The Law of Sines and Cosines of the Orthocentric Tetrahedron with 4-State and Its Substitution Algorithm

—Application of Pythagorean Theorem of Four Dimensional Volume (Formula 6)

Guowei Cai

Shanghai Huimei property Co., Ltd., Shanghai, China
Email: yiersan@139.com

Received: Sep.14th, 2019, published: Sep.17th, 2019

Abstract

The Orthocentric Tetrahedron composed of orthogonal quadrature spherical center, using only quadrature spherical radius and spacing formula of Projective Sphere. Three sets of sine theorems and five sets of cosine theorems are proved. Sine theorem and cosine theorem of Angle between 2 planes; The law of sine and law of cosine isomorphic to spherical trigonometry are proved. The 4-state substitution algorithm of The Orthocentric Tetrahedron makes the calculation more intuitive and simple.

Keywords

Volume Pythagorean Theorem, Orthocentric Tetrahedron, Sinusoidal Theorem, Cosine Theorem, Cross Product, InnerProd, Law of Sines, Law of Cosines, Spherical Trigonom, Algorithm

垂心四面体4态的正弦余弦定律及其换元算法

——四维体积勾股定理的应用(公式六)

蔡国伟

上海汇美房产有限公司，上海，中国
Email: yiersan@139.com

收稿日期：2019年9月14日；发布日期：2019年9月17日

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

摘 要

正交**4**球心组成的垂心四面体，仅用四球半径和垂心球间距公式。证明了**3**组正弦定理、**5**组余弦定理；各**2**组**2**面角的正弦定理、余弦定理；且证明了同构于球面三角学的正弦定律和余弦定律。垂心四面体**4**态换元算法，使得计算更为直观和简便。

关键词

体积勾股定理，垂心四面体，正弦定理，余弦定理，外积，内积，正弦定律，余弦定律，球面三角学，算法

1. 引言

4 球正交球心间的垂心四面体[1]，能否不用坐标，仅用 15 点垂心的间距公式[2]，以及正交 4 球半径表达的线角正弦和余弦定理[3]；面角的正弦和余弦定理；及其线角面角组合符合球面三角学的正弦和余弦定律[4]？

2. 证明垂心四面体的线(棱)角、面角的正弦和余弦定理及其公式

2.1. 符号约定

2.1.1. 设正交 4 球半径、2 球心间距、3 球心所围 2 倍的面积、4 球心所围 6 倍的体积

- 设正交 4 球球心为 A，B，C，D 半径依次为 a，b，c，d；
- 设正交 4 球球心间 6 连线长度为：

$$|AB|=\sqrt{a^2+b^2},\ |AC|=\sqrt{a^2+c^2},\ |AD|=\sqrt{a^2+d^2},$$
$$|BC|=\sqrt{b^2+c^2},\ |BD|=\sqrt{b^2+d^2},\ |CD|=\sqrt{c^2+d^2}$$

- 设正交 4 球球心间 4 个面的 2 倍面积为：

$$s_1=\sqrt{b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2},\ s_2=\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2},$$
$$s_3=\sqrt{a^2b^2+a^2d^2+b^2d^2},\ s_4=\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$$

下标：1，2，3，4 依次为球心 A，B，C，D 的对平面。见(图 1)

- 设正交 4 球球心所围体积的 6 倍为：

$$v=\sqrt{a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2}$$

2.1.2. 设正交 4 球 6 棱间 12 个线(棱)角符号

设：以正交 4 球心 A,B,C,D 的对平面依次为 1，2，3，4 平面。正交 4 球 6 棱间 12 个线角符号，线角所设见(图 1)，且根据余弦公式得出余弦值以及 1 减余弦值的平方等于正弦值的平方。它们的代数值为：

- 设交于球心 A 点的 3 个线角为：

$$A_2=\angle CAD\Rightarrow\cos A_2=\frac{a^2}{|AC||AD|}\Rightarrow\sin A_2=\frac{s_2}{|AC||AD|}\tag{1}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

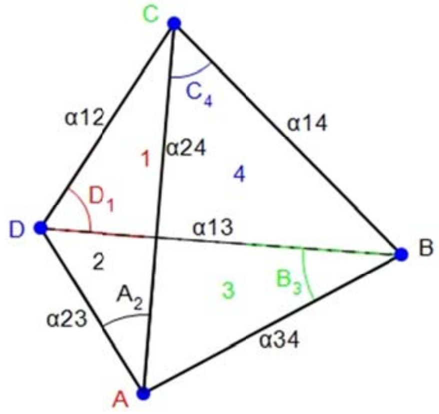

Figure 1. Symbolic diagram of line angle and two-face angle of orthocentric tetrahedron
图 1. 垂心四面体线角、面角符号示意图

(上述所设公式(1)代数值说明：: $\cos A_2 = \dfrac{a^2}{|AC||AD|}$ ， $\sin A_2 = \dfrac{s_2}{|AD|}$

$$\cos A_2 = \cos\angle CAD = \frac{|AC|^2 + |AD|^2 - |CD|^2}{2|AC||AD|} = \frac{a^2 + c^2 + a^2 + d^2 - \left(c^2 + d^2\right)}{2|AC||AD|} = \frac{a^2}{|AC||AD|}$$

$$\sin^2 A_2 = 1 - \cos^2 A_2 = 1 - \left(\frac{a^2}{|AC||AD|}\right)^2 = \left(\frac{s_2}{|AC||AD|}\right)^2 \Rightarrow \text{两边开方} \sin A_2 = \frac{s_2}{|AC||AD|}$$)

同理可得以下正弦余弦代数值公式。

$$A_3 = \angle BAD \Rightarrow \cos A_3 = \frac{a^2}{|AB||AD|} \Rightarrow \sin A_3 = \frac{s_3}{|AB||AD|}$$

$$A_4 = \angle BAC \Rightarrow \cos A_4 = \frac{a^2}{|AB||AC|} \Rightarrow \sin A_4 = \frac{s_4}{|AB||AC|}$$

- 设交于球心 B 点的 3 个线角为：

$$B_1 = \angle CBD \Rightarrow \cos B_1 = \frac{b^2}{|BC||BD|} \Rightarrow \sin B_1 = \frac{s_1}{|BC||BD|} \tag{2}$$

$$B_3 = \angle ABD \Rightarrow \cos B_3 = \frac{b^2}{|AB||BD|} \Rightarrow \sin B_3 = \frac{s_3}{|AB||BD|}$$

$$B_4 = \angle ABC \Rightarrow \cos B_4 = \frac{b^2}{|AB||BC|} \Rightarrow \sin B_4 = \frac{s_4}{|AB||BC|}$$

- 设交于球心 C 点的 3 个线角为：

$$C_1 = \angle BCD \Rightarrow \cos C_1 = \frac{c^2}{|BC||CD|} \Rightarrow \sin C_1 = \frac{s_1}{|BC||CD|} \tag{3}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

$$C_2 = \angle ACD \Rightarrow \cos C_2 = \frac{c^2}{|AC||CD|} \Rightarrow \sin C_2 = \frac{s_2}{|AC||CD|}$$

$$C_4 = \angle ACB \Rightarrow \cos C_4 = \frac{c^2}{|AC||CB|} \Rightarrow \sin C_4 = \frac{s_4}{|AC||CB|}$$

- 设交于球心 D 点的 3 个线角为：

$$D_1 = \angle BDC \Rightarrow \cos D_1 = \frac{d^2}{|BD||CD|} \Rightarrow \sin D_1 = \frac{s_1}{|BD||CD|} \tag{4}$$

$$D_2 = \angle ADC \Rightarrow \cos D_2 = \frac{d^2}{|AD||CD|} \Rightarrow \sin D_2 = \frac{s_2}{|AD||CD|}$$

$$D_3 = \angle ADB \Rightarrow \cos D_3 = \frac{d^2}{|AD||BD|} \Rightarrow \sin D_3 = \frac{s_3}{|AD||BD|}$$

2.1.3. 设正交 4 球 4 面间 6 个面角符号

设：正交 4 球心 A，B，C，D 的对平面依次为 1，2，3，4 平面。4 面间交于各棱的 6 个面角符号，见(图 1)，且根据余弦公式得出面角余弦以及 1 减余弦值的平方等于面角正弦值的平方。它们的代数值为：

- 设交于 CD 棱的面角为：H_{CD} 点见(图 2)

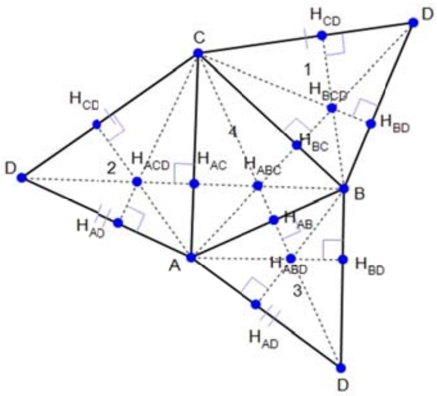

Figure 2. Symbolic expansion of point, line and surface projective coordinates
图 2. 点、线、面 3 态垂心坐标符号展开图

$$\alpha_{12} = \angle AH_{CD}B \Rightarrow \cos\alpha_{12} = \frac{c^2 d^2}{s_1 s_2} \Rightarrow \sin\alpha_{12} = \frac{|CD|v}{s_1 s_2} \tag{5}$$

(上述所设公式(5)说明：$\cos\alpha_{12} = \dfrac{c^2 d^2}{s_1 s_2}$，$\sin\alpha_{12} = \dfrac{|CD|v}{s_1 s_2}$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

$$\cos\alpha_{12}=\cos\angle AH_{CD}B=\frac{|AH_{CD}|^2+|BH_{CD}|^2-|AB|^2}{2|AH_{CD}||BH_{CD}|}=\frac{a^2+r_{HCD}^2+b^2+r_{HCD}^2-\left(a^2+b^2\right)}{2|AH_{CD}||BH_{CD}|}$$

$$=\frac{r_{HCD}^2}{|AH_{CD}||BH_{CD}|}=\frac{r_{HCD}^2}{\sqrt{\left(a^2+r_{HCD}^2\right)\left(a^2+r_{HCD}^2\right)}}=\frac{\frac{c^2d^2}{c^2+d^2}}{\sqrt{\left(a^2+\frac{c^2d^2}{c^2+d^2}\right)\left(a^2+\frac{c^2d^2}{c^2+d^2}\right)}}$$

$$=\frac{c^2d^2}{\sqrt{b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2}\sqrt{a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2}}=\frac{c^2d^2}{s_1s_2}$$

$$\sin^2\alpha_{12}=1-\cos^2\alpha_{12}=1-\left(\frac{c^2d^2}{s_1s_2}\right)^2=\frac{\left(c^2+d^2\right)v^2}{\left(b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2\right)\left(a^2c^2+a^2d^2+c^2d^2\right)}=\frac{\left(c^2+d^2\right)v^2}{s_1^2s_2^2}$$

$$\Longrightarrow 2\text{ 边开方 }\sin\alpha_{12}=\frac{|CD|v}{s_1s_2})$$

同理可得以下正弦余弦代数值公式。

- 设交于 BD 棱的面角为：

$$\alpha_{13}=\angle AH_{BD}C\Rightarrow\cos\alpha_{13}=\frac{b^2d^2}{s_1s_3}\Rightarrow\sin\alpha_{13}=\frac{|BD|v}{s_1s_3}\tag{6}$$

- 设交于 BC 棱的面角为：

$$\alpha_{14}=\angle AH_{BC}D\Rightarrow\cos\alpha_{14}=\frac{b^2c^2}{s_1s_4}\Rightarrow\sin\alpha_{14}=\frac{|BC|v}{s_1s_4}\tag{7}$$

- 设交于 AD 棱的面角为：

$$\alpha_{23}=\angle BH_{AD}C\Rightarrow\cos\alpha_{23}=\frac{a^2d^2}{s_2s_3}\Rightarrow\sin\alpha_{23}=\frac{|AD|v}{s_2s_3}\tag{8}$$

- 设交于 AC 棱的面角为：

$$\alpha_{24}=\angle BH_{AC}D\Rightarrow\cos\alpha_{24}=\frac{a^2c^2}{s_2s_4}\Rightarrow\sin\alpha_{24}=\frac{|AC|v}{s_2s_4}\tag{9}$$

- 设交于 AB 棱的面角为：

$$\alpha_{34}=\angle CH_{AB}D\Rightarrow\cos\alpha_{34}=\frac{a^2b^2}{s_3s_4}\Rightarrow\sin\alpha_{34}=\frac{|AB|v}{s_3s_4}\tag{10}$$

2.2. 线角的正弦定理、外积正弦定理[5]、1 面 3 线角积正弦定理

根据上述线角的正弦和余弦的代数值，可得各 4 组的正弦定理和余弦定理为：

2.2.1. 4 组相等的线角正弦定理为

定义：垂心四面体，每面的 3 棱分别与其对角正弦的商相等于该面 3 球心外接圆的直径。其代数值等于该面 3 棱的积与其所围面积的 2 倍之商。为线角正弦定理。公式为：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

$$\frac{|CD|}{\sin B_1}=\frac{|BD|}{\sin C_1}=\frac{|BC|}{\sin D_1}=2R_{BCD}=\frac{|BC||BD||CD|}{s_1} \tag{11}$$

$$\frac{|CD|}{\sin A_2}=\frac{|AD|}{\sin C_2}=\frac{|AC|}{\sin D_2}=2R_{ACD}=\frac{|CD||AC||AD|}{s_2} \tag{12}$$

$$\frac{|BD|}{\sin A_3}=\frac{|AD|}{\sin B_3}=\frac{|AB|}{\sin D_3}=2R_{ABD}=\frac{|AB||AD||BD|}{s_3} \tag{13}$$

$$\frac{|BC|}{\sin A_4}=\frac{|AC|}{\sin B_4}=\frac{|AB|}{\sin C_4}=2R_{ABC}=\frac{|AB||AC||BC|}{s_4} \tag{14}$$

上述 R_{BCD}，R_{ACD}，R_{ABD}，R_{ABC} 为下标球心外接圆半径。

2.2.2. 4 组相等的线角外积正弦定理

定义：4 球正交的 4 球心的对平面，每面 2 倍的面积等于该面任意 2 棱与其夹角正弦的积，为线角外积正弦定理。公式如下：

A 球心对平面的 3 个线角：$s_1=|BC||BD|\sin B_1=|BC||CD|\sin C_1=|BD||CD|\sin D_1$

B 球心对平面的 3 个线角：$s_2=|AC||AD|\sin A_2=|AC||CD|\sin C_2=|AD||CD|\sin D_2$

C 球心对平面的 3 个线角：$s_3=|AB||AD|\sin A_3=|AB||BD|\sin B_3=|AD||BD|\sin D_3$

D 球心对平面的 3 个线角：$s_4=|AB||AC|\sin A_4=|AB||BC|\sin B_4=|AC||BC|\sin C_4$ (15)

2.2.3. 8 组相等的 1 面 3 线角积正弦定理

定义：4 球心与其对平面间的 3 左角或 3 右角正弦与对平面 2 倍之积的 8 组相等为 4 面积 2 倍的积与 6 棱积之商的正弦定理为：公式如下：

$$\begin{aligned}&s_1\sin B_4\sin C_2\sin D_3=s_1\sin B_3\sin C_4\sin D_2\\&=s_2\sin A_4\sin C_1\sin D_3=s_2\sin A_3\sin C_4\sin D_1\\&=s_3\sin A_4\sin B_1\sin D_2=s_3\sin A_2\sin B_4\sin D_1\\&=s_4\sin A_2\sin B_3\sin C_1=s_4\sin A_3\sin B_1\sin C_2\\&=\frac{s_1s_2s_3s_4}{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|}\end{aligned} \tag{16}$$

2.3. 线角的余弦定理、内积余弦定理[6]、维方 3 线角余弦定理、体积余弦定理

2.3.1. 12 个分式线角余弦定理

定义：正交 4 球心点 6 连线组成 12 个分式线角余弦定理为：顶点球半径平方与所夹 2 棱长乘积之商。其公式如下：

$$\begin{aligned}&\cos A_2=\frac{a^2}{|AC||AD|},\ \cos A_3=\frac{a^2}{|AB||AD|},\ \cos A_4=\frac{a^2}{|AB||AC|}\\&\cos B_1=\frac{b^2}{|BC||BD|},\ \cos B_3=\frac{b^2}{|AB||BD|},\ \cos A_4=\frac{b^2}{|AB||BC|}\\&\cos C_1=\frac{c^2}{|BC||CD|},\ \cos C_2=\frac{c^2}{|AC||CD|},\ \cos C_4=\frac{c^2}{|AC||BC|}\\&\cos D_1=\frac{c^2}{|BD||CD|},\ \cos D_2=\frac{c^2}{|AD||CD|},\ \cos D_3=\frac{c^2}{|AD||BD|}\end{aligned} \tag{17}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

2.3.2. 4 组 3 线角积的余弦定理

定义：各球心点 3 个线角余弦的乘积等于该球半径的 6 次方与所交 3 棱乘积的平方之商。其公式如下：

$$
\begin{aligned}
\cos A_2 \cos A_3 \cos A_4 &= \frac{a^6}{|AB|^2 |AC|^2 |AD|^2} \\
\cos B_1 \cos B_3 \cos B_4 &= \frac{b^6}{|AB|^2 |BC|^2 |BD|^2} \\
\cos C_1 \cos C_2 \cos C_4 &= \frac{c^6}{|AC|^2 |BC|^2 |CD|^2} \\
\cos D_1 \cos D_2 \cos D_3 &= \frac{d^6}{|AD|^2 |BD|^2 |CD|^2}
\end{aligned} \tag{18}
$$

2.3.3. 交 4 球心点的 4 组线角内积余弦定理为

定义：4 球正交的 4 球心，4 组球心点的球半径的平方等于交于该球心的任意两棱长与其夹角余弦的积，为内积线角余弦定理。公式如下：

$$
\begin{aligned}
&A \text{ 球心的 3 个线角：} a^2 = |AB||AC|\cos A_4 = |AB||AD|\cos A_3 = |AC||AD|\cos A_2 \\
&B \text{ 球心的 3 个线角：} b^2 = |AB||BC|\cos B_4 = |AB||BD|\cos B_3 = |BC||BD|\cos B_1 \\
&C \text{ 球心的 3 个线角：} c^2 = |AC||BC|\cos C_4 = |AC||CD|\cos C_2 = |BC||CD|\cos C_1 \\
&D \text{ 球心的 3 个线角：} d^2 = |AD||BD|\cos D_3 = |AD||CD|\cos D_2 = |BD||CD|\cos D_1
\end{aligned} \tag{19}
$$

2.3.4. 8 组相等的维方 3 线角余弦定理为

定义：4 球正交的 4 球心的任意球心与对平面 3 棱构成的 3 左角或 3 右角的线角的余弦和该球半径的平方积相等于 4 球半径平方积与 6 棱长积之商。公式如下：

$$
\begin{aligned}
& a^2 \cos B_4 \cos C_2 \cos D_3 = a^2 \cos B_3 \cos C_4 \cos D_2 \\
& = b^2 \cos A_4 \cos C_1 \cos D_3 = b^2 \cos A_3 \cos C_4 \cos D_1 \\
& = c^2 \cos A_4 \cos B_1 \cos D_2 = c^2 \cos A_2 \cos B_4 \cos D_1 \\
& = d^2 \cos A_3 \cos B_1 \cos C_2 = d^2 \cos A_3 \cos B_1 \cos C_2 \\
& = \frac{a^2 b^2 c^2 d^2}{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|}
\end{aligned} \tag{20}
$$

2.3.5. 交 4 球心点的 4 组线角内积余弦定理为

定义：球心构成的垂心四面体 6 倍体积的平方为：4 面各 3 棱的平方积与该面 3 个线角的余弦积之和。即：

$$
\begin{aligned}
v^2 &= a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 d^2 + b^2 c^2 d^2 \\
&= |AB|^2 |AC|^2 |BC|^2 \cos A_4 \cos B_4 \cos C_4 + |AB|^2 |AD|^2 |BD|^2 \cos A_3 \cos B_3 \cos D_3 \\
&\quad + |AC|^2 |AD|^2 |CD|^2 \cos A_2 \cos C_2 \cos D_2 + |BC|^2 |BD|^2 |CD|^2 \cos B_1 \cos C_1 \cos D_1
\end{aligned} \tag{21}
$$

2.4. 正交 4 球面角正弦定理、6 面角积正弦定理、余弦定理、对面角积余弦定理

2.4.1. 6 个分式面角正弦定理

定义：正交 4 球球心构成 4 平面交于 6 棱的 6 面角的分式正弦定理为：四面体 6 倍体积与 2 面共棱

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

长积与所交 2 面 2 倍面积乘积之商。公式为：

$$\sin\alpha_{12}=\frac{|CD|v}{s_1s_2},\ \sin\alpha_{13}=\frac{|BD|v}{s_1s_3},\ \sin\alpha_{14}=\frac{|BC|v}{s_1s_4},$$
$$\sin\alpha_{23}=\frac{|AD|v}{s_2s_3},\ \sin\alpha_{24}=\frac{|AC|v}{s_2s_4},\ \sin\alpha_{34}=\frac{|AB|v}{s_3s_4} \tag{22}$$

2.4.2. 6 个面角积正弦定理

定义：正交 4 球球心构成 4 平面交于 6 棱的 6 面角正弦积等于四面体 6 倍体积的 6 方与 6 棱长积与 4 面 2 倍面积乘积立方之商。公式为：

$$\sin\alpha_{12}\sin\alpha_{13}\sin\alpha_{14}\sin\alpha_{23}\sin\alpha_{24}\sin\alpha_{34}=\frac{|AB||AC||AD||BC||CD||BD|v^6}{s_1^3s_2^3s_3^3s_4^3} \tag{23}$$

2.4.3. 6 个分式面角余弦定理

定义：正交 4 球球心构成 4 平面交于 6 棱的 6 面角的分式余弦定理为：2 面共棱 2 端球半径平方积与所交 2 面 2 倍面积乘积之商。公式为：

$$\cos\alpha_{12}=\frac{c^2d^2}{s_1s_2},\ \cos\alpha_{13}=\frac{b^2d^2}{s_1s_3},\ \cos\alpha_{14}=\frac{b^2c^2}{s_1s_4},$$
$$\cos\alpha_{23}=\frac{a^2d^2}{s_2s_3},\ \cos\alpha_{24}=\frac{a^2c^2}{s_2s_4},\ \cos\alpha_{34}=\frac{a^2b^2}{s_3s_4} \tag{24}$$

2.4.4. 对面角余弦积相等定理

定义：正交 4 球球心构成的垂心四面体的交于 6 棱的 6 个面角的余弦定理为：交于对棱面角的 3 组余弦的积相等于 4 球半径积的平方与 4 面 2 倍面积之积的商。公式为：

$$\cos\alpha_{12}\cos\alpha_{34}=\cos\alpha_{13}\cos\alpha_{24}=\cos\alpha_{14}\cos\alpha_{23}=\frac{a^2b^2c^2d^2}{s_1s_2s_3s_4} \tag{25}$$

2.5. 正交 4 球的线角和面角的关系符合球面三角学的弧长和球面角关系

关于线角面角与球面三角学同构说明：关于线角与面角的正弦定理与球面三角学相同为：即：线角等同于球面的弧线，面角等同于球面的顶角。其按 4 顶点有 4 组 4 等式的正弦定理公式如下：

2.5.1. 交 4 球心点的 4 组线角面角商同构于球面三角学的正弦定理为

关于线角面角与球面三角学同构说明：关于线角与面角的正弦定理与球面三角学相同为：即：线角等同于球面的弧线，面角等同于球面的顶角。区别在于这里 3 线角和 3 面角集中体现在 4 个顶点上。

- 交于球心 A 点的正弦面角线角商相同的线面角正弦定理为：

$$\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}=\frac{|AB||AC||AD|v}{s_2s_3s_4} \tag{26}$$

- 交于球心 B 点的正弦面角线角商相同的线面角正弦定理为：

$$\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin B_1}=\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin B_3}=\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin B_4}=\frac{|AB||BC||BD|v}{s_1s_3s_4} \tag{27}$$

- 交于球心 C 点的正弦面角线角商相同的线面角正弦定理为：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

$$\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin C_1}=\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin C_2}=\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin C_4}=\frac{|AC||BC||CD|v}{s_1s_2s_4} \tag{28}$$

- 交于球心 D 点的正弦面角线角商相同的线面角正弦定理为：

$$\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin D_1}=\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin D_2}=\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin D_3}=\frac{|AD||BD||CD|v}{s_1s_2s_3} \tag{29}$$

2.5.2. 4 组线角面角商的正弦定理与线角正弦定理的乘积有 36 组全等的正弦积定理为

将公式(26)与公式(11)间任意(有 9 个组合)一组的乘积，等于公式(27)与公式(12)间任意(有 9 个组合)一组的乘积，等于公式(28)与公式(13)间任意(有 9 个组合)一组的乘积，等于公式(29)与公式(14)间任意(有 9 个组合)一组的乘积为：四面体 2 倍体积与 6 棱长积除以 4 个 2 倍面积的商。36 组全等公式为：

公式(26)与公式(11)间任意(有 9 个组合)一组的乘积

$$\frac{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|v}{s_1s_2s_3s_4}$$
$$=\frac{|CD|}{\sin B_1}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{|CD|}{\sin B_1}\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{|CD|}{\sin B_1}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}$$
$$=\frac{|BD|}{\sin C_1}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{|BD|}{\sin C_1}\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{|BD|}{\sin C_1}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}$$
$$=\frac{|BC|}{\sin D_1}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{|BC|}{\sin D_1}\frac{Sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{|BC|}{\sin D_1}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}$$

公式(27)与公式(12)间任意(有 9 个组合)一组的乘积

$$\frac{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|v}{s_1s_2s_3s_4}$$
$$=\frac{|CD|}{\sin A_2}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin B_1}=\frac{|CD|}{\sin A_2}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin B_3}=\frac{|CD|}{\sin A_2}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin B_4}$$
$$=\frac{|AD|}{\sin C_2}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin B_1}=\frac{|AD|}{\sin C_2}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin B_3}=\frac{|AD|}{\sin C_2}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin B_4}$$
$$=\frac{|AC|}{snD_2}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin B_1}=\frac{|AC|}{\sin D_2}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin B_3}=\frac{|AC|}{\sin D_2}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin B_4}$$

公式(28)与公式(13)间任意(有 9 个组合)一组的乘积

$$\frac{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|v}{s_1s_2s_3s_4}$$
$$=\frac{|BD|}{\sin A_3}\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin C_1}=\frac{|BD|}{\sin A_3}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin C_2}=\frac{|BD|}{\sin A_3}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin C_4}$$
$$=\frac{|AD|}{\sin B_3}\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin C_1}=\frac{|AD|}{\sin B_3}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin C_2}=\frac{|AD|}{\sin B_3}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin C_4}$$
$$=\frac{|AB|}{\sin D_3}\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin C_1}=\frac{|AB|}{\sin D_3}\frac{\sin\alpha_{14}}{\sin C_2}=\frac{|AB|}{\sin D_3}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin C_4}$$

公式(29)与公式(14)间任意(有 9 个组合)一组的乘积

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

$$\frac{|AB||AC||AD||BC||BD||CD|v}{s_1 s_2 s_3 s_4}$$
$$=\frac{|BC|}{\sin A_4}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin D_1}=\frac{|BC|}{\sin A_4}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin D_2}=\frac{|BC|}{\sin A_4}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin D_3}$$
$$=\frac{|AC|}{\sin B_4}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin D_1}=\frac{|AC|}{\sin B_4}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin D_2}=\frac{|AC|}{\sin B_4}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin D_3} \tag{30}$$
$$=\frac{|AB|}{\sin C_4}\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin D_1}=\frac{|AB|}{\sin C_4}\frac{\sin\alpha_{13}}{\sin D_2}=\frac{|AB|}{\sin C_4}\frac{\sin\alpha_{12}}{\sin D_3}$$

2.5.3. 正交 4 球心间 6 组面角同构于球面三角学 3 线角表达的余弦定理为

定义：正交 4 球球心构成的垂心四面体的交于 6 棱的 6 个面角的余弦定理为：2 面角余弦等于交于该棱任意一端 2 面边沿线角余弦与该点 2 个面的线角余弦积之差与该点 2 个面的线角正弦积的商。6 组 2 面角余弦公式为：

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_{12}&=\frac{\cos C_4-\cos C_1\cos C_2}{\sin C_1\sin C_2}=\frac{\cos D_3-\cos D_1\cos D_2}{\sin D_1\sin D_2}=\frac{c^2d^2}{s_1s_2}\\
\cos\alpha_{13}&=\frac{\cos B_4-\cos B_1\cos B_3}{\sin B_1\sin B_3}=\frac{\cos D_2-\cos D_1\cos D_3}{\sin D_1\sin D_3}=\frac{b^2d^2}{s_1s_3}\\
\cos\alpha_{14}&=\frac{\cos B_3-\cos B_1\cos B_4}{\sin B_1\sin B_4}=\frac{\cos C_2-\cos C_1\cos C_4}{\sin C_1\sin C_4}=\frac{b^2c^2}{s_1s_4}\\
\cos\alpha_{23}&=\frac{\cos A_4-\cos A_2\cos A_3}{\sin A_2\sin A_3}=\frac{\cos D_1-\cos D_2\cos D_3}{\sin D_2\sin D_3}=\frac{a^2d^2}{s_2s_3}\\
\cos\alpha_{24}&=\frac{\cos A_3-\cos A_2\cos A_4}{\sin A_2\sin A_4}=\frac{\cos C_1-\cos C_2\cos C_4}{\sin C_2\sin C_4}=\frac{a^2c^2}{s_2s_4}\\
\cos\alpha_{34}&=\frac{\cos A_2-\cos A_3\cos A_4}{\sin A_3\sin A_4}=\frac{\cos B_1-\cos B_3\cos B_4}{\sin B_3\sin B_4}=\frac{a^2b^2}{s_3s_4}
\end{aligned} \tag{31}$$

2.5.4. 同构于球面三角学的 6 面角余弦行列式为零

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} & \cos\alpha_{14}\\ \cos\alpha_{21} & -1 & \cos\alpha_{23} & \cos\alpha_{24}\\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & -1 & \cos\alpha_{34}\\ \cos\alpha_{41} & \cos\alpha_{42} & \cos\alpha_{43} & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & \frac{c^2d^2}{s_1s_2} & \frac{b^2d^2}{s_1s_3} & \frac{b^2c^2}{s_1s_4}\\ \frac{c^2d^2}{s_1s_2} & -1 & \frac{a^2d^2}{s_2s_3} & \frac{a^2c^2}{s_2s_4}\\ \frac{b^2d^2}{s_1s_3} & \frac{a^2d^2}{s_2s_3} & -1 & \frac{a^2b^2}{s_3s_4}\\ \frac{b^2c^2}{s_1s_4} & \frac{a^2c^2}{s_2s_4} & \frac{a^2b^2}{s_3s_4} & -1 \end{vmatrix}=\frac{0}{s_1^2s_2^2s_3^2s_4^2}=0 \tag{32}$$

上述各项正弦、余弦等各定理可以任意合理组合，变换成更多公式。

3. 利用 15 个垂心球半径，以及球面 8 交点为零的垂心球，将上述定理推广至垂心四面体的 4 态的正弦余弦等各定理公式的方法

3.1. 证明垂心四面体的 4 态

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

过 A 球心的垂线 5 特殊垂心点及其垂心球半径平方为：

$$A \in a^2,\ A_- \in 0,\ H \in -r_H^2 = -\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2},\ H_{BCD} \in -r_{BCD}^2 = -\frac{b^2c^2d^2}{s_1^2},\ A_+ \in 0$$

过 B 球心的垂线 5 特殊垂心点及其垂心球半径平方为：

$$B \in b^2,\ B_- \in 0,\ H \in -r_H^2 = -\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2},\ H_{ACD} \in -r_{ACD}^2 = -\frac{a^2c^2d^2}{s_2^2},\ B_+ \in 0$$

过 C 球心的垂线 5 特殊垂心点及其垂心球半径平方为：

$$C \in c^2,\ C_- \in 0,\ H \in -r_H^2 = -\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2},\ H_{ABD} \in -r_{ABD}^2 = -\frac{a^2b^2d^2}{s_3^2},\ C_+ \in 0$$

过 D 球心的垂线 5 特殊垂心点及其垂心球半径平方为：

$$D \in b^2,\ D_- \in 0,\ H \in -r_H^2 = -\frac{a^2b^2c^2d^2}{v^2},\ H_{ABC} \in -r_{ABC}^2 = -\frac{a^2b^2c^2}{s_4^2},\ D_+ \in 0$$

例：

D 点的对平面 3 球心 A，B，C 与过 D 垂线的 5 个特殊垂心点间的 6 连线，均为对边的平方和相等的垂心四面体。其中：

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \tag{33}$$

$$|AB|^2 + |CD_-|^2 = |AC|^2 + |BD_-|^2 = |AD_-|^2 + |BC|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 0^2 \tag{34}$$

$$|AB|^2 + |CH|^2 = |AC|^2 + |BH|^2 = |AH|^2 + |BC|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \left(-r_H^2\right) \tag{35}$$

$$|AB|^2 + |CH_{ABC}|^2 = |AC|^2 + |BH_{ABC}|^2 = |AH_{ABC}|^2 + |BC|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \left(-r_{ABC}^2\right) \tag{36}$$

$$|AB|^2 + |CD_+|^2 = |AC|^2 + |BD_+|^2 = |AD_+|^2 + |BC|^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 0^2 \tag{37}$$

上述的尾项均为过球心 D 垂线特殊点的垂心球半径的平方，且可分类为垂心四面体的 4 态，平方前的正负号区别在于该点至对平面 3 球心间的夹角。其中：

公式(33)交 D 点为：锐角垂心四面体，符号为正；

公式(34)与公式(37)交 D_- 或 D_+ 点为：直角垂心四面体；

公式(35)交 H 点为：钝角垂心四面体，符号为负；

公式(36)交 H_{ABC} 点塌陷为：平面垂心四面体，符号为负。

同理：其余 3 组 3 球心点与其垂线 5 特殊点间均为对边平方和相等的垂心四面体 4 态。

3.2. 证明垂心四面体的 4 态换元及其正负号判别式

垂心球半径的平方：过正交球心 D 点垂线上的 5 个垂心四面体的特殊点 D'，均有其垂心球。

垂心球半径平方正负号判别式：该点至对平面 3 球心的 3 连线中，任意 2 连线的平方和：大于对边的平方的为正；等于的为零；小于的为负。

公式为：$|D'A|^2 + |D'B|^2 - |AB|^2 = x$ （当 $x > 0$ 为正，$x = 0$ 为零，$x < 0$ 为负）

例：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

D 点至对平面 3 球心。根据垂心间距离公式可得：

$$|AD|^2+|BD|^2-|AB|^2=\left(a^2+d^2\right)+\left(b^2+d^2\right)-\left(a^2+b^2\right)=2d^2>0\text{ 为正}$$

H 点至对平面 3 球心。根据垂心间距离公式可得：

$$|AH|^2+|BH|^2-|AB|^2=\left(a^2-r_H^2\right)+\left(b^2-r_H^2\right)-\left(a^2+b^2\right)=-2r_H^2<0\text{ 为负}$$

D_- 或 D_+ 点至对平面 3 球心。根据垂心间距离公式可得：

$$|AD_-|^2+|BD_-|^2-|AB|^2=\left(a^2+0\right)+\left(b^2+0\right)-\left(a^2+b^2\right)=0\text{ 为零}$$

H_{ABC} 点至对平面 3 球心。根据垂心间距离公式可得：

$$|AH_{ABC}|^2+|BH_{ABC}|^2-|AB|^2=\left(a^2-r_{HABC}^2\right)+\left(b^2-r_{HABC}^2\right)-\left(a^2+b^2\right)=-2r_{HABC}^2<0\text{ 为负}$$

同理：可判别其余 3 组 3 球心点与其垂线 5 特殊点垂心球半径平方正负号。

3.3. 垂心四面体 4 态换元法

例：D 对平面 3 球心 A，B，C，分别与过 D 球心垂线特殊点：D 点、D_- 或 D_+ 点，H 点，H_{ABC} 点 4 态：

3.3.1. D 点为锐角垂心四面体时：$d^2=d^2$ 公式(26)为原型

$$\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}=\frac{|AB||AC||AD|v}{s_2s_3s_4}$$

3.3.2. D_- 或 D_+ 为直角垂心四面体时：$d^2=0$：换元计算公式(26)

$$\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}$$
$$=\frac{|AB||AC|\sqrt{a^2+0}\sqrt{a^2b^2c^2+\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)0}}{\sqrt{a^2c^2+\left(a^2+c^2\right)0}\sqrt{a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)0}s_4}$$
$$=\frac{|AB||AC|a\ abc}{ac\ ab\,s_4}=\frac{|AB||AC|}{s_4}$$

3.3.3. H 点为纯角垂心四面体时：$d^2=-r_H^2=-\dfrac{a^2b^2c^2d^2}{v^2}$：换元计算公式(26)

$$\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}$$
$$=\frac{|AB||AC|\sqrt{a^2+\left(-r_H^2\right)}\sqrt{a^2b^2c^2+\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)\left(-r_H^2\right)}}{\sqrt{a^2c^2+\left(a^2+c^2\right)\left(-r_H^2\right)}\sqrt{a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)\left(-r_H^2\right)}s_4}$$
$$=\frac{|AB||AC|}{s_4}\frac{s_1^2}{b^2c^2|BD||CD|}=\frac{|AB||AC|s_1^2}{b^2c^2|BD||CD|s_4}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019

3.3.4. H_{ABC} 点为平角垂心四面体时：$d^2=-r_{HABC}^2=-\frac{a^2b^2c^2}{s_4^2}$：换元计算公式(26)

$$\begin{aligned}\frac{\sin\alpha_{34}}{\sin A_2}=\frac{\sin\alpha_{24}}{\sin A_3}=\frac{\sin\alpha_{23}}{\sin A_4}\\&=\frac{|AB||AC|\sqrt{a^2+\left(-r_{HABC}^2\right)}\sqrt{a^2b^2c^2+\left(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2\right)\left(-r_{HABC}^2\right)}}{\sqrt{a^2c^2+\left(a^2+c^2\right)\left(-r_{HABC}^2\right)}\sqrt{a^2b^2+\left(a^2+b^2\right)\left(-r_{HABC}^2\right)}s_4}\\&=\frac{|AB||AC||BC|0}{a^2b^2c^2}=0\end{aligned}$$

同理，其余 3 组平面上的 3 球心与垂直该平面垂线上的 5 特殊点的所有正弦和余弦定理的代数值，均可使用上述换元法简化计算。(略)

4. 总结

1) 仅用正交 4 球的半径表达所有线角、面角和棱角面角组合的所有正弦和余弦定理

对已知正交 4 球半径，正交 4 球心所构成的垂心四面体间的线角、面角存在且：

证明了线(棱)角的 3 组正弦定理、5 组余弦定理；

证明了面角的 2 组正弦定理、2 组余弦定理；

证明了同构于球面三角学的线(棱)角面角组合的正弦定理和余弦定理。

2) 所有正弦和余弦定理的代数值，均简化成分式表达式

证明了正交四球的内积余弦定理为顶点球半径的平方

证明了正交四球的外积正弦定理为对平面 2 倍的面积

3) 对 4 垂线任意点与其垂直平面 3 球心点连线

证明了垂心四面体 4 态，以及垂心四面体 4 态的换元算法；

明确了垂心四面体 4 态的正负号判别式。

4) 对垂心四面体 4 态的所有正弦余弦定理，不用坐标，仅用垂心间距离公式换元计算，简化了计算方法

证明了正交 4 球的线(棱)角、面角的正弦余弦公式，均基于 15 个垂心点和 8 个球面交点为原点，及其它们垂心球半径。不用坐标，仅用垂心球距离公式：

5) 可利用上述所有正弦余弦定理，变换出更多的简便运算的三角公式。

参考文献

[1] 蔡国伟 体积勾股定理的证明[J]. 理论数学 2019.9(6):723-729.

[2] 蔡国伟 证明正交四球心间 15 个垂心球及距离公式的算法[J]. DOI:10.12677/HANSPrePrints.2019.41026,.2019-8-8.

[3] 王太东 赵兴凤 余弦、正弦定理在四面体中推广[J] 数学通讯 2001 年 第 9 期 16-17

[4] 亢红道 关于球面几何的一些问题[J] 大理师专学报 1996 年第 1 期 20-24

[5] 夏盼秋 高维欧氏空间中向量的外积[J] 大学数学 2011 年 8 月 第 27 卷 第 4 期 159-164

[6] 王励冰 王超杰 A-内积的正交性[J] 牡丹江大学学报 2015 年 9 月 第 24 卷 第 9 期 159-161

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41031. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 14September 2019, publ: 17September 2019