一类三角形面积公式的高维推广

郭绮曼

中山大学数学系，广州，中国
Email: 13318769382m@sina.cn

收稿日期：2021年8月9日；发布日期：2021年8月11日

摘　要

已知三角形的任意两个内角与两角所夹边长即可计算出该三角形的面积，本文将该类三角形面积公式推广至***n***维单形，给出了关于***n***维单形的二面角、棱面角、***n***-**1**维子单形、***n***-**2**维子单形之间的关系。

关键词

三角形，***n***维单形，面积，子单形，二面角

The High Dimensional Generalization of a Kind of Area Formula for the Triangle

Qiman Guo

Mathematics Department, Sun Yat sen University, Guangzhou, China
Email: 13318769382m@sina.cn

Received: Aug. 9th, 2021, published: Aug. 11th, 2021

Abstract

The area of a triangle can be calculated by known any two internal angles of the triangle and the side length between the two angles. In this paper, this kind of area formula for the triangle is extended to *n*-simplex, the relations among the dihedral angle, the line plane angle, the *n*-1-sub-simplexand the *n*-2-sub-simplex for the n-simplex are given.

Keywords

Triangle, *n*-Simplex, Area, Sub-Simplex, Dihedral Angle

1. 引言

例 1 假设三角形 ABC 的面积为 S，$\angle A=\theta_1$，$\angle B=\theta_2$，$\angle C=\theta_3$，$AB=a$；则

$$S=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\sin\theta_3}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2}{\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\cot\theta_1+\cot\theta_2}。$$

例 2 已知四面体 $ABCD$ 六条棱所夹的二面角分别为 θ_{AB}、θ_{AC}、θ_{AD}、θ_{BC}、θ_{BD}、θ_{CD}。三角形 ABC、ACD、BCD、ABD 的面积分别为 S_0、S_1、S_2、S_3。则：

$$AB^2\csc^2\theta_{AB}=\left(AB\cot\theta_{AB}+AC\cot\theta_{AC}+BC\cot\theta_{BC}\right)\left(AB\cot\theta_{AB}+AD\cot\theta_{AD}+BD\cot\theta_{BD}\right)；$$

$$AB\csc\theta_{AB}+CD\csc\theta_{CD}\le AB\cot\theta_{AB}+AC\cot\theta_{AC}+AD\cot\theta_{AD}+BC\cot\theta_{BC}+BD\cot\theta_{BD}+CD\cot\theta_{CD}，$$

上面不等式中的等号成立当且仅当 $S_1=S_2$ 且 $S_0=S_3$；

$$\begin{aligned}&AB\csc\theta_{AB}+AC\csc\theta_{AC}+AD\csc\theta_{AD}+BC\csc\theta_{BC}+BD\csc\theta_{BD}+CD\csc\theta_{CD}\\&\le 3\left(AB\cot\theta_{AB}+AC\cot\theta_{AC}+AD\cot\theta_{AD}+BC\cot\theta_{BC}+BD\cot\theta_{BD}+CD\cot\theta_{CD}\right),\end{aligned}$$

上面不等式中的等号成立当且仅当四面体 $ABCD$ 为等面四面体。

本文通过将例 1 推广至 n 维单形，进而给出例 2 在 n 维单形上的广义形式并从中得出例 2。下面先介绍几个引理：

引理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，$0\le i<j\le n$。则

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}S_i\cos\theta_{0i}。[1]$$

引理 2 设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 V，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 f_{ij}，$0\le i<j\le n$。则

$$V=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_iS_j}{f_{ij}}\cdot\sin\theta_{ij}。[2]$$

引理 3 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。用 $\left\langle A_iA_j,S_i\right\rangle$、$\left\langle A_iA_j,S_j\right\rangle$ 表示线段 A_iA_j 分别与 S_i、S_j 所夹的棱面角，$0\le i<j\le n$。则

$$\frac{S_i}{S_j}=\frac{\csc\left\langle A_iA_j,S_i\right\rangle}{\csc\left\langle A_iA_j,S_j\right\rangle}。$$

引理 3 的证明： 设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 V，根据棱面角的性质有

$$V=\frac{S_i\cdot A_iA_j\cdot\sin\left\langle A_iA_j,S_i\right\rangle}{n}=\frac{S_j\cdot A_iA_j\cdot\sin\left\langle A_iA_j,S_j\right\rangle}{n}。$$

化简即得

$$\frac{S_i}{S_j}=\frac{\sin\left\langle A_iA_j,S_j\right\rangle}{\sin\left\langle A_iA_j,S_i\right\rangle}=\frac{\csc\left\langle A_iA_j,S_i\right\rangle}{\csc\left\langle A_iA_j,S_j\right\rangle}。$$

2. 预备知识

定理 1 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。S_i 与

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 9 August 2021, publ: 11 August 2021

S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 f_{ij}，$0\le i<j\le n$。设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 V，则

$$V=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_0^2}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\cot\theta_{0i}}。$$

定理 1 的证明： 在 S_i 中，过 A_0 作垂直于 f_{0i} 所在的 $n-2$ 维超平面的高，记作 h_i，$1\le i\le n$。再设在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中垂直于底面 S_0 的高为 h。则有

$$h=h_i\sin\theta_{0i};$$

又由引理 1 有

$$S_0=\sum_{i=1}^{n}S_i\cos\theta_{0i}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}f_{0i}h_i\cos\theta_{0i}=\frac{h}{n-1}\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i},$$

即

$$h=\frac{(n-1)S_0}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\cot\theta_{0i}}。$$

因此

$$V=\frac{S_0h}{n}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_0^2}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\cot\theta_{0i}}。$$

3. 主要结论

定理 2 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 f_{ij}，用 $\langle A_iA_j,S_i\rangle$、$\langle A_iA_j,S_j\rangle$ 表示线段 A_iA_j 分别与 S_i、S_j 所夹的棱面角，$0\le i<j\le n$。则

$$\frac{S_i}{S_0}=\frac{\csc\langle A_0A_i,S_i\rangle}{\csc\langle A_0A_i,S_0\rangle}=\frac{f_{0i}\csc\theta_{0i}}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\cot\theta_{0i}},\quad 1\le i\le n;$$

$$f_{0n}^2\csc^2\theta_{0n}=\left(\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}\right);$$

$$\sum_{0\le i<j\le n}f_{ij}\csc\theta_{ij}\le n\sum_{0\le i<j\le n}f_{ij}\cot\theta_{ij},$$

上面不等式中等号成立的充要条件为 $S_0=S_1=S_2=\cdots=S_n$。

定理 2 的证明： 设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 V，由定理 1 和引理 2 有

$$V=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_0^2}{\sum_{i=1}^{n} f_{0i}\cot\theta_{0i}}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_0S_i}{f_{0i}}\cdot\sin\theta_{0i},\quad 1\le i\le n。$$

对上式进行整理并代入引理 3 可得

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 9 August 2021, publ: 11 August 2021

$$\frac{S_i}{S_0}=\frac{\csc\langle A_0A_i,S_i\rangle}{\csc\langle A_0A_i,S_0\rangle}=\frac{f_{0i}}{\sin\theta_{0i}\cdot\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}}=\frac{f_{0i}\csc\theta_{0i}}{\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}}\text{，}\quad 1\le i\le n\text{。}$$

再由上式可知

$$\frac{S_n}{S_0}=\frac{\csc\langle A_0A_n,S_n\rangle}{\csc\langle A_0A_n,S_0\rangle}=\frac{f_{0n}\csc\theta_{0n}}{\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}}\text{，}$$

同理

$$\frac{S_0}{S_n}=\frac{\csc\langle A_0A_n,S_0\rangle}{\csc\langle A_0A_n,S_n\rangle}=\frac{f_{0n}\csc\theta_{0n}}{\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}}\text{；}$$

将上面两式对应相乘并整理即得

$$f_{0n}^2\csc^2\theta_{0n}=\left(\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}\right)\text{。}$$

对上式左右两边开平方并运用均值不等式可得

$$f_{0n}\csc\theta_{0n}=\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}\right)\left(\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}\right)}\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f_{0i}\cot\theta_{0i}+f_{in}\cot\theta_{in}\right)+f_{0n}\cot\theta_{0n}\text{。}\tag{1}$$

不等式(1)中等号成立的充要条件为

$$\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}=\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}\text{。}$$

又由定理 1 知

$$\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_0^2}{V}\text{，}\quad\sum_{i=0}^{n-1}f_{in}\cot\theta_{in}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_n^2}{V}\text{，}$$

故不等式(1)中等号成立的充要条件为 $S_0=S_n$。

同理，在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，类似(1)的不等式共有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个，将这 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个不等式左右两边分别相加即得

$$\sum_{0\le i<j\le n}f_{ij}\csc\theta_{ij}\le n\sum_{0\le i<j\le n}f_{ij}\cot\theta_{ij}\text{，}$$

上面不等式中等号成立的充要条件为 $S_0=S_1=S_2=\cdots=S_n$。

综上，命题得证。

根据定理 2，只需令 $n=3$ 且

$$f_{01}=AC\text{，}\ f_{02}=BC\text{，}\ f_{03}=AB\text{，}\ f_{12}=CD\text{，}\ f_{13}=AD\text{，}\ f_{23}=BD\text{，}$$
$$\theta_{01}=\theta_{AC}\text{，}\ \theta_{02}=\theta_{BC}\text{，}\ \theta_{03}=\theta_{AB}\text{，}\ \theta_{12}=\theta_{CD}\text{，}\ \theta_{13}=\theta_{AD}\text{，}\ \theta_{23}=\theta_{BD}\text{，}$$

即可证得引言中的例 2。

定理 3 在 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 中，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面及其体积为 S_i，$0\le i\le n$，$n\ge 3$。S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，用 $\langle A_iA_j,S_i\rangle$、$\langle A_iA_j,S_j\rangle$ 表示线段 A_iA_j 分别与 S_i、S_j 所夹的棱面角，$0\le i<j\le n$。则

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 9 August 2021, publ: 11 August 2021

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1-\gamma_1 & \alpha_1\beta_2 & \cdots & \alpha_1\beta_n \\ \alpha_2\beta_1 & \alpha_2\beta_2-\gamma_2 & \cdots & \alpha_2\beta_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n\beta_1 & \alpha_n\beta_2 & \cdots & \alpha_n\beta_n-\gamma_n \end{vmatrix}=0\text{；}$$

其中

$$\begin{cases} \alpha_i=\sin\left\langle A_0A_i,S_0\right\rangle \\ \beta_i=\cos\theta_{0i} \\ \gamma_i=\sin\left\langle A_0A_i,S_i\right\rangle \end{cases}\text{，}\quad 1\le i\le n\text{。}$$

定理 3 的证明：设 S_i 与 S_j 所交的 $n-2$ 维单形及其体积为 f_{ij}， $0\le i<j\le n$。由定理 2 有

$$\sin\left\langle A_0A_i,S_0\right\rangle\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\cot\theta_{0i}=f_{0i}\sin\left\langle A_0A_i,S_i\right\rangle\cdot\csc\theta_{0i}\text{，}\quad 1\le i\le n\text{；}$$

令

$$\delta_i=\cot\theta_{0i}\text{，}\quad \delta_i'=\csc\theta_{0i}\text{；}$$

则

$$\alpha_i\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\delta_i=\alpha_i\sum_{i=1}^{n}f_{0i}\beta_i\delta_i'=f_{0i}\gamma_i\delta_i'\text{，}\quad 1\le i\le n\text{。}$$

由上式可以得到一个关于 f_{01}、 f_{02}、 $\cdots$、 f_{0n} 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} \alpha_1\left(f_{01}\beta_1\delta_1'+f_{02}\beta_2\delta_2'+\cdots+f_{0n}\beta_n\delta_n'\right)=f_{01}\gamma_1\delta_1' \\ \alpha_2\left(f_{01}\beta_1\delta_1'+f_{02}\beta_2\delta_2'+\cdots+f_{0n}\beta_n\delta_n'\right)=f_{02}\gamma_2\delta_2' \\ \qquad\vdots \\ \alpha_n\left(f_{01}\beta_1\delta_1'+f_{02}\beta_2\delta_2'+\cdots+f_{0n}\beta_n\delta_n'\right)=f_{0n}\gamma_n\delta_n' \end{cases}\text{。}$$

因为 f_{01}、 f_{02}、 $\cdots$、 f_{0n} 存在非零解，故上述齐次线性方程组的系数行列式为零，即

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1\delta_1'-\gamma_1\delta_1' & \alpha_1\beta_2\delta_2' & \cdots & \alpha_1\beta_n\delta_n' \\ \alpha_2\beta_1\delta_1' & \alpha_2\beta_2\delta_2'-\gamma_2\delta_2' & \cdots & \alpha_2\beta_n\delta_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\beta_1\delta_1' & \alpha_n\beta_2\delta_2' & \cdots & \alpha_n\beta_n\delta_n'-\gamma_n\delta_n' \end{vmatrix}=0\text{。}$$

将上面行列式的每一列分别消去 δ_i' 即可证得命题。

参考文献

[1] 王学斌. E_n 空间二面角的另一类不等式[J]. 岳阳师范学院学报(自然科学版), 2000, 13(4): 6-11.
[2] 苏化明. 关于单形二面角平分面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1992,12(3): 315-318.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61010. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 9 August 2021, publ: 11 August 2021