

# 侧限条件下柔性桩复合地基变形分析的能量法

李义<sup>1</sup>, 汤浦<sup>2</sup>, 孟祥康<sup>2</sup>, 任华<sup>3</sup>, 肖海兵<sup>4</sup>, 刘杰<sup>1</sup>

<sup>1</sup>湖南工业大学土木工程学院, 湖南 株洲

<sup>2</sup>江苏路业新材料有限公司, 江苏 南京

<sup>3</sup>南京大学地球科学与工程学院, 江苏 南京

<sup>4</sup>湖南路基环保科技有限公司, 湖南 长沙

收稿日期: 2021年10月1日; 录用日期: 2021年10月16日; 发布日期: 2021年11月1日

## 摘要

为降低软土地基的沉降, 提高地基的承载能力, 提出了侧向约束复合地基加固技术。同时, 基于适当的假设, 构造了满足位移边界条件的位移函数。建立了变形影响深度范围内的天然地基和复合地基加固区复合土的总势能方程。基于稳态势能原理, 建立了该系统的位移变分方程, 提出了侧向约束复合地基变形分析的近似解析方法。FLAC3D数值模拟结果验证了理论分析方法的合理性。

## 关键词

柔性桩复合地基, 荷载 - 沉降关系, 能量法, 位移变分方程

# Energy Method of Deformation Analysis for Flexible Pile Composite Foundation with Lateral Restriction

Yi Li<sup>1</sup>, Pu Tang<sup>2</sup>, Xiangkang Meng<sup>2</sup>, Hua Ren<sup>3</sup>, Haibing Xiao<sup>4</sup>, Jie Liu<sup>1</sup>

<sup>1</sup>College of Civil Engineering, Hunan University of Technology, Zhuzhou Hunan

<sup>2</sup>Jiangsu Luye New Material Co., Ltd., Nanjing Jiangsu

<sup>3</sup>College of Earth Science and Engineering, Nanjing University, Nanjing Jiangsu

<sup>4</sup>Hunan Subgrade Environmental Protection Technology Co., Ltd., Changsha Hunan

Received: Oct. 1<sup>st</sup>, 2021; accepted: Oct. 16<sup>th</sup>, 2021; published: Nov. 1<sup>st</sup>, 2021

## Abstract

To limit the lateral and compression deformation of soft soil within the range of loading, control effectively foundation settlement, a new technology of the flexible pile composite foundation with lateral restraint is suggested, and the energy method for deformation analysis is proposed in this paper. Based on some hypotheses, putting the scope of pile-soil composite reinforcement and the natural foundation of deformation influence depth as a whole, the corresponding displacement component formulae which satisfy the displacement boundary conditions are proposed, then the equation of total potential energy of the system is introduced. Based on the principle of steady-state potential energy, the displacement variational equation of the system is established and an approximate analytical algorithm of the composite foundation deformation with lateral restriction is proposed. The numerical simulation results of FLAC3D verify the rationality of the theoretical analysis method.

## Keywords

Flexible Pile Composite Foundation, Load-Settlement Relation, Energy Method, Displacement Variational Equation

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

中国沿海地区广泛存在淤泥、淤泥质土和其他饱和软粘土。软土的特点是压缩性大、含水量高、承载力低、侧向挤出引起的附加沉降大。较大的侧向挤出不仅会影响沉降,而且会影响相邻建筑物和构筑物的受力。目前,路堤荷载作用下沉降计算的主要方法为“分层总和法”及“规范法”。无论是“分层总和法”或是“规范法”,都是建立在单向应力状态的基础上,没有考虑土的侧向挤出对地基沉降的影响[1][2]。对于软土地基,土体的侧向变形对沉降影响显著。路堤下软土的侧向位移一般表现为离路基中心线的距离越远,侧向位移越大。同时,土越软,软土越厚,埋深越浅,路堤越高,侧向变形越大,相应地沉降也越大。在不考虑侧向变形影响的情况下,土体沉降的计算结果偏少[3]。屠毓敏等人[3][4][5]基于有限元方法,研究了土体侧向位移对路堤沉降的影响。Loganathan等[3]系统分析了土体侧向位移对路基沉降的影响,指出限制路堤坡角下断面侧向位移是减少路堤沉降的最有效措施。罗庆姿等[6]提出了柔性侧限条件下的竖向固结试验方法,分别对原状土样和重塑土样在不同侧向约束条件下的竖向固结进行了对比试验,分析了侧限条件对软土沉降特性和变形参数的影响。马重等[7]研究了分层地基侧向受荷桩的受力机理和桩身挠曲微分方程,并利用有限差分法研究了软土地区堆载作用下相邻高速铁路桩基的侧向变形。

为限制荷载作用范围内软土的侧向挤出,减小地基沉降,降低附加荷载对周边环境的不利影响,提出了侧限复合地基加固技术(如图1所示)。同时,在适当假定的基础上,构造了满足位移边界条件的位移函数,建立了变形影响深度范围内的天然地基和复合地基加固区复合土的总势能方程。提出了侧向约束复合地基变形分析的近似解析方法。基于算例,将理论分析结果与FLAC3D数值模拟结果进行了对比,证明了理论分析方法的合理性。该方法既能考虑土体三向应力对沉降的影响。与数值模拟方法相比,具有计算简便、计算速度快等优点。

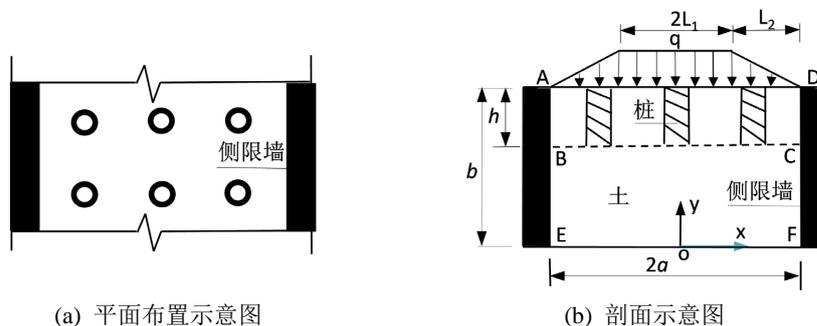


Figure 1. Analysis model of composite foundation with lateral restriction  
图 1. 侧限条件下复合地基分析模型

## 2. 计算模型及位移变分法

### 2.1. 基本假定及计算模型

1) 本文以公路软基为研究对象。公路为线状构筑物，纵向可视为无限长，以任意横截面为  $xy$  平面，行车道方向为  $z$  轴，在路堤荷载作用下，地基中各点只会沿  $x$  和  $y$  方向产生位移，不会有  $z$  方向的位移，因此，可将本问题视为平面应变问题。

2) 假设材料是均质的，各向同性的，理想的弹性体[8]，且不考虑材料自身重量。

3) 路堤荷载采用等效梯形分布荷载直接作用于加固区顶面(如图 1 所示)，不考虑垫层的影响。作用在加固区的荷载为：

$$Q = \begin{cases} -q & (-L_1 \leq x \leq L_1) \\ -q(L_2 + L_1 - x)/L_2 & (L_1 \leq x \leq L_1 + L_2) \end{cases} \quad (1)$$

4) 假定侧限水泥土墙与土接触的 AE 及 DF 界面上的水平和竖向位移均与  $y$  呈线性关系。EF 边界上的水平及竖向位移均为零。

5) 侧限水泥土墙与土接触的 AE 及 DF 界面上的法向力介于被动土压力和静土压力之间，假设此界面上的相互作用力为：

$$e_p = k[\gamma(b-y)k_p + 2c\sqrt{k_p}] \quad (2)$$

式中， $k$  为侧压力折减系数； $k_p = tg^2(45 + \varphi/2)$ ； $\gamma$ 、 $\varphi$ 、 $c$  分别为加固深度范围内土的重度、内摩擦角和黏聚力。

6) 为便于分析，将加固区的桩和桩周土等效为各向同性弹性体，等效复合模量  $E_1$  由《公路路基设计规范》(JTJGD30-2004) [9]的面积加权法确定：

$$E_1 = mE_p + (1-m)E_s \quad (3)$$

式中： $E_p$ 、 $E_s$  它们分别为桩的弹性模量和桩间土的压缩模量； $m$  为桩的面积置换率。

### 2.2. 位移变分法

1) 问题的位移边界条件

根据前面的假设，可知问题的位移边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} u(x, y)|_{x=\pm a} &= A_1 \frac{y}{b}, v(x, y)|_{x=\pm a} = B_1 \frac{y}{b} \\ u(x, y)|_{y=0} &= 0, v(x, y)|_{y=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中,  $u(x, y)$  为  $x$  方向的位移;  $v(x, y)$  为  $y$  方向的位移。

从图 1 的对称性可以看出,  $u(x, y)$  是  $x$  的奇函数,  $v(x, y)$  是  $x$  的偶函数。

## 2) 位移分量及系统总势能

基于问题的边界条件和对称性、反对称性, 构造如下位移分量表达式:

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= A_1 \frac{y}{b} + A_2 \left( \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right) \frac{y}{b} + A_3 \left( \frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} \right) \frac{y^2}{b^2} \\ v(x, y) &= B_1 \frac{y}{b} + B_2 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{y}{b} + B_3 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{y^2}{b^2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将等式(4)与等式(5)进行比较可得, 设定的位移分量满足所有位移边界条件以及对称和反对称条件。利用弹性理论[10]可以得到复合地基加固区 ABCD 和变形影响深度范围 BCEF 的变形势能为:

$$U_1 = \alpha_1 \iint_{ABCD} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (6)$$

$$U_2 = \alpha_2 \iint_{BCEF} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \gamma_2 \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (7)$$

式中,  $U_1$ 、 $U_2$  分别为 ABCD 加固区和 BCEF 变形影响区的形变势能;  $E_1$ 、 $E_2$  分别为 ABCD 加固区及 BCEF 变形影响区的弹性模量;  $\mu_1$ 、 $\mu_2$  分别为 ABCD 加固区及 BCEF 变形影响区材料的泊松比。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= E_i (1 - \mu_i) / ((1 + \mu_i)(1 - 2\mu_i)) \\ \beta_i &= 2\mu_i / (1 - \mu_i) \\ \gamma_i &= (1 - 2\mu_i) / (2(1 - \mu_i)) \end{aligned} \right\} (i=1, 2)$$

由叠加法可得加固区及变形影响区的总的形变势能为:

$$U = U_1 + U_2 \quad (8)$$

根据图 1 所示: 作用于加固区上的路堤荷载所作的功为:

$$W_1 = - \int_{AD} Q v_m |_{y=b} dx \quad (m=1, 2, 3) \quad (9)$$

根据前述假定, 可得 AE(DF)界面上的摩擦阻力及界面上的法向力所作的功分别为:

$$W_2 = 2 \int_{AE} f e_p v_m |_{x=a} dy \quad (m=1, 2, 3) \quad (10)$$

$$W_3 = 2 \int_{AE} e_p u_m |_{x=a} dy \quad (m=1, 2, 3) \quad (11)$$

式中:  $f$  是 AE (DF)界面上的摩擦系数, 取  $f = tg\varphi$ 。  $u_1 = v_1 = y/b$ ;  $u_2 = (x/a - x^3/a^3)y/b$   $u_3 = (x/a - x^3/a^3)y^2/b^2$ ,  $v_2 = (1 - x^2/a^2)y/b$ ,  $v_3 = (1 - x^2/a^2)y^2/b^2$ 。

由此可得系统总势能为:

$$\Pi = U + W_1 + W_2 + W_3 \quad (12)$$

由势能驻值原理可得本问题的位移变分方程为

$$\sum_m \left[ \frac{\partial U}{\partial A_m} + 2 \int_{AE} e_p u_m |_{x=a} dy \right] \delta A_m + \sum_m \left[ \frac{\partial U}{\partial B_m} - \int_{AD} Q v_m |_{y=b} dx + 2 \int_{AE} f e_p v_m |_{x=a} dy \right] \delta B_m = 0 \quad (13)$$

因  $\delta A_m, \delta B_m (m=1,2,3)$  是完全随机任意的, 且相互之间是不依赖的, 所以在上式中  $\delta A_m, \delta B_m (m=1,2,3)$  的系数必须等于零, 于是可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial A_m} &= -2 \int_0^b e_p u_m |_{x=a} dy \\ \frac{\partial U}{\partial B_m} &= 2 \int_0^{L_1+L_2} Q v_m |_{y=b} dx - 2 \int_0^b f e_p v_m |_{x=a} dy = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

将式(1)(2)(5)(6)(7)代入式(14)可得系数  $A_m, B_m (m=1,2,3)$  的线性代数方程组, 通过求解此线性代数方程组, 可得待定系数  $A_m, B_m (m=1,2,3)$ 。将  $A_m, B_m (m=1,2,3)$  代入式(5)可得加固区表面各点沉降和水平位移计算数学表达式。

### 3. 数值模拟及理论分析

#### 3.1. 数值模拟

为验证理论分析方法的合理性, 以某工程实际路基为研究对象。此路基宽 32 米, 路基高为 7.0 米, 路基填料为碎石土。根据场地岩土工程勘察报告揭露, 天然地面以下的土层分布为: ① 9.1 m~10 m 厚淤泥质土; ② 1.5 m~3.0 m 厚粉质黏土; ③ 中风化泥质粉砂岩, 未揭穿。由勘察资料, 结合室内试验获得相关岩土计算参数如表 1 所示。

根据实际情况, 拟定的路堤荷载作用下的 FLAC3D 数值模拟模型如图 2 所示。由于天然地面 13 米以下中风化泥质粉砂岩, 因此计算深度取 13.0 米。计算宽度取路堤以外 50 米, 即模型总宽度为 148 米。考虑到本问题的对称性, 数值模拟取一半进行模拟。本工程水泥搅拌桩加固深度取 10.0 米, 桩直径为 0.5 米, 桩间距 1.5 米。同时在坡脚处设置了六排水泥搅拌桩相互接触的水泥土墙, 墙宽 3.0 米, 水泥土墙入土深度 10 米。由于水泥搅拌桩间距为 1.5 米, 因此, 数值模拟计算长度方向取 1.5 米。在数值模拟时, 水泥搅拌桩加固区及水泥土墙相关计算参数均通过取样试验获得(如表 1 所示)。

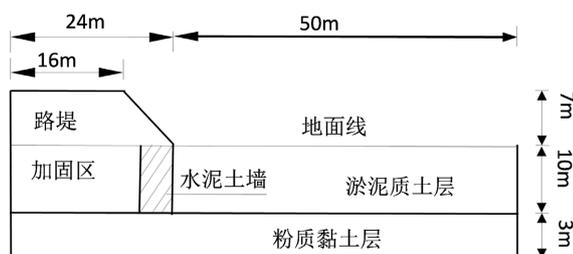


Figure 2. Numerical simulation model

图 2. 数值模拟模型

Table 1. Calculation parameter of numerical simulation

表 1. 数值模拟计算参数

土层名称	重度(kN·m <sup>-3</sup> )	弹性模量(MPa)	泊松比	内聚力(kPa)	内摩擦角(°)
路堤填料	20.0	7.0	0.25	0	30
淤泥质土	19.0	2.0	0.35	10	10
粉质黏土	19.5	4.0	0.3	30.5	15.9
水泥土墙	20.0	150.0	0.3	130	30

边界条件：模型左右边界  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的位移均为零，前后边界  $z$  方向位移为零，底边界  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的位移均为零。

接触面参数：法向接触刚度  $k_n$  和切向接触刚度  $k_s$  均设置为  $1.0 \times 10^{10}$ 。

数值模拟中，地基深度和道路宽度方向采用 1.0 m 尺寸的网格；道路纵向分为 2 个网格；路基填料采用尺寸为 0.5 m 的网格，网格总数为 2596 个。侧限水泥土墙宽度取 3.0 m 时，中心点沉降数值模拟结果如表 2 所示。数值模拟结果表明：当侧限水泥土墙宽度超过 4.0 m，路堤荷载作用中心的最大沉降稳定在 160.3 mm 保持不变。由此可得：当侧限水泥土墙宽度达到 4.0 m 后，荷载作用区的地基变形与侧限水泥土墙宽度无关，这时侧限水泥土墙对荷载作用区的约束相当于刚性约束。

### 3.2. 理论分析

为确保施工过程中地基及路基稳定性，在路基中心线设置了沉降标，在坡脚处设置了测斜仪及沉降标。监测结果表明：由于在路堤坡脚处设置了宽度为 3.0 米的水泥土墙假，其坡脚处的水平位移几乎为零，沉降为 0.03 米。由监测结果可知，在进行理论分析时，坡脚处设置的水泥土墙对荷载作用区的约束为刚性约束，即：水泥土墙与加固区接触边界上  $u(x, y)|_{x=\pm a} = 0$ 。由监测结果及式(4)可得位移表达式中二个待定系数  $A_1 = 0, B_1 = 0.03$ 。理论分析时，水泥土墙与加固区接触面 AE 及 DF 的法向力取为静止土压力，且取静止土压力系数  $k_0 = 1 - \sin \varphi$ ，界面摩擦系数  $f = 0.3$ 。采用本文方法获得的中心点沉降计算结果如表 2 所示。

Table 2. Comparison between settlement calculation results and measured results

表 2. 沉降计算结果与实测结果对比

方法名称	中心点沉降/(mm)	与实测值的相对误差/(%)	备注
数值模拟 <sup>(1)</sup>	133.6	17.0	设置水泥土墙
本文方法 <sup>(1)</sup>	146.7	8.8	设置水泥土墙
分层总和法	115.5	28.2	设置水泥土墙
实测结果	160.9	—	设置水泥土墙
数值模拟 <sup>(2)</sup>	201.3	—	不设水泥土墙
本文方法 <sup>(2)</sup>	221.6	—	不设水泥土墙

由表 1 可看出：采用本文方法获得的中心点沉降计算结果与实测结果最接近，相差为 8.8%，分层总和法获得的结果与实测结果相差 28.2%。由此可知，对于软土地基，不考虑土体三向应力对沉降的影响，其沉降计算结果偏于不安全。同时，由数值模拟及本文方法所得结果可知：在坡脚处设置水泥土墙对加固区施工加侧向约束，能使加固区的沉降降低达 50%。

### 4. 结语

1) 提出了侧向约束复合地基加固技术，构造了满足位移边界条件的位移函数，建立了变形影响深度范围内的天然地基和复合地基加固区复合土的总势能方程，提出了侧向约束复合地基变形分析的近似解析方法，这对提高软土地基处理水平具有一定的指导意义。

2) 对于软土地基，不考虑土体三向应力对沉降的影响，其沉降计算结果偏于不安全。

3) 对于软土地基采用侧向约束及复合地基联合加固方案，能有效降低地基的沉降，提高地基加固效果，降低附加荷载对周边环境的不利影响。

## 致 谢

感谢审稿人和编辑部提供的有益建议。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目(No. 51978260)。

## 参考文献

- [1] 王峰, 金武. 考虑侧向变形影响的客运专线路基沉降的修正[J]. 岩土工程学报, 2010, 32(2): 245-248.
- [2] Alamgir, M., et al. (1996) Deformation Analysis of soft Ground Reinforced by Columnar Inclusion. *Computers and Geotechnics*, **18**, 267-290. [https://doi.org/10.1016/0266-352X\(95\)00034-8](https://doi.org/10.1016/0266-352X(95)00034-8)
- [3] Loganathan, N., Balasubramaniam, A.S. and Bergado, D.T. (1993) Deformation Analysis of Embankment. *Geotechnics Engineering ASCE*, **119**, 1185-1206. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9410\(1993\)119:8\(1185\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9410(1993)119:8(1185))
- [4] 屠毓敏, 郑坚. 考虑土体侧胀性的路堤沉降分析[J]. 中国公路学报, 2002, 15(1): 26-28.
- [5] 王志亮, 李永池. 考虑土体侧胀性的路堤沉降计算[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 5(10): 1772-1777.
- [6] 罗庆姿, 陈晓平, 袁炳祥, 冯德奎. 柔性侧限条件下软土的变形特性及固结模型[J]. 岩土力学, 2019, 40(6): 2264-2274.
- [7] 马重, 何峰, 傅承诚, 黄昕, 张子新. 软土地区堆载下邻近高铁桩基侧向变形研究[J]. 地下空间与工程学报, 2020, 16(S2): 769-776+811.
- [8] 吕文志, 俞建霖. 柔性基础下桩体复合地基的解析法[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(2): 401-408.
- [9] 《公路路基设计规范》(JTJGD30—2004) [M]. 北京: 人民交通出版社, 2005.
- [10] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.