

# 椅式双排桩支护结构内力变形分析方法及影响因素

贺斯顿, 刘杰, 汪智, 李义

湖南工业大学, 土木工程学院, 湖南 株洲  
Email: 313491636@qq.com

收稿日期: 2021年3月29日; 录用日期: 2021年4月18日; 发布日期: 2021年4月25日

## 摘要

作为一种新型的支挡结构形式—椅式双排桩, 现在还没有一种有效而又简单的设计计算方法可用于工程设计, 从而使得工程技术人员很困惑。本文在不考虑桩的竖向荷载传递规律及空间效应的前提下, 基于Winkler地基梁基本思想, 将传递矩阵法与平面杆系有限元相结合, 提出了椅式双排桩内力及变形分析的混合算法, 编制了相应的Matlab计算程序, 并应用于实际工程, 同时, 进行了相应的影响因素分析。工程应用结果表明, 计算位移与监测位移具有较好的一致性, 理论计算结果有较好的规律性和可比性, 可供椅式双排桩支护结构设计计算参考。

## 关键词

椅式双排桩, 传递矩阵法, Winkler地基, 弹性抗力系数

## Analysis Method of Internal Force Deformation and Influencing Factors of Chair-Type Double-Row Pile Supporting Structure

Sidun He, Jie Liu, Zhi Wang, Yi Li

College of Civil Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan  
Email: 313491636@qq.com

Received: Mar. 29<sup>th</sup>, 2021; accepted: Apr. 18<sup>th</sup>, 2021; published: Apr. 25<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

As a new type of deep foundation pit supporting structure, there is no simple and effective design me-

thod for chair double row piles at present. Based on the basic idea of Winkler foundation beam and ignoring the vertical friction effect and spatial effect of pile-soil, this paper combines the load transfer matrix method with the plane bar system to construct the global stiffness matrix for the performance analysis of chair type double row piles, compiles the corresponding matlab calculation procedure, and carries out the corresponding engineering calculation and the analysis of the influencing factors. The engineering calculation results show that the calculated displacement and the monitored displacement have good consistency, and the calculated internal force has good regularity and comparability, which can be used as reference for the design of chair type double row pile supporting structure.

## Keywords

Chair Type Double Row Pile, Load Transfer Matrix Method, Winkler Foundation, Elastic Resistance Coefficient

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

近年来,随着高层建筑、道路与铁道、地下工程的不断兴建,工程界对基坑支护及边坡支挡技术的要求也越来越高[1] [2] [3] [4],由两排平行的长短不同的前后排钢筋混凝土桩以及连接前后排桩的联系梁组成的空间椅式围护体系,即椅式双排桩支护结构得到了应用。与单排及双排桩支护结构比较,椅式双排桩支护结构的受力变形机理及其设计计算更为复杂,学界尚缺乏权威探讨。权威软件如理正岩土及理正深基坑和 GEO5 软件中不见相关模型与方法。在《建筑基坑支护技术规程》(JGJ120-2012)及《建筑边坡工程技术规范》(GB50330-2002)中,也找不到相关模型及方法来分析椅式双排桩支护结构的内力及变形。

一般认为在设计原理上,椅式双排桩支护结构与门型双排桩支护结构是相通的,甚至可以说后者是前者产生的基础,因此在工程实践中,技术人员一般承袭后者通用模型及算法对前者的内力和变形进行分析探讨,从而取得其设计计算相关数据并应用于实践。我国学者对门型双排桩支护结构工作性状已进行过诸多模型试验及理论分析方法的探讨,形成了较为系统的内力及变形分析方法[5]-[10]。但对椅式双排桩支护结构内力及变形分析方法的研究还远远不能满足工程实践的需要。有学者对椅式双排抗滑桩用有限元等手段进行过相关研究与讨论[11] [12],但并未形成便于工程应用的理论分析方法。有限元分析尽管具有易于模拟材料特性、边界条件及接触面特性等特点,但对材料模型试验参数的精确度要求较高,对桩的弯曲特性模拟及具体处理上存在一些问题,且存在计算时间长,计算参数难以从地勘报告中获取等,难以被工程技术人员所掌握。

本文基于 Winkler 地基梁思想及土力学相关理论与方法,建立了桩土相互作用的力学模型,结合传递矩阵法和平面杆系有限元法,针对椅式双排桩支护结构内力与变形分析,提出了混合法有限元分析方法,并与实际工程变形监测结果进行了对比,证明了模型与方法的可行性。该方法具有计算速度快,计算参数容易确定等特点。

## 2. 混合有限元模型

### 2.1. 基本假定及计算方法

- 1) 不考虑桩的竖向荷载传递规律及支护结构空间效应;假定双排桩(坡脚以下)嵌固段为弹性地基梁。

2) 前后排桩桩净距满足  $B < H_2 \tan(45^\circ - \phi/2)$ ，以确保支护结构的超静定性而不至于变异为锚拉结构。其中： $H_2$  是基坑开挖深度或边坡高度(m)； $\phi$  为桩间土的内摩擦角( $^\circ$ )，坑底以上各土层取内摩擦角加权平均值。

3) 桩间土因前后排桩约束而看成无限长弹性体，基于弹性力学理论可得：桩间土作用在前后排桩上土压力计算公式为： $\sigma = \mu\gamma z/(1-\mu)$ 。式中： $\mu$ 、 $\gamma$ 、 $z$  分别为土的泊松比、土的重度( $\text{kN/m}^3$ )和深度(m)。由此可得作用在前后排桩上坡脚处的土压力为： $p_1 = \mu\gamma H/(1-\mu)$ ， $H$  为基坑深度或边坡高度(m)， $H = H_1 + H_2$ ， $H_1$  为联系梁以后的排桩高度； $H_2$  为前排桩坡脚至联系梁的距离(m)。

4) 基于《建筑基坑支护技术规程》(JGJ120-2012)排桩支护土压分布计算简图及上述假定，可得作用在前排桩嵌固段上的土压力为矩形分布，其大小为： $p_1 = \mu\gamma H/(1-\mu)$ 。

5) 基于已有深基坑悬臂支护结构关于土压力分布规律的研究及朗肯土压力理论，假设作用在后排桩坡脚以上土压力可假设为三角形或梯形，坡脚为最大值；坡脚至桩底的土压力( $p_3$ )为梯形分布，其大小为：

$$p_2 = (\gamma z + q)K_a - 2c\sqrt{K_a} \quad (1)$$

$$p_3 = (\gamma H + q)K_a - 2c\sqrt{K_a} \quad (2)$$

式中： $\gamma$ 、 $z$ 、 $q$ 、 $c$  分别为土的重度( $\text{kN/m}^3$ )、深度(m)、地面超载( $\text{kN/m}^2$ )及坡脚以上土的黏聚力(kPa) (成层土取土的黏聚力及重度的加权平均值)； $K_a$  为主动土压力系数， $K_a = \tan^2(45^\circ - \phi/2)$ ， $\phi$  为土内摩擦角( $^\circ$ )，其中坑底以上成层土用内摩擦角加权平均值进行计算；计算简图如图 1 所示。

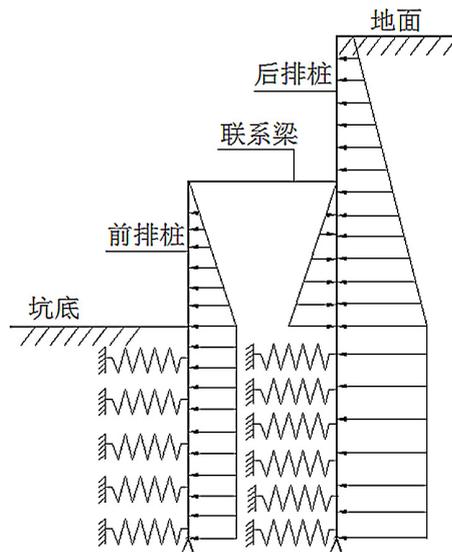


Figure 1. Computing model

图 1. 计算简图

## 2.2. 模型建立

### 1) 嵌固段传递矩阵建立

以嵌固段顶为坐标原点，桩轴线标为  $z$  轴，水平方向为  $x$  轴，在水平荷载作用下，前后排桩的嵌固段控制微分方程可用式(3)表示：

$$EI \frac{d^4 x}{dz^4} + Bmx = p \quad (3)$$

式中： $E$ 、 $m$ 、 $p$ 、 $I$ 、 $x$ 、 $z$ 、 $B$  分别为该桩弹性模量(揭示桩身弹性变形难易程度)、地基土的水平抗力系数比例系数(该数值为基坑开挖面以下 2 m 范围内各土层的综合值)、桩上土压力(kN/m)、桩截面惯性矩(m<sup>4</sup>)、桩的水平变形(m)、计算点的深度(m)、桩宽(m)。

根据嵌固段土层分布，将嵌固段分为  $n$  段，由式(3)可得第  $i$  段桩的控制微分方程为：

$$EI \frac{d^2 x}{dz^2} + 4\alpha_i^4 x = p_i \quad (4)$$

式中，桩的变形系数  $\alpha_i = \sqrt[4]{mz_i B / (4EI)}$ ， $z_i$  为第  $i$  段中点的深度(m)， $p_i$  为土压力(kN/m)。

由常微分方程理论可得嵌固段桩身第  $i$  截面之解为式(5)：

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_{i-1} A_{1z} + \frac{\phi_{i-1}}{\alpha_i} B_{1z} + \frac{M_{i-1}}{\alpha_i^2 EI} C_{1z} + \frac{Q_{i-1}}{\alpha_i^3 EI} D_{1z} + \frac{p_i}{4\alpha_i^4} \\ \phi_i &= \alpha_i \left[ x_{i-1} A_{2z} + \frac{\phi_{i-1}}{\alpha_i} B_{2z} + \frac{M_{i-1}}{\alpha_i^2 EI} C_{2z} + \frac{Q_{i-1}}{\alpha_i^3 EI} D_{2z} \right] \\ \frac{M_i}{\alpha_i^2 EI} &= x_{i-1} A_{3z} + \frac{\phi_{i-1}}{\alpha_i} B_{3z} + \frac{M_{i-1}}{\alpha_i^2 EI} C_{3z} + \frac{Q_{i-1}}{\alpha_i^3 EI} D_{3z} \\ \frac{Q_i}{\alpha_i^3 EI} &= x_{i-1} A_{4z} + \frac{\phi_{i-1}}{\alpha_i} B_{4z} + \frac{M_{i-1}}{\alpha_i^2 EI} C_{4z} + \frac{Q_{i-1}}{\alpha_i^3 EI} D_{4z} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中： $x_i$ 、 $\phi_i$ 、 $M_i$ 、 $Q_i$ 、 $p_i$  分别为第  $i$  截面变形(m)、转角(rad)、弯矩(kN.m)、剪力(kN)和土压力(kN/m)。  
 $A_{kz}$ 、 $B_{kz}$ 、 $C_{kz}$ 、 $D_{kz}$  ( $k=1,2,3,4$ ) 为无因次参数。

$$\left. \begin{aligned} A_{1z} &= \cos(\alpha_i z) ch(\alpha_i z) \\ B_{1z} &= [\sin(\alpha_i z) ch(\alpha_i z) + \cos(\alpha_i z) sh(\alpha_i z)] / 2 \\ C_{1z} &= \sin(\alpha_i z) sh(\alpha_i z) / 2 \\ D_{1z} &= [\sin(\alpha_i z) ch(\alpha_i z) - \cos(\alpha_i z) sh(\alpha_i z)] / 4 \\ A_{2z} &= -4D_{1z}; A_{3z} = -4C_{1z}; A_{4z} = -4B_{1z} \\ B_{2z} &= A_{1z}; B_{3z} = -4D_{1z}; B_{4z} = -4C_{1z} \\ C_{2z} &= B_{1z}; C_{3z} = A_{1z}; C_{4z} = -4D_{1z} \\ D_{2z} &= C_{1z}; D_{3z} = B_{1z}; D_{4z} = A_{1z} \end{aligned} \right\}$$

为方便程序实现，式(5)可用如下矩阵形式表述：

$$\{u_i\} = [H_i] \{u_{i-1}\} + \{P_i\} \quad (6)$$

式中： $\{u_i\} = \{x_i, \phi_i, M_i, Q_i\}$ ； $\{H_i\}$  为传递矩阵； $\{P_i\} = \{p_i / (4\alpha_i^4) \quad 0 \quad 0 \quad 0\}$ ； $[H_i] = [H_1] \cdot [H_2] \cdot [H_3]$ 。

$$[H_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_i^2 EI & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i^3 EI \end{bmatrix}$$

$$[H_2] = \begin{bmatrix} A_{1z} & B_{1z} & C_{1z} & D_{1z} \\ A_{2z} & B_{2z} & C_{2z} & D_{2z} \\ A_{3z} & B_{3z} & C_{3z} & D_{3z} \\ A_{4z} & B_{4z} & C_{4z} & D_{4z} \end{bmatrix}$$

$$[H_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\alpha_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/(\alpha_i^2 EI) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/(\alpha_i^3 EI) \end{bmatrix}$$

基于各段节点处的变形连续性条件及节点力的平衡条件可得嵌固段顶部与底部内力与变形之间的关系式(7):

$$\{u_n\} = \prod_{i=n}^1 [H_i] \{u_0\} + \prod_{i=n}^2 [H_i] \{P_1\} + \dots + \prod_{i=n}^j [H_i] \{P_{j-1}\} + \dots + \prod_{i=n}^n [H_i] \{P_{n-1}\} + \{P_n\} \quad (7)$$

桩端约束类型如式(8):

$$\left. \begin{aligned} \text{桩底为铰支时: } M_n = 0, x_n = 0 \\ \text{桩底为固支时: } x_n = 0, \phi_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

根据支护桩桩端实际嵌固情况,在确定了相应约束类型后,联立式(6)、式(7)和相应的约束类型,可获得嵌固段各节点的变形及内力。

### 2) 坡脚以上平面刚架刚度矩阵建立

根据平面杆系有限元法,在单元局部坐标系下,杆端力及杆端位移关系可表述如下:

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (9)$$

式中:  $\{F\}^e = \{Q_i M_i Q_j M_j\}$  为杆端节点力列阵;  $\{\delta\}^e = \{x_i \phi_i x_j \phi_j\}$  为杆端节点位移列阵;  $\{k\}^e$  为单元刚度矩阵。

$$[k]^e = \begin{bmatrix} 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 4EI/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ 6EI/l^2 & 2EI/l & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix}$$

基于各单元节点处的变形协调条件及节点力平衡条件可得,平面刚架单元节点力与节点位移关系式(10):

$$\{F\} = [k]\{\delta\} \quad (10)$$

式中:  $\{F\}$  为其平面刚架单元节点荷载列阵;  $\{\delta\}$  为其平面刚架单元节点位移列阵;  $\{k\}$  为其平面刚架整体刚度矩阵。

### 3) 总体刚度矩阵

基于桩嵌固段与平面刚架相交节点处的变形连续性条件及节点力平衡条件可得,椅式双排支护结构节点力与节点位移的关系式(11):

$$\{F\} = [K]\{\delta\} \quad (11)$$

式中:  $\{K\}$  为支护结构总体刚度矩阵。

## 3. 算例分析

### 3.1. 工程概况

为验证方法的可靠性,现以株洲万博珑 B 馆基坑工程某支护段为计算对象。结合现场(包括地坪、周

边路面与场地整体整平)标高,本基坑工程支护设计总长度约460 m,因整个工地北低南高,根据地红线与地下室边线距离,各支护段高度从4.5 m至9.0 m不等。场地土层分布厚度自上而下分别为4.1 m、5.3m、和6.2 m,各层参数见表1。基坑深度为9.0 m。

### 3.2. 支护结构内力与变形计算

桩顶设计标高根据现场地面标高确定,根据场地条件,后排桩顶标高比前桩高4.0 m,如图1所示。图中,各桩直径均为1.0 m,前后排桩桩间距均为2.0 m,前后排桩排距为4.0 m。连接前后排桩的钢筋混凝土板厚为800 mm,所有混凝土构件混凝土强度等级为C30。

Table 1. Physical Parameters of Soil

表 1. 土层物理参数

土层编号	土层名称	重度(KN/m <sup>3</sup> )	内摩擦角(°)	粘聚力(kPa)
①	素填土	19.5	10.0	10.0
②	粉质黏土	20.1	16.0	30.5
③	强风化泥质粉砂岩	23.2	40 (综合内摩擦角)	
④	中风化泥质粉砂岩	24.3	48 (综合内摩擦角)	

计算时,将桩端视为铰支座,且分为两个工况,第一工况指从地面至4.5 m处,第二工况指完成连梁施工后,继续向下开挖至坑底。计算分段长度取0.5 m,计算简图如图1所示。计算中采用的水平抗力系数比例系数按《建筑基坑支护技术规程》(JGJ120-2012)相关公式计算获得。

$$m = \frac{0.2\varphi^2 - \varphi + c}{v_b} \tag{12}$$

式中:  $c, \varphi$  分别代表黏聚力(kPa)和内摩擦角(°);  $v_b$  指的是坑底水平位移(mm),取  $v_b = 10$  mm。

图2为工况一计算结果,图3为工况二计算结果。

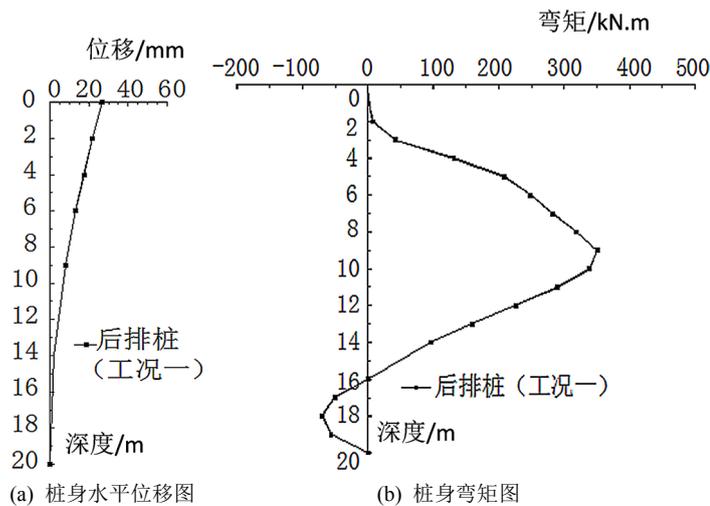
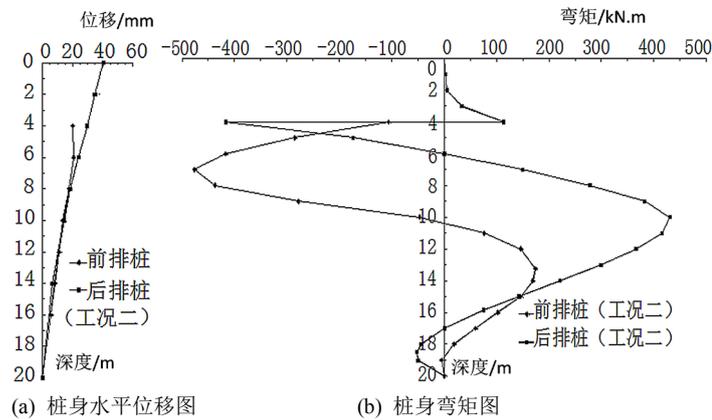


Figure 2. Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 1)

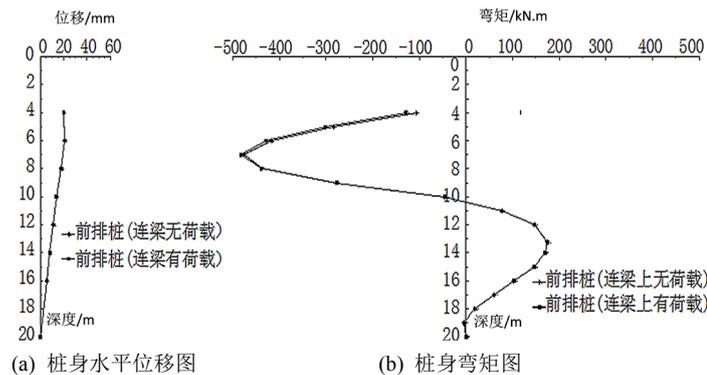
图 2. 椅式双排桩支护结构计算结果(工况一)



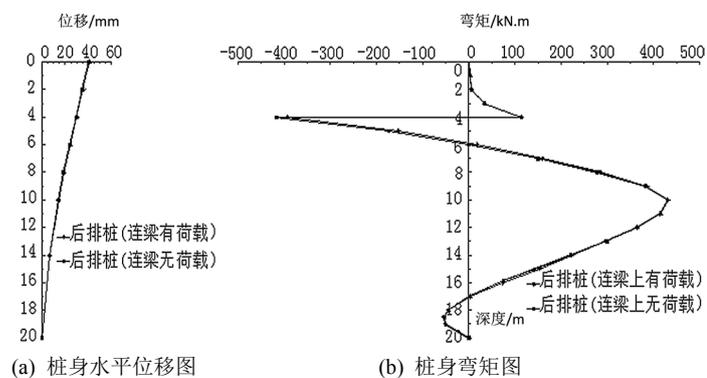
**Figure 3.** Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 2)  
**图 3.** 椅式双排桩支护结构计算结果(工况二)

### 3.3. 实测结果与计算结果对比分析

图 2(a)与图 3(a)分别揭示了两个工况的桩身水平位移变化规律。由图 2(a)与图 3(a)可知：工况一结束时，后排桩桩顶水平位移理论计算结果为 25 mm，实测结果为 23.9 mm。工况二结束时，后排桩桩顶水



**Figure 4.** Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 2)  
**图 4.** 椅式双排桩支护结构计算结果(工况二)



**Figure 5.** Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 2)  
**图 5.** 椅式双排桩支护结构计算结果(工况二)

平位移理论计算结果为 39.3 mm，实测结果为 37.7 mm；前排桩桩顶水平位移理论计算结果为 19.5 mm；实测结果为 17.3 mm。两工况计算结果与实测结果对比表明：实测结果与计算结果高度一致，这说明本文提出的椅式双排支护结构内力与变形分析方法具有较好的可靠性，可供工程技术人员参考借鉴。

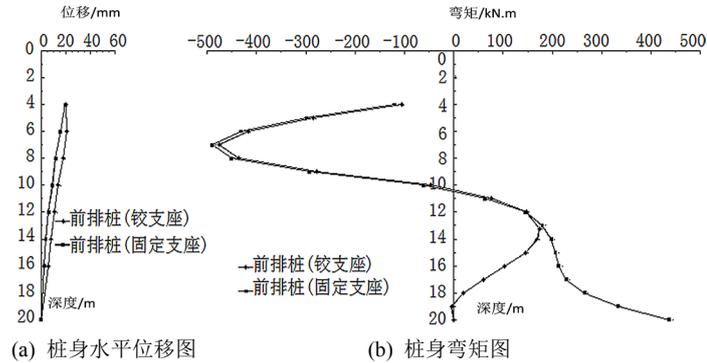


Figure 6. Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 2)

图 6. 椅式双排桩支护结构计算结果(工况二)

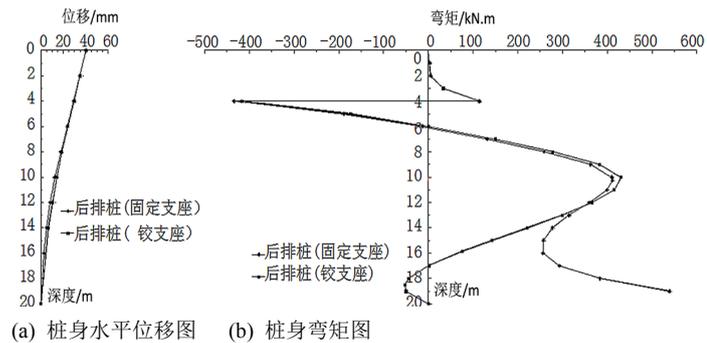


Figure 7. Calculation results of chair type double row pile supporting structure (Working condition 2)

图 7. 椅式双排桩支护结构计算结果(工况二)

### 3.4. 影响因素分析

#### 1) 平台荷载对支护结构工作性状的影响

图 4 为连接前后排桩的钢筋混凝土平台上有  $q = 10 \text{ kN/m}^2$  均布荷载作用时的理论分析结果；图 5 为连接前后排桩的钢筋混凝土平台上无均布荷载时的理论分析结果。对比图 4、图 5 可知：作用在连接前后排桩的钢筋混凝土平台上的荷载对桩身内力及水平位移影响很小。因此，椅式双排桩支护结构中间平台既可用于施工材料堆放或作为施工通道，这并不影响支护结构的安全稳定。

#### 2) 桩端约束对支护结构工作性状的影响

由图 6、图 7 分别为前排桩与后排桩桩端为铰支或固支情况下，前后排桩桩身水平变形及弯矩分布理论分析结果。由图 6、图 7 可看出：桩端约束类型对该支护结构水平变形和坑底以上桩身弯矩影响很小，但对坑底以下弯矩的分布及大小影响很大。因此，根据桩端岩土性状及嵌固深度，特别是对于嵌岩桩，桩端约束类型的合理确定，是椅式双排桩支护结构能否实现安全性与经济性协调的关键因素之一。

## 4. 结论

本文基于 Winkler 地基梁基本思想和土力学相关理论与方法，提出了椅式双排桩支护结构内力及变

形分析的混合有限元法, 可供工程技术人员参考借鉴。且获得如下主要结论:

1) 在连接前、后排的连系梁平台上作用施工荷载不仅不影响各支护桩水平位移与内力, 而且能有效提高支护结构的稳定性。

2) 桩端约束类型对该支护结构水平变形和坑底以上桩身弯矩影响很小, 但对坑底以下弯矩的分布及大小影响很大。因此, 根据桩端岩土性状及嵌固深度, 特别是对于嵌岩桩, 合理确定桩端约束类型, 是椅式双排桩支护结构能否实现安全性与经济性协调的关键因素之一。

3) 研究结果表明: 对于椅式双排桩支护结构, 前排桩桩身最大弯矩位于坑底以上, 而后排桩桩身最大弯矩位于坑底以下。同时, 完全可以通过调节连接前后排桩联系梁的设置位置来调整前后排桩身内力分布, 使用前后排桩身最大内力接近。

## 致 谢

感谢审稿人和编辑部提供的有益建议。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(NO: 51978260)。

## 参考文献

- [1] 戴智敏, 阳凯凯. 深基坑双排桩支护结构体系受力分析与计算[J]. 信阳师范学院学报, 2002(3): 348-351.
- [2] 郑刚, 李欣, 刘畅. 考虑桩土相互作用的双排桩分析[J]. 建筑结构学报, 2004, 25(1): 99-106.
- [3] 应宏伟, 初振环. 带撑双排桩支护结构性状分析[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(增刊): 1451-1456.
- [4] 平扬, 白世伟, 曹俊坚. 深基双排桩空间协同计算理论及位移反分析[J]. 土木工程学报, 2001, 2(34): 79-84.
- [5] 彭文祥, 刘彬. 深基坑双排桩支护排距室内模型试验研究[J]. 湖南大学学报(自然科学版), 2018, 45(1): 121-127.
- [6] 何颐华, 杨斌, 金宝森, 等. 双排护坡桩试验与计算的研究[J]. 建筑结构学报, 1996, 17(2): 58-66.
- [7] 杨永新, 杨旭光, 李佳骏, 等. 对类似双排桩桩间土土体主动土压力计算的建议[J]. 建筑技术, 2019, 50(3): 305-308.
- [8] 曹净, 钱国伟, 杨泽帅, 等. 基于等效桁架模型的基坑双排桩结构计算模型研究[J]. 防灾减灾工程学报, 2018, 32(6): 943-949.
- [9] 张玲, 朱幸仁, 欧强. 考虑桩桩相互作用的双排支护桩受力变形分析[J]. 水文地质工程地质, 2019, 76(5): 72-80.
- [10] 刘泉声, 付建军. 考虑桩土效应的双排桩模型及参数研究[J]. 岩土力学, 2011, 32(2): 481-486.
- [11] Xiao, S.-G. (2010) Approximate Theoretical Solution of Distribution Modes of Landslide Thrust on Anti-Sliding Piles in Soil-Like Slopes or Landslides. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, **32**, 120-123.
- [12] Xiao, S.-G. (2010) Analytical Method for H-Type Combined Anti-Sliding Pile Retaining Landslide or Excavated Slope and Its Application to Practical Projects. *Rock and Soil Mechanics*, **31**, 2146-2152.