

斜拉索非线性静动力特性及索力识别研究综述

郑 义

华北水利水电大学土木与交通学院, 河南 郑州

收稿日期: 2024年12月17日; 录用日期: 2025年1月9日; 发布日期: 2025年1月22日

摘 要

斜拉索作为斜拉桥的关键部件之一, 其索力分布和动态响应直接影响到桥体结构的安全性、稳定性和使用寿命。斜拉索的力学特性具有复杂的非线性特征, 而大跨度桥梁的增加使得拉索长度增加, 极易发生大幅非线性振动。随着对结构健康监测需求的增加, 如何准确识别和监测斜拉索的索力成为了斜拉桥健康监测和性能评估中的重要问题。

关键词

斜拉桥, 非线性, 动力特性, 索力识别

Research Review on Nonlinear Characteristics and Cable Force Identification of Stay Cables

Yi Zheng

School of Civil Engineering and Transportation, North China University of Water Resources and Electric Power, Zhengzhou Henan

Received: Dec. 17th, 2024; accepted: Jan. 9th, 2025; published: Jan. 22nd, 2025

Abstract

As one of the critical components of cable-stayed bridges, the cable force distribution and dynamic response of stay cables directly affect the safety, stability, and service life of the bridge structure. The mechanical characteristics of stay cables exhibit complex nonlinear features, and the increase in the length of stay cables due to the rise in large-span bridges makes them highly susceptible to significant nonlinear vibrations. With the growing demand for structural health monitoring, accurately identifying and monitoring the cable force of stay cables has become a significant issue in the health monitoring and performance evaluation of cable-stayed bridges.

Keywords

Cable-Stayed Bridge, Nonlinearity, Dynamic Characteristics, Cable Force

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,随着国民经济高速发展,大跨度桥梁的数量激增,随着现代桥梁和建筑结构对跨度、承载能力以及稳定性的要求不断提高,斜拉索桥等大跨度结构因其优越的力学性能和经济性广泛应用于桥梁及建筑等领域。我国的斜拉桥修建起步较晚,但斜拉桥的设计建造水平属于世界领先水平。随着斜拉桥跨度的逐渐增大,其结构的非线性问题越来越显著[1]。本文旨在综述影响非线性静动力特性的因素,现如今索力识别领域的研究现状、主要方法、存在问题及未来发展趋势,以期为桥梁结构的安全评估和健康监测提供科学依据。

2. 斜拉索的非线性静动力特性影响因素

拉索索力是斜拉桥健康监测和性能评估中的一个重要指标,如何准确的识别拉索索力是研究拉索非线性静动力特性的目的之一。目前,索力测试技术主要分为直接测量与间接测量两大类。直接测量法是通过测量仪器直接获取斜拉索的张力值,具体手段有压力表法和压力传感器法。而间接测量法则通过观测相关物理参数来推算索力,常见的方法有光纤光栅传感技术、磁通量测量技术以及基于振动频率的分析法。其中频率法通过采用高灵敏度的振动传感器获取拉索在自然条件下或人工激励作用下的振动信号,由计算机将振动信号转化为多阶频率参数,再由频率参数获得拉索索力。由于该方法具有成本低廉且方便快捷的优点,因而在工程领域中有着较为广泛的应用。

而拉索的力学特性具有复杂的非线性特征,频率法测试结果的准确性依赖于对拉索非线性静动力特性的准确认识与把握。斜拉桥跨度的增加使得斜拉索具有质量轻、抗拉性好、柔性大以及阻尼小等特点,其承受荷载作用时,结构和形状发生较大的变化,即斜拉索的几何非线性问题。斜拉索的几何非线性特征表现为:弯矩轴力组合效应(梁-柱效应)、大位移效应以及垂度效应[1]。由于斜拉索两端分别与桥塔和桥面主梁相连,在桥面振动的激励下斜拉索极易发生大幅非线性振动。因此,研究斜拉桥拉索的非线性振动具有重要的工程价值和理论意义[2]。拉索非线性静动力特性会被如下因素影响。

1) 垂度效应

斜拉索作为柔性构件,在自重与轴力的作用下产生垂度效应,无法作为拉伸杆件进行简化计算,即需要考虑斜拉索的垂度非线性效应。拉索垂度和索力相互耦合会在拉索中产生二次非线性弯矩,这种二次弯矩对拉索自振频率以及索力计算均有一定的影响[3]。

2) 大位移效应

斜拉索在承受较大荷载时,拉索的位移,几何形态都会发生较大变化,这会引起的结构受力状态、内力分布等方面的显著变化。拉索的轴向力与变形之间的关系不再是线性的,从而导致力学分析中的非线性现象。

3) 梁-柱效应

斜拉索的拉力使得主梁和索塔同时承受弯矩和巨大的轴向力。在主梁和索塔变形过程中,由于轴向

力和弯矩相互影响,会产生所谓的梁-柱效应,使整个斜拉桥结构表现出几何非线性行为,这种效应在施工阶段尤为突出,因为此时拉力相对较小,对垂度和变形的影响较大。

4) 抗弯刚度

斜拉索通常由高强度的钢材或合成材料制成,钢拉索抗弯刚度的主要决定参数是钢拉索的弹性模量和索体的截面惯性矩,但拉索的弹性模量实际是一个非线性,与应力和时间有关的量。因而这些材料在承受较大应力时表现出明显的非线性行为[4]。

5) 倾斜角度

斜拉索一端布置在桥面上,另一端与桥塔相连,与水平悬索不同,在重力的轴向分力的影响下,会使拉索轴向力分布不均匀。倾斜角度会影响拉索的垂度效应,通常情况下,角度越大,垂度效应越小。

6) 外部激励

斜拉索在外部激励,特别是风荷载、交通荷载等动态载荷作用下,斜拉索可能产生强烈的振动响应。风荷载引起的风致振动、交通荷载产生的冲击振动等均可能引起拉索的非线性响应,当外部激励频率接近拉索的固有频率时,甚至可能发生拉索的共振现象。

3. 研究趋势

索力识别近年来一直在学术界有较高的关注度,在中国知网数据库以“索力识别”为主题词进行检索,得到的年度总体趋势如图1所示,可以看到以索力识别为主要研究内容的论文发文量在2000年前后开始逐年增加,并在2009年达到峰值,为66篇;在此后的十几年间基本保持了每年60篇左右的发文量,且研究工作主要集中在技术研究层面,其主题较多集中在“斜拉索”、“频率法”、“施工控制”等内容上;同样以“拉索非线性”为主题词进行检索得到总体趋势如图2所示,其发文趋势大致与“索力识别”保持一致,但每年的发文量不多,为10篇左右,主题较多集中在“几何非线性”、“垂度效应”与“参数振动”上。

综上所述,“拉索非线性特性”与“索力识别”发文趋势的一致性印证了二者的关系紧密相连,索力识别方法的进步以拉索非线性特性的研究为重要基础与前提,而拉索非线性特性的研究又需通过索力识别的方法得以实际应用;二者每年发文量的巨大差异又体现了索力识别研究侧重于工程实际应用,而拉索非线性动力特性的研究侧重于理论层次的探究,这类研究相较于前者往往更难产出成果。

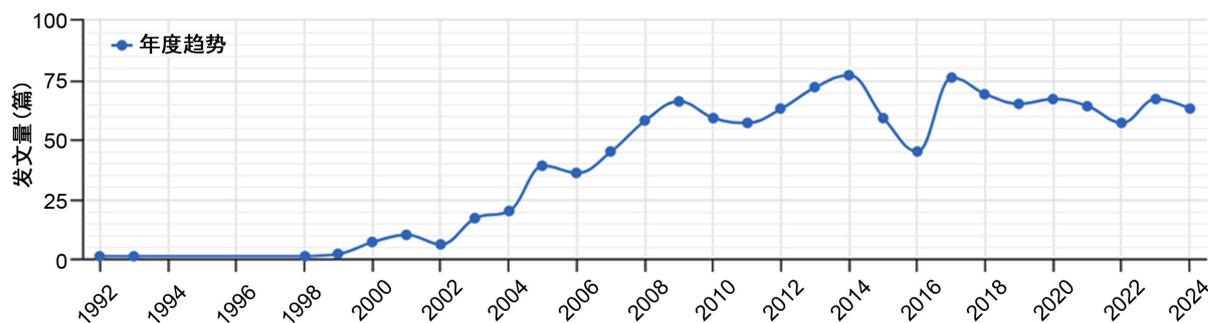


Figure 1. "Cable Force Identification" publication statistics

图1. “索力识别”发文统计

4. 拉索非线性静动力特性及索力识别方法的研究现状

4.1. 索力识别方法研究现状

拉索计算理论相关研究也主要围绕索的振动特性方面展开。拉索在工作过程中,其频率会受到边界

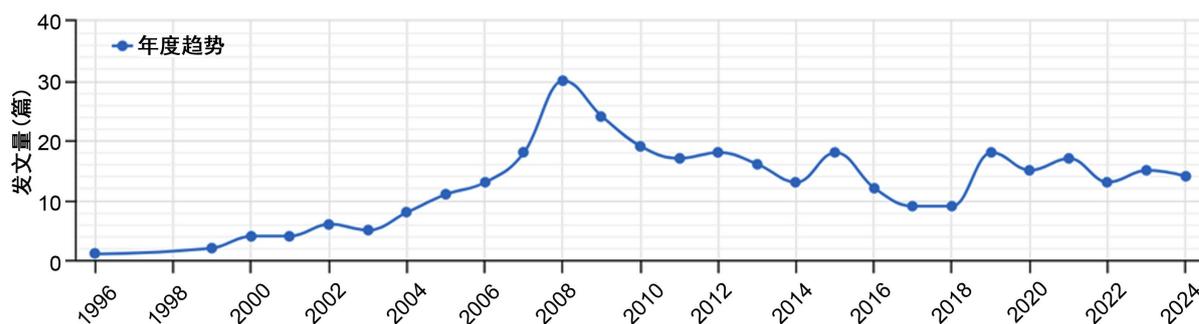


Figure 2. "Cable Nonlinear" publication statistics

图 2. “拉索非线性”发文统计

条件、拉索抗弯刚度、拉索计算长度、拉索垂度、拉索阻尼减振装置等影响。在实际工程中，为了便于操作及计算简便，忽略了某些因素的影响。但在多数情况下，这都会使索力测试产生很大误差，从而影响对拉索技术状态的准确把握。

1) 考虑复杂边界条件的索力识别方法

甘泉[5]依据拉索横向振动方程的通用解，推导出了一个适用于多种边界条件的统一且实用的索杆内力计算公式。这个公式是在弦理论索力计算公式的基础上，通过乘以一个修正系数得到的，并且可以利用多阶频率来计算索力，其形式简洁、计算精度高且误差可预测，在工程应用具有简便可靠的优点。

马天颖[6]提出了一种计算两端护筒内置橡胶减振圈拉索索力的新方法。该方法利用短索实测的前三阶频率数据来确定减振器的支撑刚度，并采用有限元技术构建了一个模型，用以描述索力与频率之间的关联。通过对比实测频率与模型预测频率，反推出拉索的实际索力。

危媛丞，李周等[7]基于模态振型比与模态频率相结合的概念，通过引入有效振动长度的概念，将复杂边界条件的斜拉索等效为简支欧拉梁，进而直接采用既有的索力计算公式来进行计算。通过振动测试得到多阶振型和频率，利用优化算法精确地求解出拉索的有限振动长度并通过数值算例的验证，证明了该方法的有效性。

2) 考虑抗弯刚度影响的索力识别方法

张巍，王广政等[8]采用有限元方法验证了斜拉索存在的模态超越现象，通过绘制频率和振型随索力变化的曲线图，采用频差法来确定实测各阶频率的阶数，并特别选择第二阶频率来进行索力计算。结合实际工程案例的验证表明，在考虑抗弯刚度的情况下，采用斜拉索平衡索曲线的迭代计算方法，可以有效消除模态超越现象对索力计算造成的偏差。

刘进明[9]提出了考虑两端不同边界条件和抗弯刚度时，索力计算的解析方法。利用此方法，在采用振动法测量索力时，可以通过分析索的多阶谐振频率，准确地识别出索的两端边界条件以及其抗弯刚度，进而计算出精确的索力值。

李峰[10]采用曲线拟合方法，提出了由低阶频率估算拉索抗弯刚度及拉力的实用估算公式；用实用估算公式验算了被检验拉索的抗弯刚度及拉力，对比分析了实用估算公式与目前常用公式的拉力估算结果。结果表明，实用估算公式对抗弯刚度和拉力的识别精度满足工程实践要求。

3) 考虑减振器影响的索力识别方法

任宇[11]基于频率法，并结合已有的解析法和 Ritz 法计算理论，从直接解析、换算刚度、等效长度以及 Ritz 法这四个角度出发，提出了一种考虑减振器影响的索力计算方法，并给出了计算公式的选取方案。通过对实际桥梁的计算和分析，总结了所推导的索力计算公式的各自适用范围，为斜拉桥索力的精确计算提供了有效的参考。

狄方殿[12]建立了斜拉索分布式辅助索及阻尼器系统精细化解析模型及高效数值模型。考虑长索垂度和辅助索预张力效应等关键参数,采用复模态方法形成斜拉索分布式减振系统复频率方程构建的通用方法,建立了数值模型。采用双斜拉索分布式辅助索及阻尼器系统,通过与解析解对比验证了数值方法的分析精度。

Sohaib M [13]基于考虑垂度的拉索动力模型,在正弦函数的基础上,增加了受阻尼单元荷载作用的拉索静态变形的形状函数。并采用伽辽金法对系统的固有频率进行了分析。采用线性化技术,对非线性阻尼模型的索-阻尼系统的固有频率进行了计算。最后总结了阻尼器各个参数对拉索索力估算精度的主要影响。

综上所述,近年来的索力识别研究无论是考虑复杂边界条件,还是考虑抗弯刚度与减振器影响,其本质还是对拉索物理模型的精细程度进行进一步的提升,这些理论方法大多都能考虑到垂度效与应抗弯刚度的影响,从而使得索力识别的精确度得到了提高,但对其他非线性因素如大位移效应,弯矩与轴力组合效应以及端部激励作用下动态边界条件影响的涉及较为困难。

4) 非接触式索力识别方法

朱浩,肖垚等[14]提出了一种基于图像识别的非接触式索力测试方法,在拉索上粘贴标靶建立起斜拉索特征,利用手机等终端设备拍摄拉索振动视频,并通过视频数据分解获取拉索振动的图像序列;并基于改进的二值化与斑点检测算法对标靶进行识别跟踪,通过形心拟合实现标靶精确定位,从而计算得到拉索振动时程曲线,经频谱分析后利用振动频率法计算得到拉索索力。通过实桥应用,证明了该系统可操作性强、测试精度高,易于在桥梁建设工程中推广。

孙晓立,罗文俊等[15]提出一种基于无人机摄影和经验模态分解的桥梁吊索索力测试方法,结合 KLT 光流法和经验模态分解算法在振动图像处理方面的特点,采用运行模态分析法求解校正后的位移响应,无需提前获知输入激励即可求解吊索固有频率和模态振型,显著提高了吊索振动模态识别和索力求解的精度。

5) 基于神经网络的索力识别方法

吴康[16]提出带修正项的全连接神经网络作为训练模型;推导了训练数据归一化前后,待识别参数的映射关系;在强迫激励和环境激励作用下,使用三个点位的位移时程数据作为训练样本,分析了索力的识别精度和位移场的还原程度;系统分析了不同权重、不同深度和宽度的网络结构对索力识别的影响。分别使用三点、单点位移时程数据和加速度时程数据,分析斜拉索索力识别精度,探究使用不同位置的单点位移时程数据对索力识别的影响;基于梁振动理论,求解了两端铰接和两端固结吊杆的索力识别问题。

张玉平,姜嘉萍等[17]提出一种基于 IWPA-LKCNN-LSTM 的带减振器斜拉索索力智能识别方法。对实际工程中的带减振器斜拉索开展动态响应试验,基于试验数据开发一种可以智能化识别带减振器斜拉索索力的深度学习模型。模型以斜拉索索力、长度、线密度、频率和阶次作为特征输入,采用改进狼群算法对 LSTM 神经网络中的超参数进行自适应寻优,然后利用 LKCNN-LSTM 进行训练,实现对带减振器斜拉索索力的智能识别,与索力计算公式和其他机器学习算法对比结果表明,该方法可实现带减振器斜拉索索力的智能化精准识别。

综上所述,随着斜拉索长度的增加,传统的频率法测量索力时加速度传感器的布设难度也随之加大,而基于机器视觉的非接触式索力识别方法无需在拉索上安装传感器或进行繁琐的布线工作,从而避免了因安装传感器而对拉索结构造成的潜在影响,且该方法高效便捷,安全性高且适应性强;而神经网络能够处理复杂的非线性关系,并通过训练学习索力与频率等参数之间的内在联系。这使得基于神经网络的索力识别方法能够实现高精度的索力测量,满足实际工程对索力精度的要求,因此基于机器视觉和神经

网络的索力识别方法会成为未来索力识别方法研究的一大新方向,为该专业领域注入新的活力。

6) 其他索力识别方法研究

Hou S, Dong B [18]等基于变分模态分解(VMD)方法,结合希尔伯特-黄变换方法分解信号并自适应地估计瞬时频率。其具体流程是从斜拉索加速度数据中识别时变模态频率,然后通过拉索张力与识别基频之间的关系识别时变拉索张力。通过斜拉索的缩尺模型和足尺模型验证了变分模态分解(VMD)法对于识别时变索力,甚至是索力的突变都有很好的效果。

贺文字,孟凡成等[19]以两端固支索为例,采用有限差分法求解索的模态参数,并由迭代法识别索力,研究倾角对索的模态参数和索力识别精度的影响。结果表明,采用第1阶频率识别小垂度索的索力,与采用第1阶或第2阶频率识别大垂度索的索力时,不考虑倾角的影响,索力识别的误差很大。

Morgenthal G, Rau S 等[20]提出了一种利用移动设备的加速度传感器来实现索力识别的方法,系统地研究了集成于手机等移动设备的加速度传感器所获得的频率测量数据的准确性以及对张力计算的影响。研究表明,传感器分辨率和采样率直接影响力测量的准确性。而传感器的分辨率限制一定程度上会影响在人工和环境风激励下频率识别的准确度。基于此提出了一种新颖的基于智能手机的软件框架,该软件集成了不同类型的传感器系统,同时可使用基于非线性有限元分析的索力计算方法。经实际工程验证,该技术已具备简单、低成本且有效的索力识别的潜力。

综上所述,以频率法为基础的间接索力识别方法依然有着广阔的研究潜力与应用空间,而随着信息处理技术与人工智能领域技术的提高与发展,非接触式索力识别方法与基于神经网络的智能索力识别方法的高效性,便捷性,安全性将为实际工程节省大量人力物力成本,在工程应用领域大有可为。

4.2. 拉索非线性静动力特性的研究现状

邹堤[21]基于哈密顿变分原理建立了斜拉索、弹性梁以及索梁组合结构的非线性动力学控制方程,并利用有限差分法以及数值积分方法对其进行数值求解,研究了斜拉桥在外激励作用下的非线性响应特性。

朱付祥,易江[22]将受端部激励的拉索力学模型进行简化,在此模型的基础上分别推导了拉索在拟静态振动和模态振动的控制方程,并采用了有限差分法来数值求解拉索的模态振动问题,从而有效地描绘面内端部激励作用下拉索的非线性振动行为。

汤虎[23]以主跨1000 m组合桥面板组合梁斜拉桥试设计方案为背景,采用数值模拟手段,研究了不同的非线性效应对超大跨组合梁斜拉桥动静力性能的影响。研究表明,对千米级组合桥面板组合梁斜拉桥,斜拉索垂度效应引起的活载非线性效应并不十分显著,而三种几何非线性影响因素中,梁柱效应最大,大位移效应次之,而拉索垂度效应最小。

胡迁龙[24]通过研究斜拉桥的动态特性和多索体系的振动行为,探讨了斜拉桥在外激励作用下的非线性振动行为,重点分析自由振动、强迫振动和超谐波共振等现象。在自由振动分析中,发现了索间相互作用引起的能量传递现象,以及不同索之间的振动耦合效应。强迫振动分析揭示了结构的动力学特性,同时观察到斜拉索之间的复杂相互影响。

路一鸣,刘敏[25]采取ANSYS有限元分析法,考虑车桥耦合以及桥面不平顺等因素,研究斜拉索在车辆荷载作用下发生大幅值参数振动的可能性。研究表明,若桥面上车辆都在规定时速内行驶,斜拉索不会发生大幅值参数振动。

尹昆[26]对索-梁结构面内自由振动特性进行研究,在拉索和主梁上施加外激励,模拟风荷载和车辆荷载,进行不同工况的强迫振动,研究斜拉桥在外荷载作用下的非线性振动行为。结果表明,索上激励容易激起拉索的超谐波共振,且当激励幅值足够大时会激起拉索模态间的内共振。梁上激励时,拉索的主共振和亚谐波共振是导致拉索产生大幅振动的原因。

管永乐,王鹏等[27]将超细长弹性杆力学模型应用于描述大跨度斜拉桥拉索的非线性振动行为,考虑斜拉索的几何非线性、垂度和抗弯刚度,推导了拉索在轴向激励作用下的多模态非线性振动方程.其次,通过多尺度法对该振动方程求解.结果表明,基于弹性杆模型的拉索振幅值略大于弹性梁模型,且拉索发生主参数共振的最小起振幅值有所降低;增大阻尼可一定程度上减小拉索的振动,但抑制效果有限,故控制激励幅值是减小拉索振动的有效方法。

综上所述,近年来对拉索的非线性动力效应的研究内容主要集中在对拉索外部激励(主要是车辆荷载,风荷载)和几何非线性效应引起的非线性振动上。所使用的数值求解方法以有限元法与有限差分法为主,由于这类方法没有解析解及经验公式的简洁方便的特点,这也导致了目前较多的成果还未能与工程实际应用产生联系,虽然近些年出现的神经网络适合处理非线性关系,但目前该方法对实际工程中非线性问题的识别与解决还尚未成熟,因此当下从理论层面对拉索非线性静动力特性的研究还是十分有必要的。

5. 结论与展望

随着斜拉索在大跨度结构中的广泛应用,用于大跨度斜拉索的索力识别与健康监测的考虑拉索非线性效应的索力识别方法层出不穷,但在实际工程应用中仍有诸多不足,包括力学模型的不确定性、传感器布设的困难以及算法的实时性等。

为应对这些问题与挑战,考虑因素更加齐全的理论方法被不断发掘,为进一步完善对斜拉索非线性振动效应的研究,可以从以下方面入手。

1) 目前对斜拉索非线性静动力特性的研究主要集中在单索模型和索-梁模型上,考虑端部动态激励影响以及多索相互影响和索-塔-梁间耦合作用的全桥非线性模型研究还较少。

2) 由于将机器视觉和振动频率法相结合的非接触式索力测试方法具有便捷、高效且成本低廉的优点,该方法在桥梁的健康监测与维护中具有极大的应用空间,因而在参考过去频率法成果,研究不同情况下与机器视觉方法更加适配的索力计算公式是很有必要的。

3) 基于神经网络的索力识别方法能够处理复杂的非线性关系,但其识别效果依赖于优化算法的求解效果,该方法目前针对的索力识别情况还较为简单,模型训练样本大都基于有限元模拟,而实际情况下拉索索力的影响因素又极为复杂,且不同优化算法对不同情况下的索力识别效果又不尽相同,未来可考虑选择优化效果更好的算法并将其推广到更为复杂的索力识别情况。

总之,随着新技术的发展和应用,斜拉索的非线性效应分析和索力识别方法将在工程实践中发挥更加重要的作用,并推动结构健康监测领域的进一步发展。

参考文献

- [1] 黄孟阳. 斜拉桥索-梁结构的非线性静动力特性研究[D]: [硕士学位论文]. 成都: 西华大学, 2022.
- [2] 彭然. 桥面激励下斜拉索非线性耦合振动研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2013.
- [3] 王卓. 复杂边界条件下的桥梁索结构张力测试[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2012.
- [4] 孙国军, 袁军, 吴金志. 新型钢绞线拉索几何抗弯刚度试验研究[J]. 建筑材料学报, 2020, 23(4): 927-933.
- [5] 甘泉. 复杂边界条件下索结构的内力识别方法研究[D]: [博士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2015.
- [6] 马天颖. 复杂边界条件下拉索索力频率法测量方法研究[D]: [硕士学位论文]. 广州: 华南理工大学, 2018.
- [7] 危媛丞, 李周, 郑荧光. 基于有效振动长度的多支撑斜拉索索力识别[J]. 筑路机械与施工机械化, 2018, 35(6): 60-64.
- [8] 张巍, 王广政, 孙永明. 考虑抗弯刚度的斜拉索频率与索力分析[J]. 公路交通科技, 2012, 29(7): 64-69+75.
- [9] 刘进明. 识别边界条件和抗弯刚度的振动方法索力计算[C]//中国振动工程学会振动与噪声控制专业委员会. 第25届全国振动与噪声高技术及应用会议论文集. 2012: 10.

- [10] 李峰. 基于振动法的拉索抗弯刚度及拉力实用估算公式研究[J]. 重庆交通大学学报(自然科学版), 2019, 38(6): 17-21.
- [11] 任宇. 基于减振器影响的斜拉桥索力计算方法研究[D]: [硕士学位论文]. 西安: 长安大学, 2013.
- [12] 狄方殿. 斜拉索分布式减振体系理论分析与试验研究[D]: [博士学位论文]. 上海: 同济大学, 2022.
- [13] Sohaib, M. 阻尼器对斜拉桥索力估算影响的研究[D]: [硕士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019.
- [14] 朱浩, 肖垚, 王永威, 等. 基于图像识别的非接触式索力测试系统的研究[J]. 公路, 2023, 68(1): 117-123.
- [15] 孙晓立, 罗文俊, 史永强, 等. 基于无人机摄影和经验模态分解的桥梁吊索索力测试方法[J]. 公路, 2024, 69(10): 200-206.
- [16] 吴康. 基于物理信息神经网络的斜拉索和吊杆索力识别[D]: [硕士学位论文]. 上海: 西南交通大学, 2023.
- [17] 张玉平, 姜嘉萍, 吴健, 等. 基于深度学习的带减振器斜拉索索力智能识别方法[J]. 土木与环境工程学报(中英文), 2024: 1-10.
- [18] Hou, S., Dong, B., Fan, J., Wu, G., Wang, H., Han, Y., et al. (2021) Variational Mode Decomposition Based Time-Varying Force Identification of Stay Cables. *Applied Sciences*, **11**, Article No. 1254. <https://doi.org/10.3390/app11031254>
- [19] 贺文字, 孟凡成, 任伟新. 斜拉索倾角对振动法测索力的精度影响[J]. 振动、测试与诊断, 2021, 41(4): 792-796+836.
- [20] Morgenthal, G., Rau, S., Taraben, J. and Abbas, T. (2018) Determination of Stay-Cable Forces Using Highly Mobile Vibration Measurement Devices. *Journal of Bridge Engineering*, **23**, Article ID: 04017136. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0001166](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0001166)
- [21] 邹堤. 大跨斜拉桥的耦合动力学: 理论建模和数值方法[D]: [硕士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2022.
- [22] 朱付祥, 易江. 面内端部激励下斜拉索振动方程推导与求解[J]. 地震工程与工程振动, 2023, 43(3): 150-160.
- [23] 汤虎. 超大跨组合梁斜拉桥静力非线性影响研究[J]. 上海公路, 2023(4): 32-38+46+208.
- [24] 胡迁龙. 斜拉桥面内面外非线性振动试验研究[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2024.
- [25] 路一鸣, 刘敏. 车辆荷载作用下斜拉索参数振动分析[J]. 自然灾害学报, 2024, 33(1): 231-238.
- [26] 尹昆. 基于索-梁结构的斜拉桥非线性振动仿真研究[D]: [硕士学位论文]. 南宁: 广西大学, 2024.
- [27] 管永乐, 王鹏, 刘百强. 基于超细长弹性杆模型的斜拉索参数振动分析[J]. 动力学与控制学报, 2024, 22(9): 37-44.