0.037148548751222	0.037148548751222	
4	等距离纬度	ψ_x/rad		0.783567347057148	0.783567347057148	1
		ψ_y/rad		0.037148414843202	0.037148414843202	
5	直角坐标	x/m	489325.235	4989325.234673	4989325.234673	0
		y/m	236540.6424	236540.642360	236540.642360	
		y_s/m		736540.642360	736540.642360	

7. 结语

1) 本文利用计算机代数系统, 导出了以偏心率 e 及第 3 扁率 n 为参数的非简化的高斯投影变换级数表达式及其相关角度转换关系式。

2) 高斯投影变换, 基于第 3 扁率 n 参数的 Taylor 级数表达式, 级数幂次比基于偏心率 e 的级数幂次降低一半, n 参量的级数系数表达式得到简化, c 及 c_f 系数的精简尤为显著。

3) 本文对第 3 扁率 n 为参数的高斯投影的 Taylor 级数变换式, 探索选择适当的优化因子, 使高斯投影椭圆积分 Taylor 展开式的级数系数 k 及归一化系数 k_A 得到了特别显著的精简优化。

4) 高斯投影变换 Taylor 展开式, 取级数幂次 $je=12$ 或 $jn=6$, 其截断误差 $< 1E-15$, 变换精度足以满足实际需要。

5) 变换实例表明, 反算结果可以精准回溯正算结果, 回溯误差 $< 1E-15$ 。

致 谢

海军工程大学边少锋教授对课题研究给予了大力支持, 安徽建筑大学土木工程学院过家春教授、中国地质大学(武汉)地理与信息工程学院周东权博士对本文给予了热情指导与帮助, 在此一并致谢!

基金项目

国家自然科学基金项目: 42174051。

参考文献

[1] 杨启和. 等角投影数值变换的研究[J]. 测绘学报, 1982, 11(4): 268-282.

-
- [2] 程阳. 复变函数与等角投影[J]. 测绘学报, 1985, 14(1): 51-60.
- [3] 杨启和. 等角投影理论和方法[J]. 解放军测绘学院学报, 1994, 11(2): 133-139.
- [4] 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京: 解放军出版社, 1988: 48-49.
- [5] 陈健, 晁定波. 椭球大地测量学[M]. 北京: 测绘出版社, 1989: 18, 168.
- [6] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 测绘出版社, 1990: 56.
- [7] 孔祥元, 郭际明, 刘宗泉. 大地测量学基础[M]. 第2版. 武汉: 武汉大学出版社, 1990: 115, 169.
- [8] 边少锋, 张传定. Gauss 投影的复变函数表示[J]. 测绘学院学报, 2001, 18(3): 157-159.
- [9] 李厚朴, 边少锋. 高斯投影的复变函数表示[J]. 测绘学报, 2008, 37(1): 5-9.
- [10] 边少锋, 许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004: 107-110.
- [11] 边少锋, 柴洪洲, 金际航. 大地坐标系与大地基准[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005: 99-101.
- [12] 边少锋, 李厚朴. 大地测量计算机代数分析[M]. 北京: 科学出版社, 2018: 91-95.
- [13] 李厚朴, 边少锋. 等量纬度展开式的新解法[J]. 海洋测绘, 2007, 27(4): 6-10.
- [14] 李厚朴, 王瑞, 边少锋. 复变函数表示的高斯投影非迭代公式[J]. 海洋测绘, 2009, 29(6): 5-9.
- [15] 李厚朴, 边少锋, 李海波. 常用等角投影及其解析变换的复变函数表示[J]. 测绘科学技术学报, 2012, 29(2): 109-117.
- [16] 边少锋, 李厚朴. 高斯投影的复变函数表示[M]. 北京: 科学出版社, 2021: 117, 127-130.
- [17] 李厚朴, 边少锋, 李海波. 利用复变函数高斯换带的方法[J]. 海军工程大学学报, 2016, 28(1): 15-19.
- [18] 边少锋, 李厚朴, 李忠美. 地图投影计算机代数分析研究进展[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1557-1569.
- [19] 金立新, 许常文, 魏桂华. 高斯投影复变函数表示的实数解[J]. 海洋测绘, 2017, 37(2): 27-31.
- [20] 刘大海, 方春波, 陈永红, 洪声亮, 陈永冰. 基于实数等角纬度的高斯投影变换[J]. 测绘科学技术, 2024, 12(4): 349-358.
- [21] 方春波, 刘大海, 莫晓锋, 洪声亮, 李文魁. 复数高斯投影变换非迭代算法的 2 条路径[J]. 测绘科学技术, 2025, 13(3): 151-164.
- [22] Karney, C.F.F. (2011) Transverse Mercator with an Accuracy of a Few Nanometers. *Journal of Geodesy*, **85**, 475-485. <https://doi.org/10.1007/s00190-011-0445-3>

附录

Table A1-1. k coefficient table表 A1-1. k 系数表

以参数 e 表达的系数 k	以参数 n 表达的系数 k
$\psi = B + \sum_{j=1}^m k_{2j}/k_0 \cdot \sin(2j \cdot B)$	$\psi = B + \sum_{j=1}^m k_{2j}/k_0 \cdot \sin(2j \cdot B)$
$k_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 + \frac{43659}{65536}e^{10} + \frac{693693}{1408576}e^{12}$	$k_0 = (1+n)^3 \cdot \left(1 + \frac{9}{4}n^2 + \frac{225}{64}n^4 + \frac{1225}{256}n^6\right)$
$k_2 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{15}{32}e^4 - \frac{525}{1024}e^6 - \frac{2205}{4096}e^8 - \frac{72765}{131072}e^{10} - \frac{297297}{524288}e^{12}$	$k_2 = (1+n)^3 \cdot \left(-\frac{3}{2}n - \frac{45}{16}n^3 - \frac{525}{128}n^5\right)$
$k_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{16384}e^8 + \frac{10395}{65536}e^{10} + \frac{1486485}{8388608}e^{12}$	$k_4 = (1+n)^3 \cdot \left(\frac{15}{16}n^2 + \frac{105}{64}n^4 + \frac{4725}{2048}n^6\right)$
$k_6 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{105}{4096}e^8 - \frac{10395}{262144}e^{10} - \frac{55055}{1048576}e^{12}$	$k_6 = (1+n)^3 \cdot \left(-\frac{35}{48}n^3 - \frac{315}{256}n^5\right)$
$k_8 = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{3465}{524288}e^{10} + \frac{99099}{8388608}e^{12}$	$k_8 = (1+n)^3 \cdot \left(\frac{315}{512}n^4 + \frac{2079}{2048}n^6\right)$
$k_{10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{9009}{5242880}e^{12}$	$k_{10} = (1+n)^3 \cdot \left(-\frac{693}{1280}n^5\right)$
$k_{12} = \frac{1001}{8388608}e^{12}$	$k_{12} = (1+n)^3 \cdot \left(\frac{1001}{2048}n^6\right)$

Table A1-2. k_A coefficient table表 A1-2. k_A 系数表

以参数 e 表达的系数 k_A	以参数 n 表达的系数 k_A
$k_A = (1-e^2) \cdot k$	$k_A = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 \cdot k$
$k_{A0} = 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 - \frac{441}{65536}e^{10} - \frac{4851}{1408576}e^{12}$	$k_{A0} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(1 + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{64}n^4 + \frac{1}{256}n^6\right)$
$k_{A2} = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{32}e^4 - \frac{45}{1024}e^6 - \frac{105}{4096}e^8 - \frac{2205}{131072}e^{10} - \frac{6237}{524288}e^{12}$	$k_{A2} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(-\frac{3}{2}n + \frac{3}{16}n^3 + \frac{3}{128}n^5\right)$
$k_{A4} = \frac{15}{256}e^4 + \frac{45}{1024}e^6 + \frac{525}{16384}e^8 + \frac{1575}{65536}e^{10} + \frac{155925}{8388608}e^{12}$	$k_{A4} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(\frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{64}n^4 - \frac{75}{2048}n^6\right)$
$k_{A6} = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{175}{12288}e^8 - \frac{3675}{262144}e^{10} - \frac{13475}{1048576}e^{12}$	$k_{A6} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(-\frac{35}{48}n^3 + \frac{175}{768}n^5\right)$
$k_{A8} = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{2205}{524288}e^{10} + \frac{43659}{8388608}e^{12}$	$k_{A8} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(\frac{315}{512}n^4 - \frac{441}{2048}n^6\right)$
$k_{A10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{6237}{5242880}e^{12}$	$k_{A10} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(-\frac{693}{1280}n^5\right)$
$k_{A12} = \frac{1001}{8388608}e^{12}$	$k_{A12} = \frac{1}{1+n} \cdot \left(\frac{1001}{2048}n^6\right)$

Table A2-1. b coefficient table

表 A2-1. b 系数表

以参数 e 表达的系数 b	以参数 n 表达的系数 b
$\varphi = B + \sum_{j=1}^m b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B)$	$\varphi = B + \sum_{j=1}^m b_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B)$
$b_2 = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{5}{24}e^4 - \frac{3}{32}e^6 - \frac{281}{5760}e^8 - \frac{7}{240}e^{10} - \frac{23453}{1209600}e^{12}$	$b_2 = -2n + \frac{2}{3}n^2 + \frac{4}{3}n^3 - \frac{82}{45}n^4 + \frac{32}{45}n^5 + \frac{4642}{4725}n^6$
$b_4 = \frac{5}{48}e^4 + \frac{7}{80}e^6 + \frac{697}{11520}e^8 + \frac{93}{2240}e^{10} + \frac{114533}{3870720}e^{12}$	$b_4 = \frac{5}{3}n^2 - \frac{16}{15}n^3 - \frac{13}{9}n^4 + \frac{904}{315}n^5 - \frac{1522}{945}n^6$
$b_6 = -\frac{13}{480}e^6 - \frac{461}{13440}e^8 - \frac{1693}{53760}e^{10} - \frac{152953}{5806080}e^{12}$	$b_6 = -\frac{26}{15}n^3 + \frac{34}{21}n^4 + \frac{8}{5}n^5 - \frac{12686}{2835}n^6$
$b_8 = \frac{1237}{161280}e^8 + \frac{131}{10080}e^{10} + \frac{429799}{29030400}e^{12}$	$b_8 = \frac{1237}{630}n^4 - \frac{12}{5}n^5 - \frac{24832}{14175}n^6$
$b_{10} = -\frac{367}{161280}e^{10} - \frac{308531}{63866880}e^{12}$	$b_{10} = -\frac{734}{315}n^5 + \frac{109598}{31185}n^6$
$b_{12} = \frac{444337}{63866880}e^{12}$	$b_{12} = \frac{444337}{155925}n^6$

Table A2-2. b_f coefficient table

表 A2-2. b_f 系数表

以参数 e 表达的系数 b_f	以参数 n 表达的系数 b_f
$B = \varphi + \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)$	$B = \varphi + \sum_{j=1}^m b_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)$
$b_{f2} = \frac{1}{2}e^2 + \frac{5}{24}e^4 + \frac{1}{12}e^6 + \frac{13}{360}e^8 + \frac{3}{160}e^{10} + \frac{1033}{86400}e^{12}$	$b_{f2} = 2n - \frac{2}{3}n^2 - 2n^3 + \frac{116}{45}n^4 + \frac{26}{45}n^5 - \frac{2854}{675}n^6$
$b_{f4} = \frac{7}{48}e^4 + \frac{29}{240}e^6 + \frac{811}{11520}e^8 + \frac{81}{2240}e^{10} + \frac{445}{24192}e^{12}$	$b_{f4} = \frac{7}{3}n^2 - \frac{8}{5}n^3 - \frac{227}{45}n^4 + \frac{2704}{315}n^5 + \frac{2323}{945}n^6$
$b_{f6} = \frac{7}{120}e^6 + \frac{81}{1120}e^8 + \frac{3029}{53760}e^{10} + \frac{41261}{1161216}e^{12}$	$b_{f6} = \frac{56}{15}n^3 - \frac{136}{35}n^4 - \frac{1262}{105}n^5 + \frac{73814}{2835}n^6$
$b_{f8} = \frac{4279}{161280}e^8 + \frac{883}{20160}e^{10} + \frac{1246019}{29030400}e^{12}$	$b_{f8} = \frac{4279}{630}n^4 - \frac{332}{35}n^5 - \frac{399572}{14175}n^6$
$b_{f10} = \frac{2087}{161280}e^{10} + \frac{340807}{12773376}e^{12}$	$b_{f10} = \frac{4174}{315}n^5 - \frac{144838}{6237}n^6$
$b_{f12} = \frac{150419}{22809600}e^{12}$	$b_{f12} = \frac{601676}{22275}n^6$

Table A3-1. c coefficient table表 A3-1. c 系数表

以参数 e 表达的系数 c	以参数 n 表达的系数 c
$\psi = B + \sum_{j=1}^m c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B)$	$\psi = B + \sum_{j=1}^m c_{2j} \cdot \sin(2j \cdot B)$
$c_2 = -\frac{3}{8}e^2 - \frac{3}{16}e^4 - \frac{111}{1024}e^6 - \frac{141}{2048}e^8 - \frac{1533}{32768}e^{10} - \frac{2193}{65536}e^{12}$	$c_2 = -\frac{3}{2}n + \frac{9}{16}n^3 - \frac{3}{32}n^5$
$c_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{15}{256}e^6 + \frac{405}{8192}e^8 + \frac{165}{4096}e^{10} + \frac{274695}{8388608}e^{12}$	$c_4 = \frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{32}n^4 + \frac{135}{2048}n^6$
$c_6 = -\frac{35}{3072}e^6 - \frac{35}{2048}e^8 - \frac{4935}{262144}e^{10} - \frac{29225}{1572864}e^{12}$	$c_6 = -\frac{35}{48}n^3 + \frac{105}{256}n^5$
$c_8 = \frac{315}{131072}e^8 + \frac{315}{65536}e^{10} + \frac{13671}{2097152}e^{12}$	$c_8 = \frac{315}{512}n^4 - \frac{189}{512}n^6$
$c_{10} = -\frac{693}{1310720}e^{10} - \frac{693}{524288}e^{12}$	$c_{10} = -\frac{693}{1280}n^5$
$c_{12} = \frac{1001}{8388608}e^{12}$	$c_{12} = \frac{1001}{2048}n^6$

Table A3-2. c_f coefficient table表 A3-2. c_f 系数表

以参数 e 表达的系数 c_f	以参数 n 表达的系数 c_f
$B = \psi + \sum_{j=1}^m c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi)$	$B = \psi + \sum_{j=1}^m c_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi)$
$c_{f2} = \frac{3}{8}e^2 + \frac{3}{16}e^4 + \frac{213}{2048}e^6 + \frac{255}{4096}e^8 + \frac{20861}{524288}e^{10} + \frac{28273}{1048576}e^{12}$	$c_{f2} = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5$
$c_{f4} = \frac{21}{256}e^4 + \frac{21}{256}e^6 + \frac{533}{8192}e^8 + \frac{197}{4096}e^{10} + \frac{584039}{16777216}e^{12}$	$c_{f4} = \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \frac{6759}{4096}n^6$
$c_{f6} = \frac{151}{6144}e^6 + \frac{151}{4096}e^8 + \frac{5019}{131072}e^{10} + \frac{26965}{786432}e^{12}$	$c_{f6} = \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5$
$c_{f8} = \frac{1097}{131072}e^8 + \frac{1097}{65536}e^{10} + \frac{225797}{10485760}e^{12}$	$c_{f8} = \frac{1097}{512}n^4 - \frac{15543}{2560}n^6$
$c_{f10} = \frac{8011}{2621440}e^{10} + \frac{8011}{1048576}e^{12}$	$c_{f10} = \frac{8011}{2560}n^5$
$c_{f12} = \frac{293393}{251658240}e^{12}$	$c_{10} = \frac{293393}{61440}n^6$

Table A4-1. *d* coefficient table
表 A4-1. *d* 系数表

以参数 <i>e</i> 表达的系数 <i>d</i>	以参数 <i>n</i> 表达的系数 <i>d</i>
$\psi = \varphi + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)$	$\psi = \varphi + \sum_{j=1}^m d_{2j} \cdot \sin(2j \cdot \varphi)$
$d_2 = \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{48}e^4 + \frac{7}{3072}e^6 - \frac{83}{92160}e^8 - \frac{189}{163840}e^{10} - \frac{287563}{309657600}e^{12}$	$d_2 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 - \frac{127}{288}n^5 + \frac{7891}{37800}n^6$
$d_4 = \frac{13}{768}e^4 + \frac{29}{3840}e^6 + \frac{833}{368640}e^8 + \frac{143}{430080}e^{10} - \frac{237103}{1132462080}e^{12}$	$d_4 = \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 + \frac{281}{630}n^5 - \frac{1983433}{1935360}n^6$
$d_6 = \frac{61}{15360}e^6 + \frac{221}{71680}e^8 + \frac{41317}{27525120}e^{10} + \frac{767017}{1486356480}e^{12}$	$d_6 = \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 + \frac{15061}{26880}n^5 + \frac{167603}{181440}n^6$
$d_8 = \frac{49561}{41287680}e^8 + \frac{28081}{20643840}e^{10} + \frac{27404441}{29727129600}e^{12}$	$d_8 = \frac{49561}{161280}n^4 - \frac{179}{168}n^5 + \frac{6601661}{7257600}n^6$
$d_{10} = \frac{34729}{82575360}e^{10} + \frac{1479011}{2335703040}e^{12}$	$d_{10} = \frac{34729}{80640}n^5 - \frac{3418889}{1995840}n^6$
$d_{12} = \frac{212378941}{1307993702400}e^{12}$	$d_{12} = \frac{212378941}{319334400}n^6$

Table A4-2. *d_f* coefficient table
表 A4-2. *d_f* 系数表

以参数 <i>e</i> 表达的系数 <i>d_f</i>	以参数 <i>n</i> 表达的系数 <i>d_f</i>
$\varphi = \psi + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi)$	$\varphi = \psi + \sum_{j=1}^m d_{f2j} \cdot \sin(2j \cdot \psi)$
$d_{f2} = -\frac{1}{8}e^2 - \frac{1}{48}e^4 - \frac{7}{2048}e^6 + \frac{17}{184320}e^8 + \frac{17837}{23592960}e^{10} + \frac{3809467}{4954521600}e^{12}$	$d_{f2} = -\frac{1}{2}n + \frac{2}{3}n^2 - \frac{37}{96}n^3 + \frac{1}{360}n^4 + \frac{81}{512}n^5 - \frac{96199}{604800}n^6$
$d_{f4} = -\frac{1}{768}e^4 - \frac{3}{1280}e^6 - \frac{559}{368640}e^8 - \frac{1021}{1290240}e^{10} - \frac{1168949}{3170893824}e^{12}$	$d_{f4} = -\frac{1}{48}n^2 - \frac{1}{15}n^3 + \frac{437}{1440}n^4 - \frac{46}{105}n^5 + \frac{1118711}{3870720}n^6$
$d_{f6} = -\frac{17}{30720}e^6 - \frac{283}{430080}e^8 - \frac{7489}{13762560}e^{10} - \frac{56341}{148635648}e^{12}$	$d_{f6} = -\frac{17}{480}n^3 + \frac{37}{840}n^4 + \frac{209}{4480}n^5 - \frac{5569}{90720}n^6$
$d_{f8} = -\frac{4397}{41287680}e^8 - \frac{1319}{6881280}e^{10} - \frac{6291809}{29727129600}e^{12}$	$d_{f8} = -\frac{4397}{161280}n^4 + \frac{11}{504}n^5 + \frac{830251}{7257600}n^6$
$d_{f10} = -\frac{4583}{165150720}e^{10} - \frac{2050891}{32699842560}e^{12}$	$d_{f10} = -\frac{4583}{161280}n^5 + \frac{108847}{3991680}n^6$
$d_{f12} = -\frac{20648693}{2615987404800}e^{12}$	$d_{f12} = -\frac{20648693}{638668800}n^6$