

点线面地图符号的拓扑结构及地图状态变异阐释

钟业勋^{1,2,3*}, 胡宝清^{1,2#}, 杜清运⁴, 王林峰^{1,2}

¹南宁师范大学北部湾环境演变与资源利用省部共建教育部重点实验室, 广西 南宁

²南宁师范大学广西地表过程与智能模拟重点实验室, 广西 南宁

³广西自然资源职业技术学院, 广西 南宁

⁴武汉大学资源与环境科学学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2026年9月13日; 录用日期: 2026年10月6日; 发布日期: 2026年10月13日

摘 要

定位点集为零维、1维和2维是点、线、面地图符号的本质差异。从映射(函数)、拓扑变换(同胚)、拓扑空间、连续映射、约当曲线、分离并等的定义出发, 阐释地物演化的数学基础。基于图形和背景互为补集的经验事实, 推出了地图的表达通式。论证了点线符号集和面状符号集的分并拓扑结构。基于自然原因和人类活动的地物演化普遍存在, 由人类意识行为引发的地物演化是演化的主因。地物演化使制图区域发生初始状态 X 不同于此后的目标状态 Y 的状态变异。设 X 和 Y 为拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, 因 f 在 X 上的每一点连续, 所以应用拓扑映射, 包括地物扩大或缩小的量变, 地物消亡或新生的质变等, 可以表达状态变异。用数学变换证明了 X 与 Y 状态不同的必然性。实例表明, 对地物赋值后, 经过有限的布尔代数运算, 必能实现从初始状态 X 到目标状态 Y 的变换。实例是地图状态变异的数学模型。

关键词

地物演化, 地图符号, 拓扑空间, 映射, 拓扑变换, 状态变异, 阐释

Topologic Structure of Point, Line, Area Cartographic Symbols and Explanation of Cartographic State Variation

Yexun Zhong^{1,2,3*}, Baoqing Hu^{1,2#}, Qingyun Du⁴, Linfeng Wang^{1,2}

¹Key Laboratory of Environment Evolution and Resource Utilization of the Bay Co-Construction by the Ministry and the Department of Education, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

²Key Laboratory of Surface Processes and Intelligent Simulation of Guangxi, Nanning Normal University,

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用: 钟业勋, 胡宝清, 杜清运, 王林峰. 点线面地图符号的拓扑结构及地图状态变异阐释[J]. 测绘科学技术, 2026, 14(4): 295-306. DOI: 10.12677/gst.2026.144030

Nanning Guangxi

³Guangxi Vocational College of Natural Resources, Nanning Guangxi⁴School of Resource and Environment Sciences, Wuhan University, Wuhan Hubei

Received: September 13, 2026; accepted: October 6, 2026; published: October 13, 2026

Abstract

Location point sets for 0-dimensional points, 1-dimensional lines and 2-dimensional areas constitute the essential difference among point, line and area map symbols. Starting from the definitions of mapping (function), topological transformation (homeomorphism), topologic space, continuous mapping, Jordan curve, disjoint union of sets, etc., this paper explains the mathematical foundation of geo-object evolution. The general formula for map representation is derived based on the empirical fact that figure and background are mutually complementary. The topological structure of the disjoint union of point-line symbol sets and area symbol sets is demonstrated. Geo-object evolution driven by natural factors and human conscious activities exists universally. Geo-object evolution triggered by human conscious behavior is the primary cause. Such evolution can produce state variation: the initial state X differs from the subsequent target state Y . Let X and Y be topological spaces, $f: X \rightarrow Y$, Since f is continuous at every point on X , topological mapping can be used to express state variation, including qualitative changes such as expansion and contraction, and qualitative changes such as disappearance and emergence. Mathematical transformation proves the inevitability that the initial state X differs from the target state Y . Examples show that after assigning values to geo-objects. The transformation from initial state X to target state Y can certainly be realized through finite Boolean algebraic operations. These examples are mathematical models of map state variation.

Keywords

Evolution of Geo-Object, Map Symbol, Topologic Space, Mapping, Topologic Transformation, State Valuation, Explanation

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Open Access

1. 引言

地图是制图区域的符号模型。不同比例尺的地图，都有确定的地图符号系统，也就是说，地图符号总是为确定比例尺(系列)的地图量身定做的。地图符号生成经由制图物体从三维空间 X 到地球椭球面 S 的映射，从椭球面 S 到制图者认知结构 Y 的映射再到二维地图平面 Z 的映射的三重拓扑映射原理，即制图物体与地图符号同胚的性质，使地图具有准确传输地理信息的强大功能[1][2]。地图符号与其指代对象的任何对应性缺失，也是产生错误地图符号的根源[3][4]。空间认知是人的一种本能和需要，特别是对于生存发展关系密切的地理世界的认知。地图是人的作品，必定也反映一个时代的认知水平。例如，创立地球球形学说的希腊学者托勒玫(C. Ptolemy, 约 90~168)修订和绘制的世界地图，表示了欧洲、亚洲、非洲和太平洋、印度洋、大西洋三大洋。现在的小学生都会发现这世界地图的严重错误：没有南北美洲、没有大洋洲、没有南极洲，也没有北冰洋。这不是遗忘，这是二千多年前人们的认知水平的地图表达。

长期以来,封闭的印度洋一直以为是正确的观念,直到1459年意大利毛罗(F. Mauro, ?~1460)绘制成的世界地图,才首次表明印度洋是向南开口的。1728年,丹麦人白令(V. J. Bering, 1681~1741)航行白令海峡,证实亚洲和北美洲是分离的而名垂史册。这些重大的历史事件说明,正确的地理认知也在历史进程中不断被修正过。从地图是人们的时代烙印的角度看,这曾经的错误倒是真实的历史反映[5]。地图能使人扩大视野,开阔眼界,增长地理知识。地图既能为我们了解巨大的地理实体(如大洲、大洋、海底地貌)的空间关系[6],也有追溯历史的功能。如历史地图《郑和航海图》再现了郑和七下西洋的航迹;1973年12月湖南长沙马王堆出土的绘在帛上的三幅地图,地形图的主支流的水道、主支流交汇点、主区地物、地貌能达到或接近今测地形图的精度;水系的表示与现代地形图基本相似,具有明确的符号分级系统,等。这有力地说明,2200多年前的西汉初期,我国的制图技术达到了很高的水平[7]。板块运动和海底扩张理论,是地质构造,大陆漂移及火山地震等的成因,但其运动速度极为缓慢,现代空间大地测量成果表明,板块之间每年有厘米级的移动速度。板块运动和海底扩张,每年生成约2 km²的洋底,也有大约2 km²的地球表面被消灭或被压缩。我国雅鲁藏布江一带,存在着聚汇型边界,至使西藏南北之间的距离也在不断缩短。从唐玄奘到印度取经的唐代至今,我国西部地区与印度的水平距离大约缩短了数十米[8]。这都表明,所有事物,变是绝对的,不变是相对的和暂时的。地图既是人类认识世界的中介和工具,也是人类改变世界的成果,也是包含着丰厚科学文化知识的非物质文化遗产宝库。地图这些得天独厚的优势,使其被誉为“改变世界的十大地理思想之一[9][10]”,在各个领域备受青睐和广泛应用。

地表形态又称地形或地貌,各种不同规模和形态各异的地貌,是在不同的地球内外营力作用下形成的。内营力在地表形成大陆与海洋、构造山系与盆地等地貌骨架,总趋势是增加地表起伏。而外营力的作用则对地貌进行风化、剥蚀、侵蚀,并把破坏了的物质搬运到低处堆积。所以地貌是内外营力交互作用的外在表现。火山、地震、泥石流等地质灾害,本质上是内营力经积累后突然爆发的结果[11]。基于自然原因的地物演化虽有地质条件和地理环境条件制约,但其引发的地物演化不容忽视。根据2017年国土资源部召开的全国汛期地质灾害防治工作会议,我国已查明的地质灾害隐患点28.2万处,威胁人员1782万,威胁财产1000多亿元。各类地质灾害中,危害最大的是地震灾害、崩塌、滑坡、泥石流灾害和土地退化灾害。抽水引起的地面沉降已在平原区的46个城市发生,总的沉降面积近5万 km²。基于自然原因引发的自然灾害,必然使相关区域的地质地貌发生不同程度的变化[12]。

目的性是人类行为的本质特征。目的性体现为主体意图。主体意图是未来实践过程及结果在其过程之初就已存在于主体之内的超前表象,本质上是一种创造世界的意识[13]。主体意图之所以是一种创造世界的意识,是因为它总是为改变某一现存的不理想的、有碍地区经济发展的空间格局制定的。这种旨在改变现状的规划蓝图,本质上是物质空间到非物质主体认知空间的拓扑映射,是思维中的创新构想和理念[14]。如我国云、贵、川、藏、桂,缺少一个便捷出海口成为千年缺陷。而平陆运河的规划和建设,就是为了解决这一有碍经济发展格局的主体意图。平陆运河从2022年8月开挖,今年9月16日正式通航。如今,这条“通江达海”的运河,使西南各省(区)和广西出海,缩短航程560千米,其经济效益和发展宏利极为可观。我国类似平陆运河、南水北调、“三北”防护林等不同领域、不同规模、基于不同目的的规划、设计、路线图,都是具有创造世界意识的主体意图。显然,每一规划和设计实施和完成之日,便是主体意图物化之时。任何计划工程完工之时,被该工程无缝覆盖的各类地物便在现实世界中消失,代之以新的地物和新的空间结构。这一生一灭导致制图区域的状态变异显而易见。基于改造自然目的的人类实践活动引发的地物演化,是区域状态变异的主要原因。

科学是理论形态的技术,而技术则是实践形态的科学[15]。人作为认识主体,在认识和把握客体的同时,总会精明地利用物质的各种属性,制造各种精密的仪器和工具,使其对客体的认知能力加倍增强。当代测绘科学技术正向科技含量更高的地理空间信息科学演变。如今,现代空间定位技术、遥感技术、

地理信息技术、计算机技术、通信技术和网络技术的发展,使人们能快速、实时和连续不断地获取有关地球空间环境的海量的几何物理信息,从而使瞬息万变的地理空间信息为人掌控和利用,为地图数据库的快速更新奠定了物质基础[16]。我国自2012年起,国家正式建立了1:5万基础地理信息数据库动态更新机制,更新周期缩短为一年,主要更新交通、居民地、地名、管线等变化频繁的重点要素。该更新由自然资源部(原国家测绘地理信息局)统筹组织。各省测绘部门每年开展外业调绘与内业编辑,成果汇交国家基础地理信息中心。主要是基于高分辨率遥感影像和专业资料对变化要素进行增量更新。通过年度更新使现势性保持在一年以内。我国自主建设,独立运行并与世界其它卫星导航系统兼容共用的北斗系统一经亮相便技压群雄。北斗系统可在全球范围内全天候全天时为各类用户提供高精度,高可靠性的定位、导航、授时服务。如今,中国90%和全球50%手机支持北斗信号。早在2005年底,中国联通和中国移动、高德等公司及百度地图、天地图网站都推出了各自的车载和手机地图。互联网地图以其远程地理信息快捷传输、适时动态更新、人机交互等优势而备受关注;其中天地图网还提供了1:25万公众版地图数据、导航电子地图数据、15 m分辨率卫星遥感影像等[17]。这都表明,我国在地理空间信息科学取得了举世瞩目的成就。一切知识只是凭借其形式而成为知识,知识通过它的形式来陈述所知的实况。当形式定量地把握关系时,形式就是数学的。数学形式是定量化的逻辑形式[18]。由于在数理逻辑上阐释状态变异机理方面鲜有文献论述,而这问题在地图学理论研究中又很重要,有鉴于此,笔者作一探讨尝试,以抛砖引玉。

2. 点、线、面地图符号

2.1. 点、线、面地图符号分类体系的完备性

点、线、面地图符号分类体系的完备性主要体现在满足概念分类的三个基本原则[19],即

1) 分类的维度:有零维的点状地图符号集 A_0 ,一维的线状地图符号集 A_1 ,和二维的面状地图符号集 A_2 ,这三类地图符号,实现了对地图的无缝全覆盖。即满足:

$$\forall a_i \in X, \exists a_i \in A_k \mid k=0,1,2 \Rightarrow a_i \notin A_k^c \quad (1)$$

2) 互斥性:每个地图符号只能归入某一类,不能同时属于两类或三类。即满足:

$$\forall a_i \in X, \neg (a_i \in A_0 \wedge a_i \in A_1) \vee (a_i \in A_0 \wedge a_i \in A_2) \quad (2)$$

3) 穷尽性:每个地图符号必须归入某一类,即满足:

$$\forall a_i \in X, \neg a_i \notin \{A_0, A_1, A_2 \mid A_0, A_1, A_2 \subset X\} \quad (3)$$

2.2. 点、线、面地图符号的定义

地图符号包含着定位点集 D 和表意点集 B ,根据这两类功能各异的点集在地图符号 a_i 内的构成情况,可对点状、线状和面状地图符号进行定义[20][21]。

(定义1) 点状地图符号 存在地图符号 a_i ,如果定位点集 D 和表意点集 B 满足:

$$D = p_0 \Rightarrow p_0^c \Leftrightarrow B, \text{ s.t. } a_i = p_0 \cup p_0^c \mid p_0 \text{ 为 } 0 \text{ 维点} \quad (4)$$

则称 a_i 为点状地图符号,记作 a_{i0} 。

如三角点、水准点、宝塔、庙宇等,都属点状地图符号。不同的点状地图符号,图式规定了定位点的确定方法,如三角点、水准点的定位点在符号的中心,而如宝塔、庙宇等则以符号下方横线的中心定位,等。

(定义2) 线状地图符号 存在地图符号 a_i ,如果定位点集 D 和表意点集 B 满足:

$$D = p_1 \Rightarrow p_1^c \Leftrightarrow B \quad \text{s.t.} \quad a_i = p_1 \cup p_1^c \mid p_1 \text{ 为 1 维线段} \quad (5)$$

则称 a_i 为线状地图符号, 记作 a_{i1} 。

(定义 3) 面状地图符号 存在地图符号 a_i , 如果定位点集 D 和表意点集 B 满足:

$$D = B \cong a_i \Rightarrow a_i = a_{i2} \quad (6)$$

则称 a_{i2} 为面状地图符号。

2.3. 点、线、面地图符号与不依比例符号、半依比例符号和依比例符号的比较

点线面地图符号的分类和按比例特征的分类, 有诸多相同点。如点状地图符号和不依比例符号, 前者强调以零维点定位的特点, 后者则突显表意点集的非比例性质, 但应用上都用于点状地物的表示; 线状地图符号主要强调以一维定位线定位的特点, 而半依比例符号则突显其延伸方向依比例而两侧不依比例夸大表示的特征。因符号只有延伸方向能依比例表示, 故“半依比例”形象地概括了符号的比例尺特征。在应用上, 两者都用于表示如公路、铁路等线状地物。面状地图符号, 由于其作为图形显示背景, 虽然在地图表示中似乎是辅助角色, 但从其占有面积上却远大于点线符号占有面积的总和。因面状符号一般可按比例表示, 所以称为依比例符号。但事实上, 作为图形构成主体的点、线符号, 因其非比例的表意功能点集的夸大, 必然侵占了面状符号应有的面积, 所以“依比例符号”也是面积有所缩水的“依比例”, 并非真正意义上的依比例。而且, 点、线地图符号的夸大程度随着比例尺的缩小而递增, 所以面状地图符号表示面积的“缩水”也愈大。这是地图表示的普遍规律[22]。例如, 1:5 万地图上, 埋石点符号 $\square$ 的边长 1.2 mm, 换算成实地的边长是 60 m, 符号对应的实地面积便是 3600 m²。从零维点是维度体系的逻辑起点, 其核心内涵是无大小、无部分, 仅表示位置的纯粹抽象概念看, 符号实则被无限放大了。再说 1:5 万图上的线状符号, 如铁路符号, 宽度 0.6 mm, 换算为实地宽度便是 30 m, 我国单线铁路的标准轨距是 1.435 m, 实际上轨距被放大了近 21 倍。因为该图式为 1:2.5 万, 1:5 万和 1:10 万图共用, 在 1:10 万图上符号的放大倍数更大[23]。

2.4. 点、线、面地图符在地图表示中互为补集关系及地图表达通式

由点状、线状和面状地图符号构成线划地图 X , 是显示在拓扑空间 $\mathbb{R}^2$ 上的, 即 $X \subset \mathbb{R}^2$ 。由于 $\mathbb{R}^2$ 是连通空间, 在 X 上所有的点只能归属于由点状、线状和面状地图符号中的某一种, 这三种地图符号对 X 的严密无缝覆盖, 实际上就是构成图形背景的面状符号集 S_{i2} 与面状符号集 S_{i2} 的补集 S_{i2}^c 的并集, 即

$$X = S_{i2} \cup S_{i2}^c \mid S_{i2}^c = X - S_{i2} \quad (7)$$

(7)式是所有由点状、线状和面状地图符号构成的线划地图 X 的表达通式。

3. 拓扑空间

3.1. 拓扑空间的定义

(定义 4) 拓扑空间 设 X 是非空集合, $\mathfrak{S}$ 是 X 的子集族, 如果满足:

- 1) $\emptyset, X \in \mathfrak{S}$;
- 2) 若 $A, B \in \mathfrak{S}$, 则 $A \cap B \in \mathfrak{S}$;
- 3) 对的任意子族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T} \subset \mathfrak{S}$, 有 $\bigcup_{\alpha \in T} A_\alpha \in \mathfrak{S}$,

则称 $\mathfrak{S}$ 是 X 上的拓扑。如果 X 上有一个拓扑, 则称 X 为拓扑空间。 $\mathfrak{S}$ 中的成员均称为开集。

(定义 5) 映射(函数) 设 f 是从 X 到 Y 的关系, 即 $f \subset X \times Y$ 。如果 $\forall x \in X$, 存在唯一的 $y \in Y$ 使 $(x, y) \in f$, 则称 f 是从 X 到 Y 的映射(函数), 记作 $f: X \rightarrow Y$, 而称 X 是 f 的定义域。

若 $(x, y) \in f$, 则用 $y = f(x)$ 表示, 并称 y 是 x 在 f 下的像或值。

若 $X = Y$, 则称 X 到 X 的函数为 X 上的函数。若 f 是 X 到 Y 的函数, $x \in X$, $y \in Y$, 则 x 在 f 下的像是唯一的, 即 $f(x)$ 。但是, y 在 f 下的原像可以有多个, 也可以没有[24]。

在大比例尺地图到小比例尺地图的变换中, 大比例尺地图上具有多重性质的地物, 如具有多种地类性质综合体的城镇在小比例尺地图上只用表示城镇等级的圆圈符号表示就是最常见的事例。 y 在 f 下可以有多个的原像的性质为此提供了数学基础。 y 在 f 下可以没有原像的性质为在地图上“无中生有”的地物新生提供了支撑。

(定义 6) 同胚映射 设 X, Y 是拓扑空间, 如果存在连续双射 $f: X \rightarrow Y$ 且逆映射 $f^{-1}: Y \rightarrow X$ 也连续, 则称 f 是同胚映射。如果拓扑空间 X 与 Y 之间存在一个同胚映射, 则称 X 与 Y 同胚, 记作 $X \cong Y$ 。

普通连续函数仅要求近邻点映射后仍近邻, 允许折叠、压缩, 但不保证可逆或逆连续。拓扑变换本质上是一种特殊的函数(映射), 即同胚映射, 它是保持拓扑结构不变的双射连续函数。

3.2. 平庸拓扑、离散拓扑

设 X 是非空集, 则集族 $\{\emptyset, X\}$ 称为平庸拓扑; 集族 2^X 中开集个数最多, 且 X 的每个单点集都是开集, 故称 2^X 为离散拓扑。对 X 上的任意一个拓扑 $\mathfrak{T}$, 都有

$$\{\emptyset, X\} \subset \mathfrak{T} \subset 2^X \quad (8)$$

(定理 1) 设 X 和 Y 是拓扑空间, $f: X \rightarrow Y$, 则 f 是连续映射, f 在 X 上的每一点连续。

从平庸拓扑空间 X 到任意平庸拓扑空间 Y 的映射都是连续映射。从离散拓扑空间 X 到任意拓扑空间 Y 的映射都是连续映射。

根据(定理 1), $\forall x \in X$, 因 f 在 X 上每一点连续, 必然存在 $f(x) = y \in Y$ 。

(定理 2) 设 X 是拓扑空间, 则 X 是连通空间。

(定理 3) n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 及 I^n (I 为 $\mathbb{R}$ 的区间)都是连通空间[25]。

这几个定理为任意 $x \in X$ 映射为 $f(x) = y \in Y$ 提供了数学基础。

3.3. 约当曲线定理

(定理 4) 约当曲线定理(Jordan curve theorem) 设 J 是二维平面 $\mathbb{R}^2$ 上的点集, 它是圆周的同胚像(称为约当闭曲线), 则 $(\mathbb{R}^2 - J)$ 必由两个连通分支组成, 以 J 作为它们的公共边界[26]。

3.4. 集合论中的开集、闭集、内部、外部、边界的概念

设 $X \subset \mathbb{R}^2$, A 是拓扑空间 X 的子集。 A 的边界为 $b(A)$, 则边界把面状符号分为互相隔离的两部分: 边界 $b(A)$ 的内部和外部。不包含边界 $b(A)$ 的内部记为 A° , 外部记为 A^e , A° 和 A^e 都是开集, 而边界 $b(A)$ 则属于闭集, $b(A) = A^\circ \cap A^e$ 。可以看出, 边界 $b(A)$ 的形状和大小与 A° 和 A^e 相关, 或者说, $b(A)$ 是 A° 到 X 上的函数, 或者说, $b(A)$ 是 A^e 到 X 上的函数。

3.5. 点线面地图的分离并结构

(定义 7) 分离并 设 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是任意的一个集合族, 如果

$$(\alpha, \alpha') \in I^2 \wedge \alpha \neq \alpha' \Rightarrow A_\alpha \cap A_{\alpha'} = \emptyset \quad (9)$$

则集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 叫做分离的。如果集合族 $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 是分离的, 那么并集 $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ 叫做这一族集合的分离并[27], 记作 $\coprod_{\alpha \in I} A_\alpha$ 。

地图的点状符号集 $D_{i0} = \{a_{i0}\}$ 和线状符号集 $L_{i1} = \{a_{i1}\}$ ，构成图形，即 $D_{i0} \cup L_{i1}$ 构成图形。而面状符号集 $S_{i2} = \{a_{i2}\}$ 则构成图形的显示背景。图形与背景的对立统一，是地图结构的普遍规律。

由于地图的显示背景，是由一块块大小不一，形状各异且被具有闭集性质的边界分隔开来，所以面状符号集满足分离并的定义，即

$$S_{i2} = \coprod_{\alpha \in I} A_{\alpha} \mid A_{\alpha} = a_{i2} \quad (10)$$

在各种比例尺的地图符号系统中，都有专门为表示点状地物，如三角点、水准点、庙宇、宝塔等独立地物的点状符号，彼此独立的点状符号的现实存在，说明构成图形的点线符号集也具有分离并结构。由于图形与背景互为补集，所以

$$S_{i2}^c = \coprod_{\alpha \in I} A_{\alpha} \mid A_{\alpha} = a_{i0} \vee A_{\alpha} = a_{i1} \quad (11)$$

3.6. 从拓扑映射角度推出地图点线面符号必为分离并结构

(定理 5) 实直线 $\mathbb{R}$ 的每个开集都是一族开区间的分离并。

由于 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ，所以 $\mathbb{R}^2$ 与 $\mathbb{R}$ 是具有连续统的势的拓扑空间， $\mathbb{R}$ 的每个开集的分离并到 $\mathbb{R}^2$ 的拓扑映射必然也是分离并。表达面状符号的(10)式及表达点线符号集的(11)式，正是拓扑映射的必然结果。(10)式和(11)式为背景和图形的精细拓扑结构。

4. 地图符号系统的布尔代数结构

4.1. 包含关系及其性质

(定义 8) 包含关系 设 A 、 B 是 X 中的两个子集。若 $x \in A$ 必有 $x \in B$ ，则称 B 包含 A ，记作 $A \subset B$ 。包含关系具有下列性质：

- 1) $A \subset A$ (自反性)
- 2) 若 $A \subset B$ ， $B \subset A$ ，则 $A = B$ ，(对称性)
- 3) 若 $A \subset B$ ， $B \subset C$ ，则 $A \subset C$ (传递性)

(定义 9) 幂集 设 X 是论域，记

$$P(X) = \{A; A \subset X\} \quad (12)$$

则称 $P(X)$ 为 X 的幂集，约定 $\emptyset$ 、 $X \in P(X)$ 。如果 X 中有 n 个元素，则 $P(X)$ 中就有 2^n 个元素。任何非空集 X ， $(P(X), \cup, \cap, c, \emptyset, X)$ 是布尔代数，即集合代数构成布尔代数[28]。

4.2. 地物量变的主要形式

(定义 10) 地物的缩放变换

$\forall a_i \in A \vee a_i \in A^c$ ，存在 $f: X \rightarrow Y$ ，若映射 $f(a_i)$ 满足：

$$f(a_i) = a_j \Rightarrow (a_j - a_i) = k \mid a_i \in X, a_j \in Y$$

- 1) $k > 0 \Rightarrow a_j > a_i \Leftrightarrow$ 放大变换，称 a_j 为 a_i 的放大或扩张；
- 2) $k = 0 \Rightarrow a_j = a_i \Leftrightarrow$ 等大变换，称 a_j 与 a_i 大小不变；
- 3) $k < 0 \Rightarrow a_j < a_i \Leftrightarrow$ 缩小变换，称 a_j 为 a_i 的缩小。

4.3. 地物质变的主要形式及新生地物对消亡地物的无缝覆盖

(定义 11) 消亡地物与新生地物 设地物 a_i 的边界为 $b(a_i)$ ，如果

$$f(a_i) = a_j \Rightarrow b(a_i) \cong b(a_j) \text{ s.t. } a_i = \emptyset \wedge a_j \neq \emptyset \quad (13)$$

则称 a_i 为消亡地物, 而 a_j 为新生地物。任何新生地物总与其覆盖的消亡地物拥有同一的边界。消亡地物与新生地物的同时性和性质相异必有:

$$\exists a_i = \emptyset \in X \wedge a_j \neq \emptyset \in Y \Rightarrow i \in I_i \in X \wedge j \in J_j \in Y \Rightarrow I_i \neq J_j \quad (14)$$

(14)式是地物的消亡与新生必然导致地类增减和地类变更的数学表达。

由于工程建设是在时间中展开, 所以由此引发的地物演化具有必然性、历时性和渐变性。

4.4. 地物移位

(定义 12) 地物的移位 若定位点 $p_1 \in a_i \wedge p_2 \notin a_i$, 如果

$$f(a_i) = a_j \Rightarrow p_2 \in a_j \wedge a_i \cong a_j \quad (15)$$

则称地物 a_i 从 p_1 点移位到了 p_2 点。

地物移位主要是局部改变地物的空间结构, 在状态变异中处于次要的影响。

4.5. 地物演化与制图综合问题的关联与区别

自从 1921 年由 Eckert 首次提出制图综合概念后, 制图综合一直是各国地图学家重点研究的课题。制图综合在许多地图学教科书和专著中, 总占有不少篇幅。计算机制图进入地图学领域后, 制图综合自动化又成了热门研究。我国学者从制图综合知识的分类与获取、制图综合算子与算法、制图综合的质量评价、制图综合的过程建模与控制等问题进行了论述[29]。笔者认为, 前者是讨论符号乃至整幅图的状态变异问题, 后者则为如何修改符号使之更能反映和表达地物, 提高地图的质量。两者相辅相成。

4.6. 地物消长扩缩遵循代数和恒为零的规律

地物的变换与其包含或不包含具有变量性质的点集 k 有关, 并且遵循下列规则:

$$\forall (\pm k) \in a_i \in X \Rightarrow f(\pm k) = \mp k \in a_j \in Y \Rightarrow \pm k + (\mp k) = 0 \quad (16)$$

由于变量在 X 和 Y 上始终是大小相等方向相反, 故代数和恒为零。(16)式是地物消长代数和恒为零的规律的数学表达[30]。

4.7. 制图区域的初始状态 X 与确定的目标状态 Y 必然存在差异的数学证明

$\forall \exists a_i \in X \Rightarrow \exists f(a_i) = a_j \in Y$, 地物的扩缩变换, 消亡与新生等变换都获得 $a_i \in X \wedge f(a_i) = a_j \in Y$ 的结果, $a_j \neq a_i \Rightarrow X \neq Y$ 。若以 $f_n(a_i) | i \in I$ 表示地物进行的变换是第 n 次, 由于每次变换都在不同程度上产生 $a_j \neq a_i | j \in J \in Y, i \in I \in X$ 结果。随着变换次数的增加和参与变换的地物的增多, $I \neq J, X \neq Y$ 的状态差异就与日俱增。这种状态差异主要表现为地类变更和结构变异的形式。这就是地物演化致使制图区域状态变异的数理逻辑。

5. 算例

根据广西南部某城市附近 2010 年和 2020 年两个年度的土地利用矢量数据, 制作了图 1 (X)和图 2 (Y)。试用函数(映射)理论解释地类从 X 到 Y 的变换过程。

解: 1) 数学基础

n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 是拓扑空间, 所以欧氏平面 $\mathbb{R}^2$ 是拓扑空间。显然, $\mathbb{R}^2 \supset X, Y$ 。拓扑空间之间存在映射 $f: X \rightarrow Y$ 。由于拓扑空间为连通空间, f 在 X 上每一点连续, 这性质是在每一上存在映射的数学基础。即:

$$\forall x \in X, \exists f, \text{ s.t. } f(x) = y \in Y \quad (17)$$

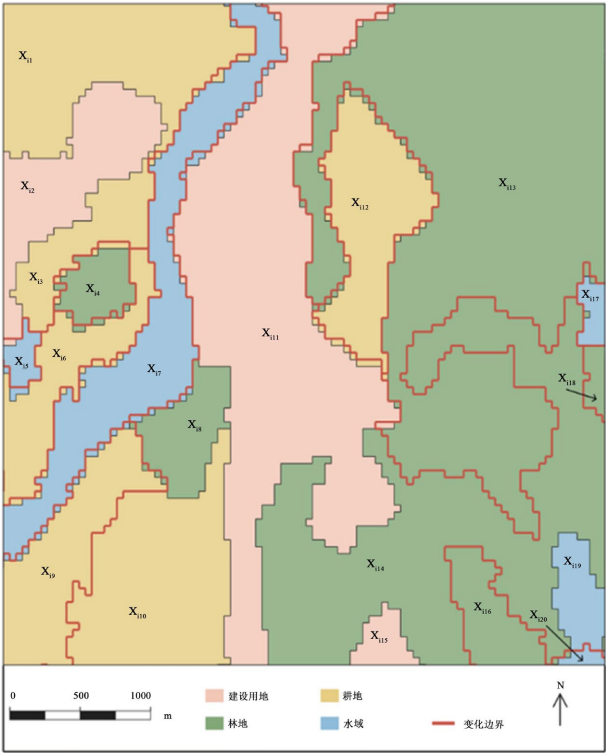


Figure 1. Land use condition X of M in 2010 year
图 1. M 地 2010 年的土地利用状况 X

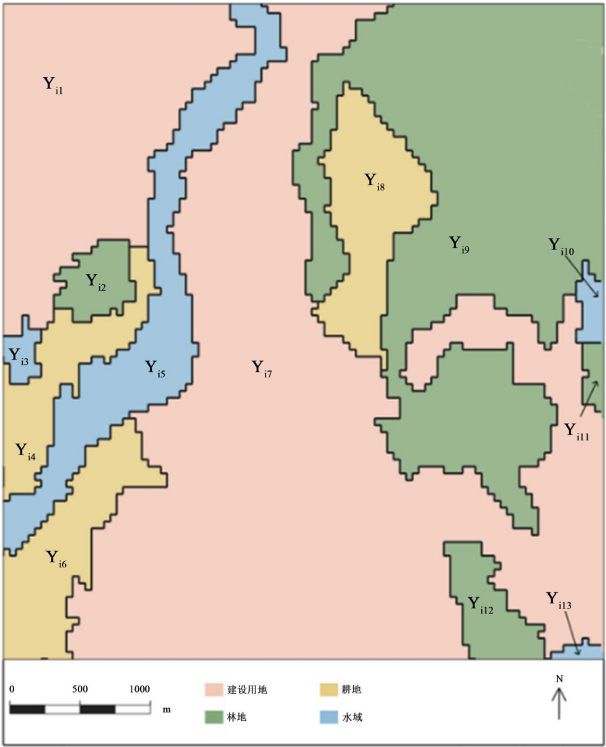


Figure 2. Land use condition Y of M in 2020 year
图 2. M 地 2020 年的土地利用状况 Y

2) 各地类在 X 的拓扑结构

a) 建设用地(红块)的分离并结构

$$X_a = \coprod (X_{i2}, X_{i15}, X_{i11}) \quad (18)$$

b) 耕地(黄块)的分离并结构

$$X_b = \coprod [X_{i1}, (X_{i3} \cup X_{i6}), (X_{i9} \cup X_{i10}), X_{i12}] \quad (19)$$

c) 林地(绿块)的分离并结构

$$X_c = \coprod [X_{i4}, X_{i8}, (X_{i13} \cup X_{i14} \cup X_{i15} \cup X_{i16})] \quad (20)$$

d) 水域(蓝块)的分离并结构

$$X_d = \coprod [X_{i5}, X_{i7}, X_{i17}, (X_{i19} \cup X_{i20})] \quad (21)$$

3) 各地类从 X 到 Y 的变换

a) 建设用地变换

$$f(X_a) = (X_{i1} \cup X_{i2} \cup X_{i3}) \coprod (X_{i8} \cup X_{i10} \cup X_{i11} \cup X_{i14} \cup X_{i15} \cup X_{i19}) = (Y_{i1} \coprod Y_{i7}) = Y_a \in Y \quad (22)$$

b) 耕地变换

$$f(X_b) = \coprod (X_{i6}, X_{i9}, X_{i12}) = \coprod (Y_{i4}, Y_{i6}, Y_{i8}) = Y_b \in Y \quad (23)$$

c) 林地变换

$$f(X_c) = \coprod (X_{i4}, X_{i13}, X_{i16}, X_{i18}) = \coprod (Y_{i2}, Y_{i9}, Y_{i11}, Y_{i12}) = Y_c \in Y \quad (24)$$

d) 水域变换

$$f(X_d) = \coprod (X_{i5}, X_{i7}, X_{i17}, X_{i20}) = \coprod (Y_{i3}, Y_{i5}, Y_{i10}, Y_{i13}) = Y_d \in Y \quad (25)$$

由于 X 和 Y 都是连通集, 所以又有:

$$X = X_a \cup X_b \cup X_c \cup X_d \quad (26)$$

$$Y = Y_a \cup Y_b \cup Y_c \cup Y_d \quad (27)$$

X 和 Y 的状态变异既是实物在时空中演化的物理现象, 可用拓扑变换的理论进行解释。本文提供的真实案例, 可为此类地物状态变异问题提供一种方法。

6. 结论

线划地图主要由点状、线状和面状地图符号构成, 这分类系统满足分类的维度、互斥性和穷尽性原则。对点状、线状和面状地图符号的定义进行了改进。对点状、线状和面状地图符号分类和按依比例关系分类系统的命名特点和应用作了比较。点、线、面地图符号在关系上点线符号构成图形, 而面状符号则构成背景, 图形和背景互为补集的关系是地图表达通式。在介绍拓扑空间、平庸拓、离散扑拓、映射(函数)、同胚映射、连续映射和分离并定义的基础上, 论述了点线面地图的图形和(点线符号集)图形和背景(面状符号集)的分离并结构。从实数空间到二维平面拓扑映射的角度论证了这两类符号为分离并结构的必然性。作为地球表层子集的制图区域, 由于受地球内外营力的作用, 地物具有演化的必然性。而人类为实现某种主体意图而制定的各种规划、设计等的实施, 规划、设计物化之时便是计划完成之日, 这时便是新生地物对消亡地物的全覆盖, 这类基于人类意识行为引发的地物演化是制图区域状态变异的主因。论证了地图符号系统的布尔代数结构。给出了地物的缩放(量变)、地物消亡与新生(质变)、地物移位

的数学定义；对新生地物对消亡地物的全覆盖、地物扩缩消长代数和恒为零的规律及地物演化必然导致状态变异给出了数学证明。用简明的实例阐释了任何初始状态 X 经地类赋值后，通过有限的布尔代数运算，必能实现到目标状态 Y 的变换。

基金项目

(1) 项目等级：面上项目；项目名称：北部湾陆海共轭带人地系统耦合机理及数据驱动的多尺度智能调控；项目编号：42571364。(2) 项目等级：广西创新驱动发展专项资金项目；项目名称：广西及泰国喀斯特区森林固碳-耗水效应权衡对比；项目编号：桂科 AA24263011-3。(3) 项目等级：广西科技重大专项；项目名称：平陆运河经济带“山水林田湖草沙”生命共同体绿色廊道土地多功能利用及优化关键技术研究；项目编号：桂科 AA23062039-2。(4) 项目等级：国家重点研发计划项目；项目名称：面向众源数据汇聚的时空数据基础平台关键技术研发；项目编号：2024YFB2505801。

参考文献

- [1] 钟业勋, 朱重光, 魏文展. 地图空间认知的数学原理[J]. 测绘科学, 2005(5): 11-12, 3.
- [2] 钟业勋, 胡宝清, 童新华, 等. 地图学概念的数学表述研究[M]. 北京: 科学出版社, 2015: 150.
- [3] 钟业勋, 胡宝清, 边少锋, 等. 地图审校和错误修改的定义及其应用[J]. 海洋测绘, 2015, 35(2): 26-28, 32.
- [4] 钟业勋, 胡宝清, 边少锋, 等. 地图审校与错误修改的数学定义及地图质量控制模型[J]. 桂林理工大学学报, 2015, 35(2): 343-347.
- [5] 葛能全, 编著. 科学技术发现发明纵览[M]. 北京: 科学出版社, 1986.
- [6] 高俊. 地图学寻迹[M]. 北京: 测绘出版社, 2012.
- [7] 喻沧, 廖克, 编著. 中国地图学史[M]. 北京: 测绘出版社, 2010.
- [8] 金性春, 编著. 漂移的大陆[M]. 第2版. 上海: 上海科学技术出版社, 2000.
- [9] 王家耀. 时空大数据时代的地图学[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1226-1237.
- [10] 郭仁忠, 应申. 论 ICT 时代的地图学复兴[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1274-1283.
- [11] 刘本培, 蔡运龙, 主编. 地球科学导论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [12] 张勤, 黄观文, 杨成生. 地质灾害监测预警中的精密空间对地观测技术[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1300-1307.
- [13] 钟业勋, 边少锋, 李松林, 等. 主体意图的表达, 变换及实现的数学模型[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2019, 36(4): 44-49.
- [14] 钟业勋, 金立新, 叶彤, 等. 基于物质空间到认知空间映射的思维创新阐释[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(3): 44-50.
- [15] 江涛, 著. 科学的价值合理性[M]. 上海: 复旦大学出版社, 1998.
- [16] 宁津生, 王正涛. 从测绘学向地理空间信息学演变历程[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1213-1218.
- [17] 廖克. 中国地图学发展的回顾与展望[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1517-1525.
- [18] 周昌忠, 著. 科学思维学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1988.
- [19] (瑞士)丹尼尔卡拉曼尼, 著. 基于布尔代数的比较法导论[M]. 蒋勤, 译. 上海: 格致出版社, 上海人民出版社, 2012: 51-52.
- [20] 钟业勋, 胡宝清. 数理地图学——地图学及其数学原理[M]. 第2版. 北京: 测绘出版社: 2017: 173-178.
- [21] 钟业勋, 胡宝清, 郑红波. 地图符号的基本结构和功能[J]. 桂林理工大学学报, 2011, 31(2): 229-232.
- [22] 钟业勋, 胡宝清. 地图符号蕴涵的几种拓扑变换类型[J]. 玉林师范学院学报, 2014, 35(5): 150-153.
- [23] 国家技术监督局发布. 中华人民共和国国家标准. 1:250,001:500,001:100,000 地形图图式[S]. 北京: 中国标准出版社, 1991: 4-13.
- [24] 章炯民, 陶增乐, 柳银萍, 等. 离散数学[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2009.
- [25] 程吉树, 陈水利, 编著. 点集拓扑学[M]. 北京: 科学出版社, 2008: 40-99.

- [26] 谷超豪, 主编. 数学词典[M]. 上海: 上海辞书出版社, 1992: 242.
- [27] 李孝传, 陈玉清. 一般拓扑学导引[M]. 北京: 高等教育出版社, 1982.
- [28] 张文修, 王国俊, 刘旺金, 等. 模糊数学引论[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991: 1, 40.
- [29] 武芳, 巩善勇, 杜佳成. 地图制图综合回顾与前景[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1645-1664.
- [30] 钟业勋, 胡宝清, 栾俊, 等. 基于地物消长零和律的地物演化机制[J]. 广西大学学报(自然科学版), 2021, 46(2): 509-516.