从四面体到n维单形的等距共轭点

郭德强

丁丁购股份集团有限公司，香港，中国
Email: 13044212734@yeah.net

收稿日期：2021年6月5日；发布日期：2021年6月8日

摘　要

本文将三角形的等距共轭点及其重心坐标关系推广至四面体与n维单形。

关键词

等距共轭点，四面体，n维单形，重心坐标

Equidistant Conjugate Points from Tetrahedron to N-Simplex

Deqiang Guo

Dindinshop Group Co., Ltd, HongKong, China
Email: 13044212734@yeah.net

Received: Jun. 5th, 2021, published: Jun. 8th, 2021

Abstract

In this paper, the relationship between equidistant conjugate points in the triangles and their barycenter coordinates is extended to tetrahedron and n-simplex.

Keywords

Equidistant Conjugate Points, Tetrahedron, N-Simplex, Barycenter Coordinate

1. 引言

如图 1 所示，在任意三角形 ABC 中，P_1、Q_1 在 BC 上，P_2、Q_2 在 AC 上，P_3、Q_3 在 AB 上。$BP_1 = CQ_1$，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

$AP_2 = CQ_2$，$AP_3 = BQ_3$。若 AP_1、BP_2、CP_3 在三角形 ABC 内相交于点 P，则 AQ_1、BQ_2、CQ_3 在三角形 ABC 内也必相交于一点。

设 AQ_1、BQ_2、CQ_3 的交点为 Q，将点 P 与点 Q 称作三角形 ABC 内的一对等距共轭点。

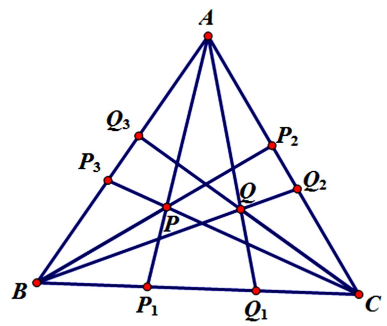

Figure 1. Isometry conjugate points in the triangle
图 1. 三角形的等距共轭点

令 O 为坐标原点，若 $\boldsymbol{OP} = \dfrac{a\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}}{a+b+c}$，$a,b,c>0$，则

$$\boldsymbol{OQ} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}。$$

证明：因为 P_1 在 BC 上，设 $\boldsymbol{OP_1} = x\cdot\boldsymbol{OB}+(1-x)\cdot\boldsymbol{OC}$，$0<x<1$，则

$$\boldsymbol{PP_1} = \boldsymbol{OP_1}-\boldsymbol{OP} = \frac{-a\cdot\boldsymbol{OA}+\left[(a+b+c)x-b\right]\cdot\boldsymbol{OB}+\left[(a+b+c)(1-x)-c\right]\cdot\boldsymbol{OC}}{a+b+c}。$$

由于 A、P、P_1 三点共线，且

$$\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OA} = \frac{-(b+c)\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}}{a+b+c},$$

比较 $\boldsymbol{PP_1}$ 与 $\boldsymbol{AP}$ 关于 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 的系数可得

$$\frac{a}{b+c} = \frac{(a+b+c)x-b}{b} = \frac{(a+b+c)(1-x)-c}{c},$$

即

$$x = \frac{b}{b+c}，\quad \boldsymbol{OP_1} = \frac{b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}}{b+c}。$$

同理

$$\boldsymbol{OP_2} = \frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+c\cdot\boldsymbol{OC}}{a+c}，\quad \boldsymbol{OP_3} = \frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}}{a+b}。$$

因为 P_1 与 Q_1 关于 BC 的中点对称，即

$$\boldsymbol{OQ_1} = \frac{c\cdot\boldsymbol{OB}+b\cdot\boldsymbol{OC}}{b+c} = \frac{\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}};$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

同理

$$\boldsymbol{OQ}_2=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}，\quad \boldsymbol{OQ}_3=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}。$$

令

$$\boldsymbol{OQ}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}。$$

设 AQ、BQ、CQ 三线段的延长线分别与 BC、AC、AB 交于 Q_1'、Q_2'、Q_3'。仿照前面求 $\boldsymbol{OP}_1$、$\boldsymbol{OP}_2$、$\boldsymbol{OP}_3$ 的方法可求得

$$\boldsymbol{OQ}_1'=\frac{\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}，\quad \boldsymbol{OQ}_2'=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}，\quad \boldsymbol{OQ}_3'=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}。$$

故 Q_1'、Q_2'、Q_3' 分别与 Q_1、Q_2、Q_3 重合，Q 即为 AQ_1、BQ_2、CQ_3 在三角形 ABC 内的交点。命题得证。

2. 四面体的等距共轭点

如图 2 所示，在任意四面体 $ABCD$ 中，P_1 与 Q_1 为三角形 BCD 内的一对等距共轭点，P_2 与 Q_2 为三角形 ACD 内的一对等距共轭点，P_3 与 Q_3 为三角形 ABD 内的一对等距共轭点，P_4 与 Q_4 为三角形 ABC 内的一对等距共轭点。若 AP_1、BP_2、CP_3、DP_4 在四面体 $ABCD$ 内相交于点 P，则 AQ_1、BQ_2、CQ_3、DQ_4 在四面体 $ABCD$ 内也必相交于一点。

设 AQ_1、BQ_2、CQ_3、DQ_4 的交点为 Q，将点 P 与点 Q 称作四面体 $ABCD$ 内的一对等距共轭点。

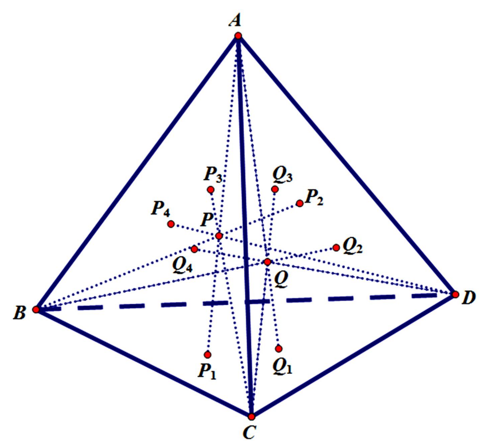

Figure 2. Isometry conjugate points in the tetrahedron
图 2. 四面体的等距共轭点

令 O 为坐标原点，若 $\boldsymbol{OP}=\dfrac{a\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}+d\cdot\boldsymbol{OD}}{a+b+c+d}$，$a,b,c,d>0$，则

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

$$\boldsymbol{OQ}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}。$$

证明： 因为 P_1 在三角形 BCD 内，设

$$\boldsymbol{OP_1}=x\cdot\boldsymbol{OB}+y\cdot\boldsymbol{OC}+(1-x-y)\cdot\boldsymbol{OD}，\quad 0<x<1，\quad 0<y<1，\quad 0<x+y<1，$$

则

$$\boldsymbol{PP_1}=\boldsymbol{OP_1}-\boldsymbol{OP}$$
$$=\frac{-a\cdot\boldsymbol{OA}+\left[(a+b+c+d)x-b\right]\cdot\boldsymbol{OB}+\left[(a+b+c+d)y-c\right]\cdot\boldsymbol{OC}+\left[(a+b+c+d)(1-x-y)-d\right]\cdot\boldsymbol{OD}}{a+b+c+d}。$$

由于 A、P、 P_1 三点共线，且

$$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{OP}-\boldsymbol{OA}=\frac{-(b+c+d)\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}+d\cdot\boldsymbol{OD}}{a+b+c+d},$$

比较 $\boldsymbol{PP_1}$ 与 $\boldsymbol{OP}$ 关于 $\boldsymbol{OA}$ 、 $\boldsymbol{OB}$ 、 $\boldsymbol{OC}$ 、 $\boldsymbol{OD}$ 的系数可得

$$\frac{a}{b+c+d}=\frac{(a+b+c+d)x-b}{b}=\frac{(a+b+c+d)y-c}{c}=\frac{(a+b+c+d)(1-x-y)-d}{d},$$

即

$$x=\frac{b}{b+c+d}，\quad y=\frac{c}{b+c+d}，\quad \boldsymbol{OP_1}=\frac{b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}+d\cdot\boldsymbol{OD}}{b+c+d}。$$

同理

$$\boldsymbol{OP_2}=\frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+c\cdot\boldsymbol{OC}+d\cdot\boldsymbol{OD}}{a+c+d},$$

$$\boldsymbol{OP_3}=\frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+d\cdot\boldsymbol{OD}}{a+b+d},$$

$$\boldsymbol{OP_4}=\frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+b\cdot\boldsymbol{OB}+c\cdot\boldsymbol{OC}}{a+b+c}。$$

因为 P_1 与 Q_1 为三角形 BCD 内的一对等距共轭点，由引言可得

$$\boldsymbol{OQ_1}=\frac{\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}};$$

同理

$$\boldsymbol{OQ_2}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

$$\boldsymbol{OQ_3}=\frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}},$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

$$\boldsymbol{OQ}_4 = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}。$$

令

$$\boldsymbol{OQ} = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}。$$

设AQ、BQ、CQ、DQ各线段的延长线分别与三角形BCD、ACD、ABD、ABC交于Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4'。仿照前面求$\boldsymbol{OP}_1$、$\boldsymbol{OP}_2$、$\boldsymbol{OP}_3$、$\boldsymbol{OP}_4$的方法可求得

$$\boldsymbol{OQ}_1' = \frac{\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},\quad \boldsymbol{OQ}_2' = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}},$$

$$\boldsymbol{OQ}_3' = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{d}\cdot\boldsymbol{OD}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{d}},\quad \boldsymbol{OQ}_4' = \frac{\frac{1}{a}\cdot\boldsymbol{OA}+\frac{1}{b}\cdot\boldsymbol{OB}+\frac{1}{c}\cdot\boldsymbol{OC}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}。$$

故Q_1'、Q_2'、Q_3'、Q_4'分别与Q_1、Q_2、Q_3、Q_4重合，Q即为AQ_1、BQ_2、CQ_3、DQ_4在四面体$ABCD$内的交点。命题得证。

3. N 维单形的等距共轭点

n维单形$A_0A_1A_2\cdots A_n$各顶点A_i所对的$n-1$维单形为S_i，P_i与Q_i为S_i内的一对等距共轭点，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。若A_0P_0、A_1P_1、A_2P_2、$\cdots$、A_nP_n在n维单形$A_0A_1A_2\cdots A_n$内相交于点P，则A_0Q_0、A_1Q_1、A_2Q_2、$\cdots$、A_nQ_n在n维单形$A_0A_1A_2\cdots A_n$内也必相交于一点。

设A_0Q_0、A_1Q_1、A_2Q_2、$\cdots$、A_nQ_n的交点为Q，将点P与点Q称作n维单形$A_0A_1A_2\cdots A_n$内的一对等距共轭点。

令O为坐标原点，若$\boldsymbol{OP} = \dfrac{\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\boldsymbol{OA}_i}{\sum_{i=0}^{n} a_i}$，$a_i>0$，$0\le i\le n$，则

$$\boldsymbol{OQ} = \frac{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\cdot\boldsymbol{OA}_i}{\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}}。$$

证明：前面已经证明了当$n=3$时命题成立。假设当$n=k$时命题同样成立$(k\ge 3, k\in Z)$，现使用数学归纳法证明当$n=k+1$时命题依然成立。

因为P_0在A_0所对的k维单形S_0内，设

$$\boldsymbol{OP}_0 = \sum_{i=1}^{k} x_i\cdot\boldsymbol{OA}_i + \left(1-\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\cdot\boldsymbol{OA}_{k+1},\quad 0<x_i<1,\quad 0<\sum_{i=1}^{k} x_i<1,\quad 0\le i\le k,$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

则

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{PP}_0 &= \boldsymbol{OP}_0 - \boldsymbol{OP} \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \boldsymbol{OA}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} x_i\right) \cdot \boldsymbol{OA}_{k+1} - \frac{a_0 \cdot \boldsymbol{OA}_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \boldsymbol{OA}_i + a_{k+1} \cdot \boldsymbol{OA}_{k+1}}{\sum_{i=0}^{k+1} a_i} \\
&= \frac{-a_0 \cdot \boldsymbol{OA}_0 + \sum_{i=1}^{k} \left[x_i \left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j \right) - a_i \right] \cdot \boldsymbol{OA}_i + \left[\left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j \right) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{k} x_i \right) - a_{k+1} \right] \cdot \boldsymbol{OA}_{k+1}}{\sum_{j=0}^{k+1} a_j}
\end{aligned}
$$

。

由于 A_0、P、P_0 三点共线，且

$$
\boldsymbol{A_0P} = \boldsymbol{OP} - \boldsymbol{OA}_0 = \frac{-\sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \boldsymbol{OA}_0 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i \cdot \boldsymbol{OA}_i}{\sum_{i=0}^{k+1} a_i},
$$

比较 $\boldsymbol{PP}_0$ 与 $\boldsymbol{A_0P}$ 关于 $\boldsymbol{OA}_i$ 的系数，$0 \le i \le k+1$，可得

$$
\frac{a_0}{\sum_{j=1}^{k+1} a_j} = \frac{x_i \left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j \right) - a_i}{a_i} = \frac{\left(\sum_{j=0}^{k+1} a_j \right) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{k} x_i \right) - a_{k+1}}{a_{k+1}}, \quad 0 \le i \le k \text{。}
$$

即

$$
x_i = \frac{a_i}{\sum_{j=1}^{k+1} a_j}, \quad \boldsymbol{OP}_0 = \frac{\sum_{j=1}^{k+1} a_j \cdot \boldsymbol{OA}_j}{\sum_{j=1}^{k+1} a_j}, \quad 0 \le i \le k \text{。}
$$

同理

$$
\boldsymbol{OP}_i = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} a_j \cdot \boldsymbol{OA}_j - a_i \cdot \boldsymbol{OA}_i}{\sum_{j=0}^{k+1} a_j - a_i}, \quad 0 \le i \le k+1 \text{。}
$$

因为 P_i 与 Q_i 为 S_i 内的一对等距共轭点，由归纳假设可得

$$
\boldsymbol{OQ}_i = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{a_j} \cdot \boldsymbol{OA}_j - \frac{1}{a_i} \cdot \boldsymbol{OA}_i}{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}}, \quad 0 \le i \le k+1 \text{。}
$$

令

$$
\boldsymbol{OQ} = \frac{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{a_i} \cdot \boldsymbol{OA}_i}{\sum_{i=0}^{k+1} \frac{1}{a_i}} \text{。}
$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021

设 A_iQ 的延长线分别与 k 维超平面 S_i 交于 Q_i'，$0 \le i \le k+1$。仿照前面求 $\boldsymbol{OP}_i$ 的方法可求得

$$\boldsymbol{OQ}_i' = \frac{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{a_j} \cdot \boldsymbol{OA}_j - \frac{1}{a_i} \cdot \boldsymbol{OA}_i}{\sum_{j=0}^{k+1} \frac{1}{a_j} - \frac{1}{a_i}}, \quad 0 \le i \le k+1。$$

故 Q_i' 与 Q_i 重合，$0 \le i \le k+1$，Q 即为各直线 A_iQ_i 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 内的交点。命题得证。

参考文献

[1] 曾建国. 四面体的等距共轭点及其性质[J]. 数学通讯, 2006, 15: 32-33.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61009. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 5 June 2021, publ: 8 June 2021