

Proof of the Four Color Theorem of Topology

Zhaosheng Zhang

Gaoliangjian Primary School, Hongze District, Huai'an City, China
Email: ewe222@163.com

Received: Jun. 25th, 2020, published: Jun. 28th, 2020

Abstract

To explore the proof method of the four-color theorem and the continuity of points, lines, surfaces and bodies, belong to the field of topology and geometry and give the proof process of four-color theorem, give new geometric axioms and prove the continuity of space. The dichroic theorem is proved by point partition method, and the trichromatic theorem is proved by point partition method and exhaustive method. The four-color theorem is proved by point separation, line separation and enumeration.

Keywords

Four Color Theorem, Geometric Axiom, Spatial Continuity

拓扑学四色定理的证明

张朝胜

淮安市高良涧小学，淮安市洪泽区，中国
Email: ewe222@163.com

收稿日期：2020年6月25日；发布日期：2020年6月28日

摘要

探索四色定理的证明方法和点、线、面、体的连续性，属于拓扑学和几何学领域，给出四色定理的证明过程，给出新的几何公理并证明空间的连续性。以点分隔法证明二色定理，以点分隔法和穷举法证明三色定理。以点分隔法、线分隔法、穷举法证明四色定理。

关键词

四色定理，几何公理，空间连续性

1. 引言

四色问题又称四色猜想，四色定理是世界近代三大数学难题之一。地图四色定理(Four color theorem)最先是由一位叫古德里 Francis Guthrie 的英国大学生提出来的。德·摩尔根(Augustus De Morgan) (1806~1871) 1852 年 10 月 23 日致哈密顿的一封信提供了有关四色定理来源的最原始的记载。他在信中简述了自己证明四色定理的设想与感受。一个多世纪以来数学家们为证明这条定理绞尽脑汁所引进的概念与方法刺激了拓扑学与图论的生长、发展。1976 年美国数学家阿佩尔 K.Appel 与哈肯 W.Haken 宣告借助电子计算机获得了四色定理的证明，为用计算机证明数学定理开拓了前景。但证明并未止步，计算机以穷举的证明方式无法给出令人信服的推导过程。

古希腊数学家几何之父欧几里德(英文: Euclid; 希腊文: Ευκλειδης, 约公元前 330 年~公元前 275 年)在《几何原本》中记述了一条线上相邻的两点连续, 这个概念一直沿用到今天, 并且产生了一些著名的悖论。不同的两点能连续吗?

2. 四色定理

四色定理: 任何一张地图用四种颜色使有共同边界的国家着上不同的颜色。

为了便于说明, 设一个国为一个着色点, 两个有共同边界的国用一段线段连接, 颜色 1 为红色, 颜色 2 为绿色, 颜色 3 为蓝色, 颜色 4 为橙色。

2.1. 二色定理

二色定理: 一条线上有 n (n 为自然数) 个着色点, 该线不与其它线交叉, 如果线上有偶数个着色点或是非闭合线, 两种颜色可以着色。

证明: 线上有 n (n 为自然数) 个着色点。

n 为偶数, 点 1 用颜色 1 着色, 点 2 用颜色 2 着色...点 $n-1$ 用颜色 1 着色, 点 n 用颜色 2 着色。即使首尾相连形成闭合线, 两种颜色可以着色该地图。

n 为奇数, 如果仅仅用两种颜色着色该地图, 点 1 用颜色 1 着色, 点 2 用颜色 2 着色...点 $n-1$ 用颜色 2 着色, 点 n 用颜色 1 着色, 两种颜色可以着色非闭合线。由于点 1 和点 n 用同一种颜色着色, 当该线首尾相连, 两种颜色不足以着色闭合成环的线(图 1)。



Figure 1. The dichroism theorem

图 1. 二色定理

二色定理的延伸: n (n 为自然数) 个符合二色定理的闭合线和非闭合线相连, 仍然符合二色定理。

证明: n (n 为自然数) 个符合二色定理的闭合线相连, 形成更多的闭合线, 这些闭合线上的着色点数量都是偶数值(图 2), 所以 n (n 为自然数) 个符合二色定理的闭合线和非闭合线相连, 仍然符合二色定理。

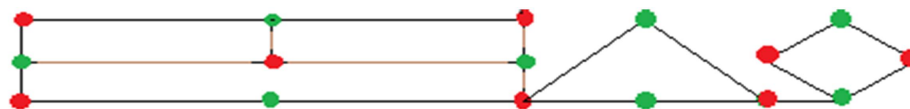


Figure 2. Extension of the dichroic theorem

图 2. 二色定理延伸

2.2. 三色定理

三色定理：一条线上有 n (n 为自然数) 个着色点，该线不与其它线交叉，如果线上有奇数个着色点并且是闭合线，三种颜色可以着色。

证明：线上有 n (n 为自然数) 个着色点。

n 为奇数，如果仅仅用两种颜色着色该地图，点 1 用颜色 1 着色，点 2 用颜色 2 着色...点 $n-1$ 用颜色 2 着色，点 n 用颜色 1 着色，两种颜色可以着色非闭合线。由于点 1 和点 n 用同一种颜色着色，当该线首尾相连，两种颜色不足以着色闭合线，点 1 或点 n 中的一个必须用颜色 3 着色。三种颜色可以着色闭合环着色点为奇数的线(图 3)。



Figure 3. Three-color theorem

图 3. 三色定理

三色定理的延伸： n (n 为自然数) 个着色点为 n (n 为自然数， n 为大于 3 的奇数) 个的闭合线环环相连，仍然符合三色定理。

证明：以穷举法证明，必须列举出所有的类型并证明。

分隔法证明：(图 4)列出了 n (n 为自然数) 个着色点数量为 5 的闭合线环环相连的几个基本构造，着色规律为：图中所示三条横线每一条都是地图的分界线，每个着色点为 5 个的闭合线选出一个着色点着色颜色 3。为了避免下一条分界线上的 5 个着色点同一条闭合线上，并且 5 个着色点都连接着色颜色 3 的着色点，颜色 3 尽量着色在不连接和少连接下一条分界线的着色点上。剩下的未着色颜色 3 的有奇数个着色点的闭合线，选择其中一个为着色点着色颜色 3。地图着色颜色 3 后剩下的着色点符合二色定理，着色点数量为 5 的闭合线有 2 个着色点可以着色颜色 3，着色点大于 5 个的闭合线可以着色颜色 3 的着色点的最大值大于 2 个。所以 n (n 为自然数) 个着色点为 n (n 为自然数， n 为大于 3 的奇数) 个的闭合线环环相连，符合三色定理。

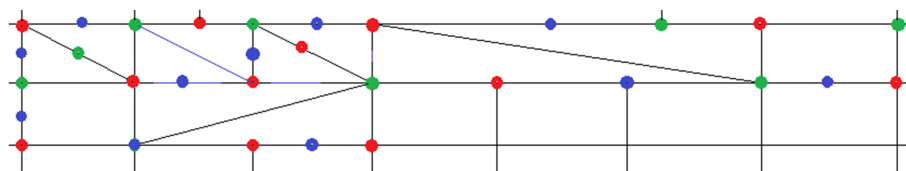


Figure 4. Extension of tri-color theorem

图 4. 三色定理延伸

假设： n (n 为自然数) 个着色点为 5 个的闭合线环环相连，每个着色点为 5 个的闭合线其中两个着色点可以着色颜色 3。

2.3. 特殊构造

异构 A：闭合线上的着色点数量为 3， n (n 为自然数) 个闭合线环环相连，其中一种特殊构造如果仅仅

用三种颜色着色能够使着色的三种颜色连锁，如果被锁住的用三种颜色着色的三个着色点同时与一个着色点连接，这个共同的连接点必须用第四种颜色着色(图 5)。着色地图时，三色连锁构造用四种颜色着色，否则(图 5)下方的两个着色点连接必须用第五种颜色着色。

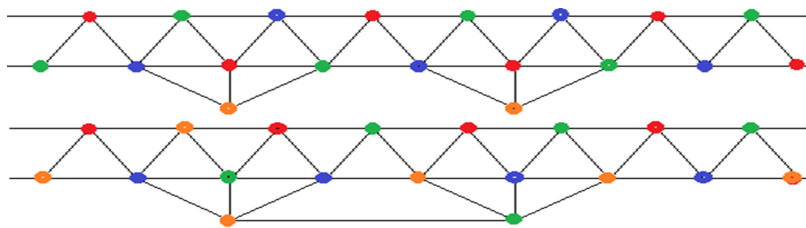


Figure 5. Heterogeneous A

图 5. 异构 A

异构 B: 闭合线上 a、b 两个着色点相连形成新的闭合线(图 6)，a、b 两着色点相连分内侧相连和外侧相连，(图 6)第一个图形中的 a、b 两着色点在内部相连，第二个图形中的 a、b 两着色点在外侧相连。

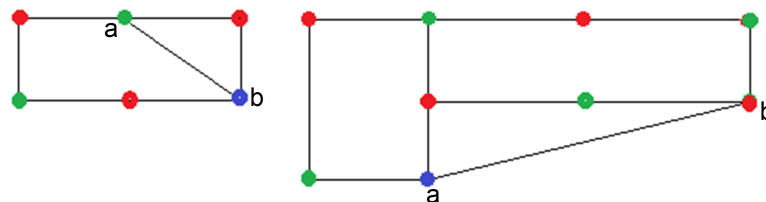


Figure 6. Heterogeneous B

图 6. 异构 B

2.4. 四色定理

四色定理的证明:

以穷举法证明，必须列举出所有的类型并证明。

分隔法证明：给一张地图着色，从任意一个着色点开始，把地图中的非闭合线以及着色点大于 3 个内侧符合二色定理、三色定理的闭合线单独划分出来。如果闭合线的外侧出现异构 B 的情况，并且原环上两着色点连接形成的外侧环上的着色点大于 3 个，不影响划分可以保留。划分过程中，会出现相邻的两环无法继续划分的情况，并且两环的相邻部分形成(图 5)所示的三色连锁构造。A 环用颜色 1、颜色 2、颜色 3 着色。B 环在相邻两环形成的三色连锁部分，用颜色 1、颜色 2、颜色 4 着色，非三色连锁部分只能用颜色 1、颜色 2 着色。B 环着色颜色 4 的着色点必须被 A 环完全隔断，不能再连接 A 环和 B 环外侧的环外着色点，但可以连接 B 环内侧的环外着色点。A 环内侧的环外着色点可以用颜色 4 着色。B 环内侧的环外着色点可以用颜色 3 着色。(图 7)(图中下方原环为红环，由于红色异构 B 外环被蓝环 B 环取代。左侧橙色异构 B 使 A 环、B 环连接出新的外环。)

四种颜色可以着色地图，四色定理成立。[1]

3. 空间的连续

任意两个不同的点不连续。

证明：如果两个不同的点连续，因为点的长度为零，所以两个点之间没有线段，两个点合并为一个点。如果一条直线上的所有的点连续，这条直线上的所有的点合并为一点。所以任意两个不同的点不连续。

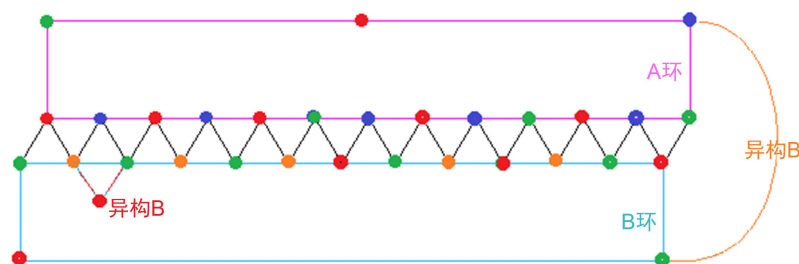


Figure 7. Four color theorem

图 7. 四色定理

因为线的宽度为零，所以两条线之间面积为零，两条线不能连续形成面。因为面的高度为零，所以两个面之间体积为零，两个面不能连续形成体。

连续的点不可能形成线、面和体。点、线、面、体是对空间形态的体现，但点、线、面只体现空间的部分形态而不是全部，只有体才能体现空间完整的形态。体包含空间所有的信息，面包含的空间信息少于体，线包含的空间信息少于面，点包含的空间信息少于线。点包含空间点坐标信息但不包含空间连续性信息，线包含线上的点的信息和线的长度信息，面包含面上的线的信息、面的面积信息，体包含体中面的信息、体的体积信息。

线段体现出两点之间空间的连续，面体现出两条线之间空间的连续，体体现出两个面之间空间的连续。线段 ab 和线段 cd 连接成线段 ad ，线段 ab 和线段 cd 在 b 点连续形成线段 ad 。线在长度为零的 b 点连续，面在宽度为零的线连续，体在高度为零的面块连续。线上线段的长度可以无限缩短，只有当线段的长度收缩为零归于一点时，线才能在该点连续。

参考文献

- [1] <https://preprint.nstl.gov.cn/preprint/main.html?action=showFile&id=8a8b8a986ec502f301712b99472e05a3>.