

# 对于结构力学特殊问题解法的规律研究

邓楚宇

武汉轻工大学土木工程与建筑学院, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年11月11日; 录用日期: 2025年12月2日; 发布日期: 2025年12月17日

## 摘要

结构力学作为土木工程专业的核心课程, 即便是在行业发展面临巨大挑战的当下, 依旧在研究生招生考试中占据重要地位。结构力学因其繁杂的知识点与复杂严密的逻辑性, 呈现出“入门易而精进难”的显著特征, 其中特殊问题的求解更是公认的难点。本文以结构力学的基础方法(力法及位移法)为理论根基, 结合常规题目的解题步骤, 剖析了两种方法在数值确定以及符号判断的关键要点; 并以此为基础对特殊问题(弹簧支座问题、无限刚度杆件问题及温度作用问题)展开实例演算, 过程中着重阐释思维方式与分析框架, 旨在辅助读者深化对该类问题求解流程的理解; 进而提炼针对该类特殊问题的解题规律, 为土木工程专业学生提供具有参考价值的指引。

## 关键词

结构力学, 特殊问题, 解题规律

# Regularity Research on the Solution of Special Problems in Structural Mechanics

Chuyu Deng

School of Civil Engineering and Architecture, Wuhan Polytechnic University, Wuhan Hubei

Received: November 11, 2025; accepted: December 2, 2025; published: December 17, 2025

## Abstract

Structural mechanics, as a core course in civil engineering, still occupies an important position in the postgraduate entrance examination, even in the current of great challenges facing industry development. Due to its complex knowledge points and intricate logical nature, structural mechanics exhibits significant characteristics of “easy entry but difficult mastery,” with the solution of problems being a well-recognized difficulty. This paper takes the basic methods of structural mechanics (force method and displacement method) as the theoretical foundation, combines the solution steps of conventional,

and analyzes the key points of these two methods in numerical determination and symbolic judgment; and on this basis, it presents example calculations for special problems (spring support problems, rigid members problems, and temperature action problems), focusing on the explanation of thinking methods and analysis frameworks in the process, aiming to assist readers in deepening their understanding of the solution for such problems; and then refines the rules for solving such special problems, providing guidance of reference value for civil engineering students.

## Keywords

Structural Mechanics, Special Problems, Problem-Solving Rules

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

结构力学作为土木工程方向的核心基础课程，主要涵盖静定结构分析、超静定结构求解及结构动力学三大模块。该课程以结构简化模型为研究对象，聚焦于外力荷载作用下结构内力与变形的规律探究，具有入门门槛较低而深度研究要求较高的显著特点。即便未系统学习工程力学、材料力学等前置课程，也可以通过网络基础学习从而掌握解决如静定结构等基础问题的方法；对于超静定结构解法选择等深层次问题的研究，则需要建立在系统深化学习的基础之上。

力法与位移法是结构力学中的核心求解方法，核心思路是通过相关理论将复杂模型简化，为超静定结构的解析提供关键支撑。力法操作简便，在超静定梁与超静定刚架的求解中应用广泛；位移法则更适用于复杂模型，虽需精准分析与把控未知量选取，但能通过简洁运算得出结果。针对两种方法的应用与优化，学者们展开了系列研究：赵朝前等学者基于力法，论述了超静定梁与超静定刚架基本结构的选取[1]；黄亮等学者聚焦变截面梁，提出力法简化计算技巧[2]；赵东平等学者借助虚功原理，运用力法研究了衬砌内力及其影响范围[3]；杨小钰等学者明确了位移法与力法各自适用的结构模型[4]；贾宇峰、王媛媛等学者则深入分析了两种方法在求解过程中的异同点[5][6]。上述研究系统探讨了力法与位移法在一般超静定结构求解中的作用，可直接应用于常规超静定结构模型。但对于弹簧支座、变刚度及温度作用等结构力学特殊问题，现有研究仍不够充分，仍需开展更深入的专项研究。

本文以结构力学的基础方法为切入点，通过分析解题步骤中的方向及符号的确定，帮助读者快速掌握解题要点。同时，通过实例对弹簧支座、无限刚度及温度作用等特殊问题进行分析，阐释其产生的逻辑要点，提供系统性的解题方法。进一步提出对于该类特殊问题的定式化求解思路，为后续土木工程系学生学习结构力学课程提供速成的参考与指引。

## 2. 基础解题方法要点分析

本章节将从力法及位移法两个方面对超静定结构的解题步骤进行分析，阐述其解题过程中数值方向及符号的选取的依据，并加入笔者的理解与思考，以助读者更迅速掌握该类方法应用的精髓。

### 2.1. 力法解题要点分析

力法是把超静定结构拆成静定结构，再由静定结构过渡到超静定结构，采用“静定→超静定”的分析路线；其要点是以静定结构为基本结构，将多余约束转化为基本未知量，根据变形条件建立方程求解

[7]。

### 2.1.1. 力法未知量的选取

力法求解的理论基础建立在静定结构分析之上，其核心思路是将超静定结构中的多余约束转化为待求的未知力。在具体计算过程中，为简化运算，通常选取大小为 1 的单位力作为未知虚力进行计算；通过建立并求解力法典型方程，所得到的未知量即为多余约束力的实际数值。

故选取合适的未知量会让计算过程事半功倍。刚性约束提供三个方向的约束：转角、水平、竖直；连杆约束提供沿杆方向的约束，不存在转角。选取转角约束为未知量时，会释放单位力偶，传递至大地的力不可忽视；选取竖直约束为未知量时，在竖直方向释放单位力；选取水平约束为未知量时，在水平方向释放单位力。

如图 1(a)所示，为最简易超静定模型。如图 1(b)~(e)给出了该结构未知量选取方式；对于第四种选取方式会使得基本结构不再静定，故后续不再进行讨论。如图 1(f)~(h)所示，给出了基本结构在单位虚力作用下的弯矩图，单位虚力的选取方向可随机选取；弯矩位置依照杆件相对拉伸一侧分布，转角导致杆件存在向上拱起的趋势，上部拉伸程度较大，故弯矩分布于杆件上侧。

对比不同未知量选取方式最终得到的弯矩值，发现选取水平、竖直约束为未知量时，弯矩结果会随杆件长度产生变化；在选取转角约束为未知量时，弯矩最大值固定为 1，后根据节点约束形式进行变化。由此可以得到，在结构简单时，可按照喜好选取未知量；而在结构形式逐渐复杂时，采取将转角变为未知量的形式更加方便后续计算。

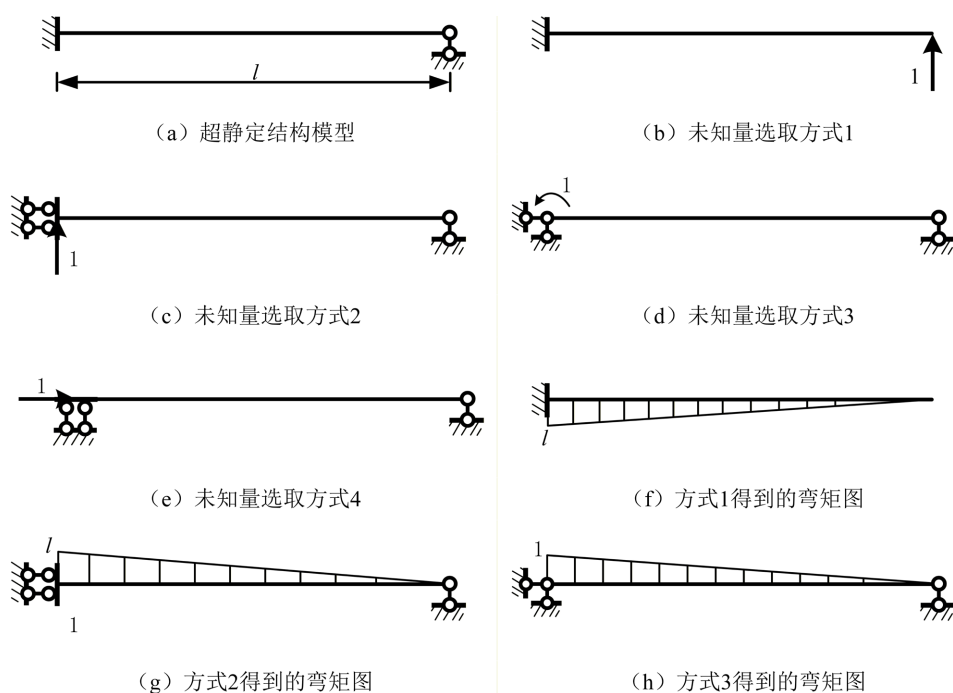


Figure 1. Schematic diagram of unknown quantity selection and results

图 1. 未知量选取及结果示意图

### 2.1.2. 力法方程参数计算方法

采用力法分析超静定结构，选定未知量之后，依据基本方程对未知量进行求解，这里假设未知量的实际大小为  $X_i$ ， $i$  为约束个数。以两个未知量为例，其力法基本方程如下所示。

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} = 0 \end{cases}$$

式中,  $\delta_{11}$  为  $X_1$  方向的单位力产生沿  $X_1$  方向的位移,  $\delta_{12}$  为  $X_2$  方向的单位力产生沿  $X_1$  方向的位移,  $\delta_{21}$  为  $X_1$  方向的单位力产生沿  $X_2$  方向的位移,  $\delta_{22}$  为  $X_2$  方向的单位力产生沿  $X_2$  方向的位移, 其中  $\delta_{12}$  与  $\delta_{21}$  在数值上保持一致。 $\Delta_{1p}$  为外力作用下沿  $X_1$  方向发生的位移,  $\Delta_{2p}$  为外力作用下沿  $X_2$  方向发生的位移。 $\delta_{ij}$  为柔度系数,  $\Delta_{ip}$  为自由项[8]。

对于任意超静定结构, 即可列出对应的方程组; 求解基本方程中的柔度系数与自由项即可联立方程得到未知量的实际大小。

在结构力学中, 若结构杆件的弯矩图可划分为规则图形, 则往往采用图乘法求解柔度系数与自由项。根据上述方法选取适合的未知量后, 可得到第  $i$  个单位力作用于基本结构的弯矩图, 记为  $M_i$  图; 同理可得到外力作用于基本结构的弯矩图, 记为  $M_p$  图。取下标相同的弯矩图进行计算, 如计算  $\delta_{12}$  时即取  $M_1$  图和  $M_2$  图, 取其中一个划分成为规则图形后计算面积, 另一个则取对应面积杆段弯矩图过形心位置的弯矩值, 二者相乘后比上杆件刚度, 即可以得到各柔度系数与自由项的结果。

在对弯矩图不规则的结构进行分析时, 则只可采用解析公式法进行计算。建立合适坐标系后, 得到弯矩图在该坐标系中的公式, 将公式相乘后对该段杆件进行积分计, 算即可得到需要计算的结果。

值得注意的是, 当各弯矩图位于杆件的同一侧时, 则计算结果取正值; 反之, 则取负值。

## 2.2. 位移法解题要点分析

位移法以节点的位移为基本未知量来求解结构的受力状态[8]。同力法解题步骤相似, 其解题思路也遵循三个“基本”: 基本未知量、基本结构、基本方程。在对节点进行分析时, 主要依靠前人总结出的形常数与载常数表格, 但要熟练的运用, 则仍存在需要进一步明确的地方, 定义杆件刚度  $i = EI/l$ 。

### 2.2.1. 弯矩值符号的判别

采用位移法分析结构时, 节点处各杆件的弯矩值符号需要准确判别。形常数与载常数表格中, 对于常见形式结构给出了明确的弯矩值及其符号, 但多数学生无法将其融会贯通形成自己的思维模式, 导致解题时思维紊乱。针对这种情况, 笔者给出一种判别方法以供参考。

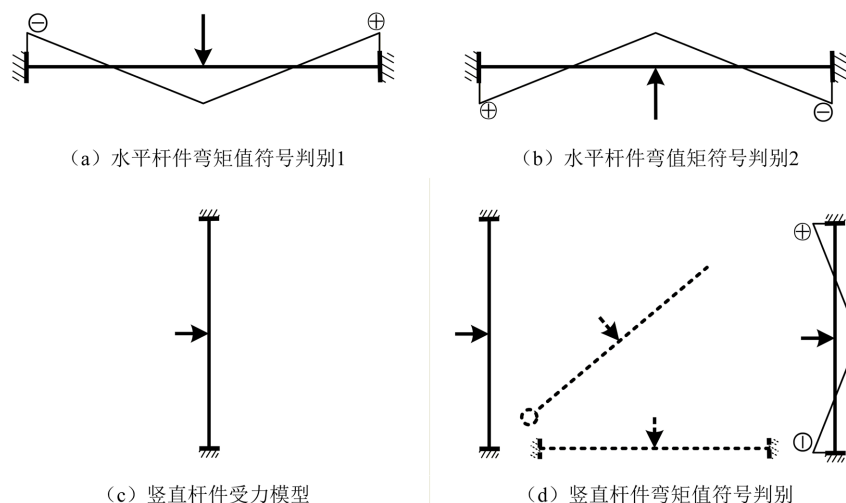


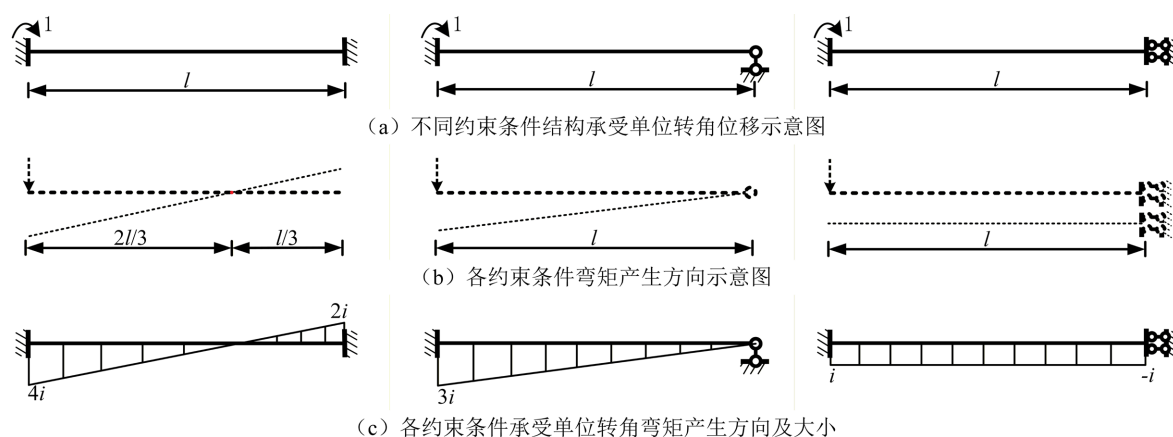
Figure 2. Diagram for determining bending moments in rod members  
图 2. 杆件弯矩判别示意图

以两端固支受集中荷载的结构为例,对于水平杆件而言,弯矩依照变形形式产生于相对拉伸的一侧,故其弯矩值符号判别方式为:位于杆件左侧上部、右侧下部为正值;位于杆件左侧下部、右侧上部为负值。其符号判别示意图如图 2(a)~(b)所示。以竖直杆件为例分析竖直杆件与倾斜杆件弯矩值符号的判别,受力模型如图 2(c)所示。可视为将杆件一端放松,一段为铰接;在外力作用下绕铰节点旋转至水平位置,如图 2(d)中的虚线所示,由此可得到竖杆弯矩值符号判别示意图,如图 2(d)所示。

### 2.2.2. 转角产生弯矩方向的判别

在节点承受一定弯矩时,节点发生转角,尽管形常数表格中已给出其示意图,但对于杆件产生弯矩的方向问题,其定性描述依旧存在一定的模糊性。表格虽能直观展示转角产生弯矩的大小,却未能清晰界定弯矩方向与转角方向之间的内在逻辑对应关系,使得学习者在实际应用中,难以准确判断弯矩的实际方向。

针对这个问题,笔者给出两种判别方法:一为根据杆件变形形式从而判别弯矩产生的方向,一为笔者思考得到的一种简化判别方法。以此为该问题提供参考。



**Figure 3.** Schematic diagram of bending moment direction determination for different constrained members under unit rotational angle

**图 3.** 不同约束杆件在单位转角作用下弯矩方向判别示意图

杆件的约束形式可分为三种,如图 3(a)所示,转角位移发生在节点位置,故假定杆件发生转角的一端为固定约束,转角大小为 1。从弯矩产生的定义出发,弯矩产生于杆件相对受拉侧。对于远端固定约束,在转角发生的一端杆件存在向下变形的趋势;而为保证满足变形协调,故远端存在向上变形的趋势;同时发生转角位移一端产生变形的趋势较大,故根据形常数表格可得到该杆件弯矩产生弯矩的大小及方向。对于远端铰支的杆件,发生转角位移一端存在向下变形的趋势,铰节点不承受弯矩,故仅产生方向向下的弯矩,大小同形常数表格。对于远端为滑动约束,远端会产生反方向的转角,杆件变形为对称的凹形,故弯矩存在于杆件下侧,大小同形常数表格。

这里提供一种简化的判别方法:在产生转角位移的一端,将转角视为在转角箭头所在侧施加力,两端节点处放松为自由状态,而后杆件发生转动后的位置即为弯矩产生方向;对于远端固定约束的杆件,沿距转角  $2/3$  杆长处转动;对于远端铰支的杆件,则沿铰节点发生转动;对于远端为滑动支座,杆件整体下移,如图 3(b)所示,给出几种约束条件下杆件承受假设力后的位置。依据形常数表格中弯矩大小,即可得到转角对不同约束条件下杆件产生弯矩的方向与大小,如图 3(c)所示。弯矩值符号的判别见上节。



### 2.2.3. 位移产生内力方向的判别

在结构受到外力作用时,若沿杆件方向没有约束抵制其移动,则杆件节点会发生线位移。形常数表格中给出了因节点单位位移产生弯矩值的大小,却对于其没有定性地分析位移与内力之间的联系,导致该问题成为一个难点。

针对于该类问题,这里给出了笔者总结出的部分规律,希望以此能为熟练掌握该方法提供一定的参考。

在节点发生线位移时,内力变化仅存在于垂直于位移方向的杆件,沿位移方向的杆件内力不发生变化。

如图 4(a)所示,给出了不同约束条件下承受单位线位移后杆件可能出现的变形形式。对于远端为固定约束时,可视为在杆件发生位移端施加沿位移方向的假设力,放松节点的约束,以杆件中心进行旋转,得到杆件假设的变形位置即为位移产生弯矩的方向;对于远端为铰约束,弯矩方向同转角;对于远端为滑动支座,杆件无法承受竖向的变形,故杆件随节点线位移发生平移,故此时不产生弯矩。其弯矩产生方向的示意图如图 4(b)所示。根据形常数表格可得到杆端弯矩的大小,如图 4(c)所示。

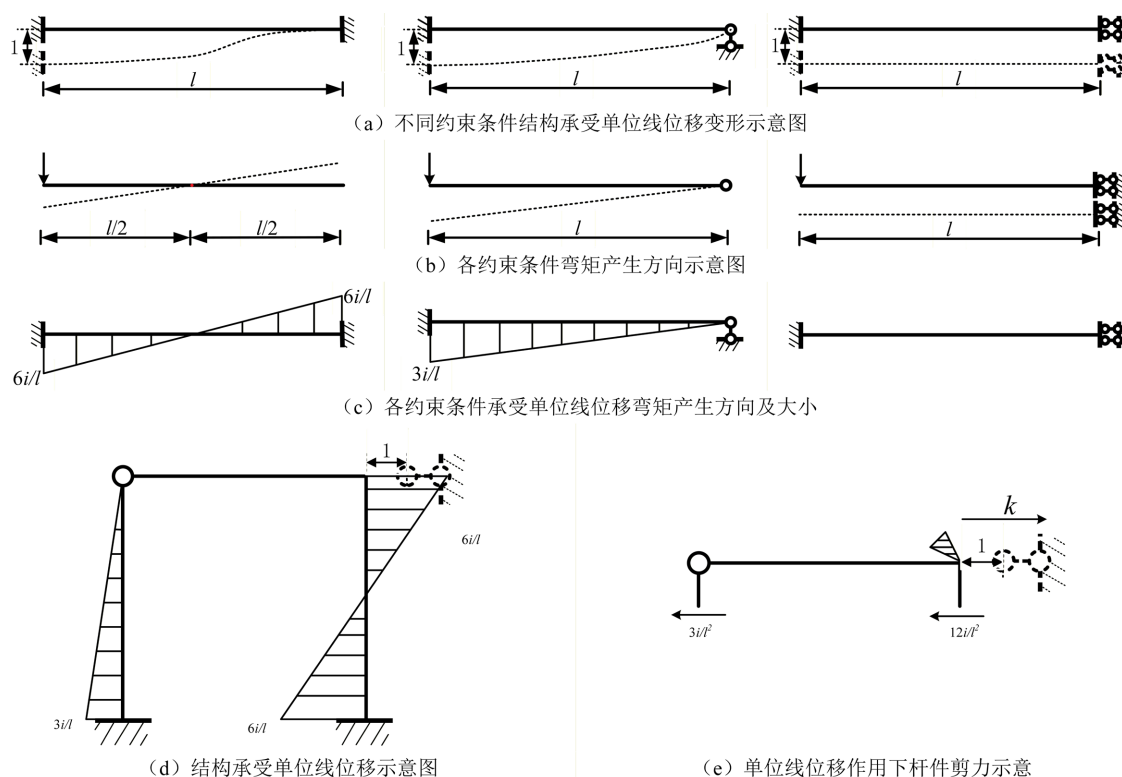


Figure 4. Schematic diagram of internal forces in members under unit line displacement

图 4. 单位线位移下杆件内力示意图

对于线位移导致杆件产生剪力的分析,仅需对前两种约束形式进行分析,故以图 4(d)所示结构进行分析。对于左侧铰接杆件,铰节点向右移动,可视为铰节点不动、下部固定约束向左移动,依据上述内容即可得到该杆件弯矩图。为得到杆件的剪力,可取结构上部分进行分析,如图 4(e)所示。根据上述放松节点施加力的假设,可得到各杆件的力的方向:左侧杆件下部受力向左,故杆件上部受力向右,以此可得到节点处该杆件的受力方向向左;右侧杆件上部受力向右,则节点处该杆件受力方向向左。

### 3. 对于特殊问题的解答

相较于结构力学中的基础题型,特殊问题的求解更具挑战性。此类问题主要包含弹簧支座、无限刚度杆件及温度作用等情形。本章节将以力法与位移法为理论支撑,结合具体例题深入剖析上述特殊问题的解题思路,分析其解题过程与基本题型的联系及差异,为学习者提供可操作的解题路径。

针对于该类特殊问题,其解题思路与常规题型解题思路基本一致,遵循“基本结构→确定基本未知量→联立并求解基本方程”的流程。不同之处在于,在建立基本方程时,需充分考虑这些特殊构件对于整体结构产生的力学影响,并将其量化后纳入方程之中。以下将采用力法与位移法,剖析该类问题,其中加入笔者的理解,以期得到对于该类问题的定式解题路线。

#### 3.1. 弹簧支座问题

相对于常规的连杆支座,弹性支座本身具有移动或转动的能力,受力后发生位移,力撤销后恢复原样[7]。故在建立基本方程时,需考虑弹性支座在基本结构受力作用下的变形影响。下文中结构杆件中取等截面直杆,杆件的刚度  $EI$  为常数,弹簧的刚度系数为  $k$ 。

##### 3.1.1. 力法解题

采用力法对含弹簧支座的结构进行分析,其模型如图 5(a)所示,为方便计算,取  $k = \beta/6EI$ 。根据 2.2.1 中建议,可选取基本结构,如图 5(b)所示。对 B 节点处的单位力偶进行分析,如图 5(c)所示;杆件 BA、BC 存在向下隆起的趋势,可得到在 B 节点处作用单位力偶时各支座及杆件内力值,如图 5(d)所示。同理,可得到在 C 节点处作用单位力偶时各支座及杆件内力值,如图 5(e)所示。

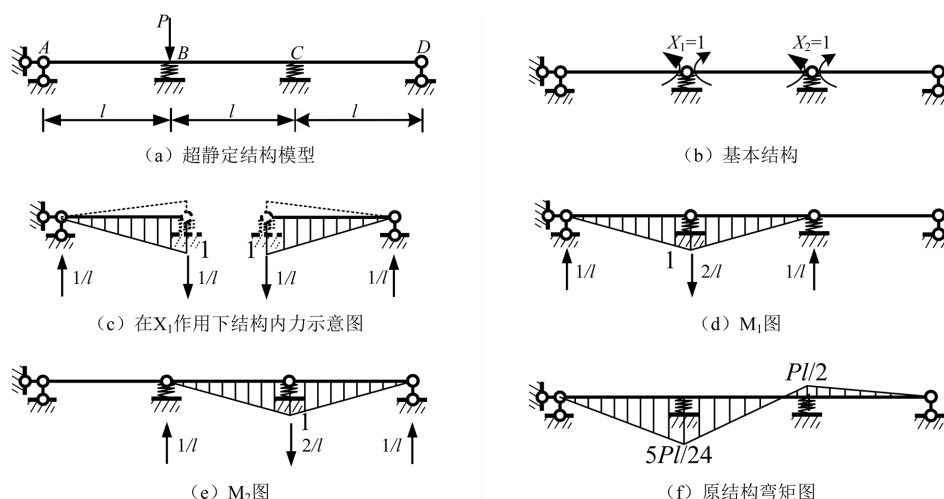


Figure 5. Diagram illustrating the force method for solving spring problems

图 5. 力法解决弹簧问题示意图

取 B 节点作用单位力偶进行分析,力偶产生的未知量为相对转角, B 节点存在向上的趋势,由此可得到节点 B 处存在向下的弹性力;根据胡克定律可得到节点 B 处弹簧的位移,由于位移值微小,由此可得到杆件 BA、BC 各自的相对转角;由于 B 节点连接两杆,故该处因弹簧产生的相对转角为两杆件转角求和。根据示意图可知,节点 C 处存在方向向上的弹性力,该力作用下会导致 B 节点出现对应的转角, B 节点有向上移动的趋势。

依据上述内容,产生的转角包含三部分:力偶作用下杆件的转角、力偶作用处节点弹簧位移产生的

转角、其他弹簧位移产生的转角。转角的方向与假定方向一致，故取正值；外力荷载作用由节点 B 处弹簧全部接受，杆件 BC 的 B 节点处转角方向与假定方向相反，故其转角取负值；杆件 BC 的 C 节点处转角方向与假定方向相同，故其转角取正值。

计算力法方程中的柔度系数与自由项，联立方程，解出未知量，具体计算步骤如下所示：

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \times l \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{l} \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{l} \times 2 + \frac{1}{l} \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{l} = \frac{3l}{2EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \times l \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 + \frac{2}{l} \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{l} \times 2 + \frac{1}{l} \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{l} = \frac{3l}{2EI}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \times l \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - \frac{2}{l} \times \frac{1}{k} \times \frac{1}{l} \times 2 = -\frac{l}{2EI}$$

$$\Delta_{1p} = -P \times \frac{2}{l} \times \frac{1}{k} = -\frac{Pl^3}{3EI}$$

$$\Delta_{2p} = P \times \frac{1}{l} \times \frac{1}{k} = \frac{Pl^3}{6EI}$$

联立方程，可得到未知量  $X_1$ 、 $X_2$  的大小：

$$X_1 = \frac{5}{24}Pl, \quad X_2 = -\frac{51}{24}Pl$$

依照下列公式即可求得原结构弯矩值，原结构弯矩图如图 5(f)所示：

$$M = \sum M_i \cdot X_i + M_p$$

### 3.1.2. 位移法解题

位移法以节点转角及位移为未知量，节点的转角未知量可忽视弹簧作用，而沿弹簧方向产生位移则需考虑弹簧变形产生的弹性力，杆件内力方向及大小见 2.2.3。

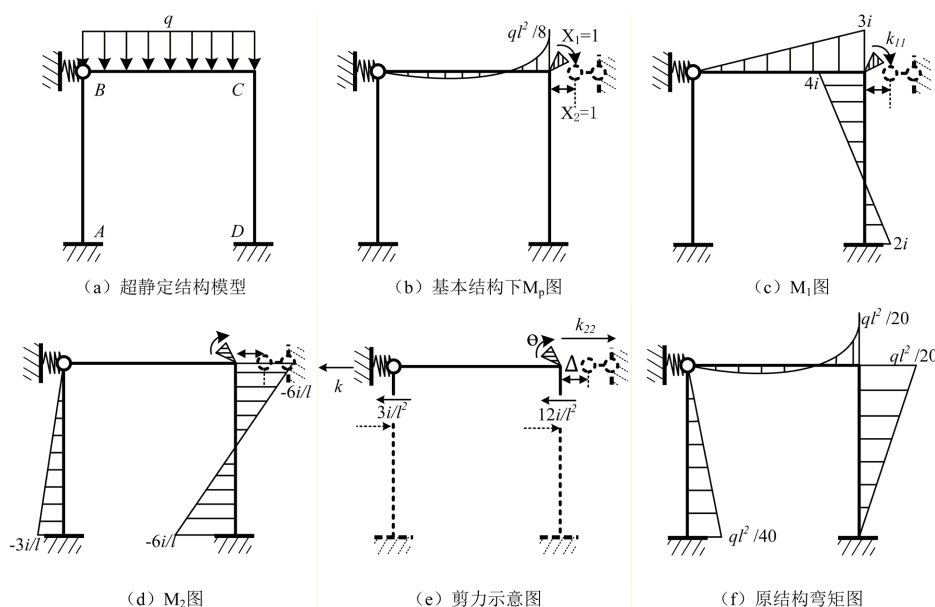


Figure 6. Schematic diagram of solving spring problems using the displacement method  
图 6. 位移法解决弹簧问题示意图



如图 6(a)所示, 取弹簧刚度  $k = 3EI/l^3$ 。根据位移法, 可得到外荷载作用于基本结构的弯矩图, 如图 6(b)所示; 单位转角产生的弯矩图, 如图 6(c)所示; 单位位移产生的弯矩图, 如图 6(d)所示。

结构中弹簧支座连接铰节点, 则该节点处不承受弯矩作用。在外荷载作用下, 杆件 BC 存在水平移动的趋势, 此趋势会导致弹簧拉伸, 对结构产生向左的弹性力。对于各杆件剪力的分析示意, 如图 6(e)所示。

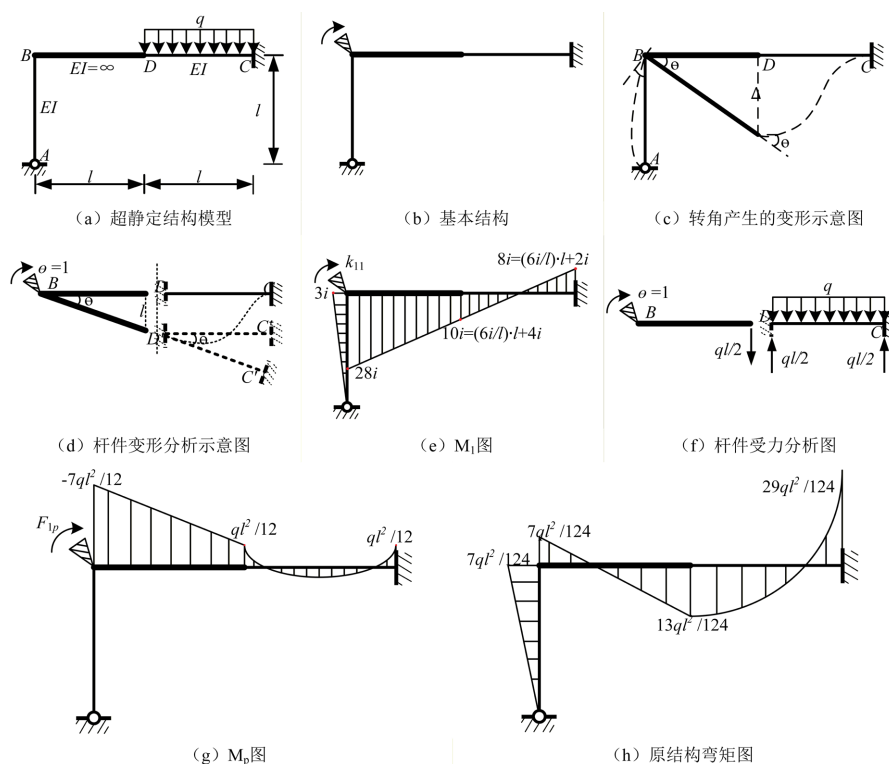
联立位移法基本方程, 可得到未知量  $X_1$ 、 $X_2$  的大小, 具体计算步骤如下:

$$\begin{aligned} F_{1p} &= ql^2/8 \\ F_{2p} &= 0 \\ k_{11} &= 7i \\ k_{12} &= k_{21} = -6i/l \\ k_{22} &= k + 3i/l^2 + 12i/l^2 = 18i/l^2 \\ X_1 &= -\frac{ql^2}{40i}, \quad X_2 = -\frac{ql^3}{120i} \end{aligned}$$

由此可得到原结构的弯矩图, 如图 6(f)所示。

### 3.2. 无限刚度问题

当杆件刚度为无限大时, 其几何变形可忽略不计, 但在受力状态下会产生弯矩, 且该弯矩沿杆件长度方向呈线性分布。对于变刚度问题常以位移法进行求解, 以下将针对此类问题展开具体分析。



**Figure 7.** Schematic diagram of solving the infinite stiffness problem using the displacement method  
**图 7.** 位移法解决无限刚度问题示意图

无限刚度问题在刚架结构中较为常见,相较于力法,位移法在处理该类问题时具有更显著的适应性与高效性。这是因为位移法以节点位移作为基本未知量,能够更直接地体现无限刚度杆件“无变形但有弯矩”的力学特征,从而简化求解过程。

如图 7(a)所示,杆件 BC 中存在无限刚度部分,取无限刚度部分为杆件 BD,其余部分杆件刚度为常数。根据位移法可得到基本结构,于节点 B 处施加刚片以抵制转角变形,如图 7(b)所示。在节点 B 处施加单位转角时,杆件 BD 同样发生转动,节点 D 存在竖向位移,其变形示意图如图 7(c)所示。

分析单位转角作用下的结构内力时,根据变形样式可将杆件 BC 分为两端:刚度无限大的杆件 BD 段;承受外荷载、刚度为定值的 DC 段。杆件 BD 不发生变形,根据节点的单位转角,可得到节点 D 竖直向下的位移距离;杆件 DC 为刚接,可视为杆件先向下移动大小为  $l$  的线位移,然后发生单位大小的转角,变形分析图如图 7(d)所示;以此可得到杆件 DC 段的弯矩图;节点 D 处存在变形产生的内力,则杆件 BD 段的弯矩为线性,其斜率与杆件 DC 段弯矩的斜率一致;故杆件 BD 的弯矩可通过 DC 段弯矩延伸得到,基础结构的弯矩图如图 7(e)所示。

基本结构受均布荷载,取杆件 BC 进行分析,杆件的内力分析如图 7(f)所示。无限刚度杆件可视为一块巨大的刚体,杆件 DC 段的弯矩值可通过载常数得到;节点 D 处荷载反力为承受外力荷载的一半,也即为杆件 BD 段 D 节点处的内力荷载,故杆件 BD 段弯矩呈线性分布。由此可得到基本结构的弯矩图,如图 7(g)所示。

联立位移法基本方程,可得到转角未知量  $X_1$  的大小,具体计算步骤如下:

$$\begin{aligned} k_{11} &= 3li \\ F_{1p} &= -7ql^2/12 \\ X_1 &= 7ql^2/(372i) \end{aligned}$$

将得到的未知量带入  $M_1$  图后叠加  $M_p$  图,即为原结构的弯矩图,如图 7(h)所示。

### 3.3. 温度作用问题

在超静定结构未承受外部荷载但存在内外温差的情况下,由于材料的热胀冷缩特性,温差会引发结构产生约束变形,进而诱导内力生成。以下将以力法与位移法为理论框架,对该类温度作用问题展开系统分析。

#### 3.3.1. 力法解题

力法解题思路与前述方法一致,在计算内力平衡方程中的自由项时,变成进行弯矩及轴力在该方向上的积分,即为弯矩与轴力的面积。

如图 8(a)所示,即为在结构内外存在温差时的一次超静定结构。其中  $\alpha$  为材料的线膨胀系数,材料的刚度  $EI$  为常数,为方便计算,取截面高度  $h = l/10$ 。

根据力法计算步骤,可以得到该结构的基础结构在单位荷载作用下的弯矩结果,如图 8(b)所示。同时可得到各杆件的轴力值,杆件受拉取轴力为正值,如图 8(c)所示。平均温度会导致轴力的变化,轴力以拉伸杆件为正;温差则会导致弯矩变化。关键计算步骤如下所示:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI} \times \left( l \times l \times \frac{1}{2} \times \frac{2l}{3} + l \times l \times l \right) = \frac{4l^3}{3EI} \\ \Delta_1 &= \sum \frac{\alpha \cdot \Delta t}{h} \cdot \int M_1 ds + \sum \alpha \cdot t_0 \cdot \int N_1 ds = 460\alpha \end{aligned}$$

$$X_1 = -345EI\alpha/l^2$$

将得到的未知量带入  $M_1$  图后, 即为原结构的弯矩图, 如图 8(d)所示。

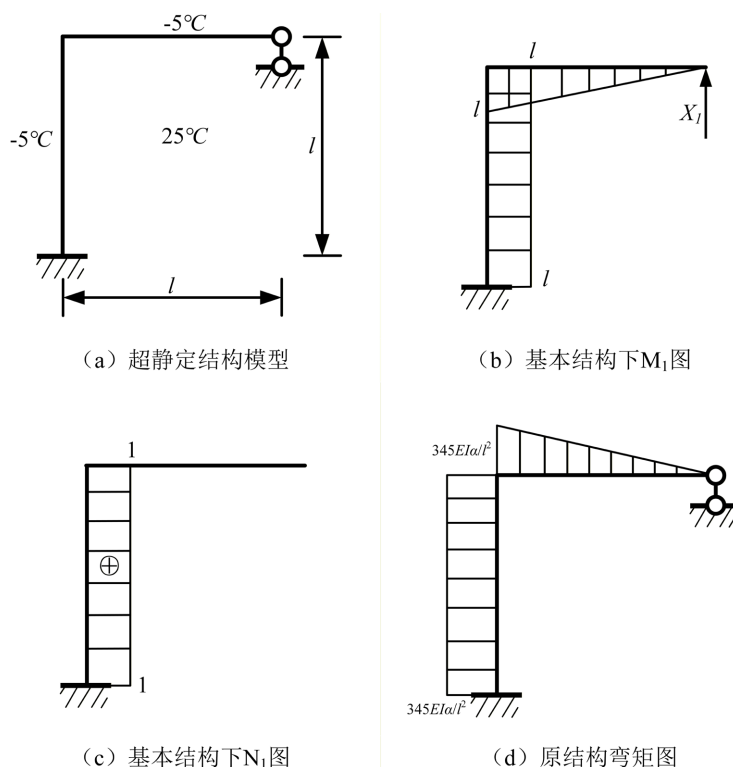


Figure 8. Solving temperature effects using the force method  
图 8. 力法解决温度作用问题

### 3.3.2. 位移法解题

在采用位移法对结构进行分析时, 而对于自由项的数值分为两部分: 一部分为因平局温度导致结构产生内力变形, 节点沿杆件方向发生变形, 变形趋势趋向向项温度高的一侧; 另一部分为结构内外温差导致结构的内力变形, 该部分结果可根据等截面温度变化杆的形常数表格得到, 温度较高侧相对变形较大, 故此时弯矩存在于结构温度较高侧。

如图 9(a)所示, 为一次超静定结构受温度影响的计算图。采用位移法进行分析该结构时, 存在两个未知量  $Z_1$ 、 $Z_2$ , 分别为节点 B 处的转角未知量与杆 BC 的水平位移未知量, 将两个未知量取为单位大小, 可得到基础结构, 如图 9(b)所示。

根据变形特征, 杆件在温度作用下存在向温度高的一侧延伸, 依据材料的温度膨胀系数可以得到各杆件沿自身方向的位移, 其示意图如图 9(c)所示。根据形常数表格可以得到杆件在单位转角与单位位移作用下的弯矩结果, 如图 9(d)(e)所示。

温度作用可分为平均温度作用与温差作用, 二者结果叠加即为结构在温度作用下的内力结果。平均温度影响杆件变形, 导致杆件沿其杆件原方向进行延伸, 故可视为在杆件的节点处产生对应位移, 故平均温度作用的结果可视为位移导致的杆件内力, 如图 9(f)所示。温差对杆件的影响可根据表格得到, 如图 9(g)所示。其关键步骤如下所示:

$$t_0 = (15 + 25)/2 = 20^\circ\text{C}, \Delta t = 25 - 15 = 10^\circ\text{C}$$

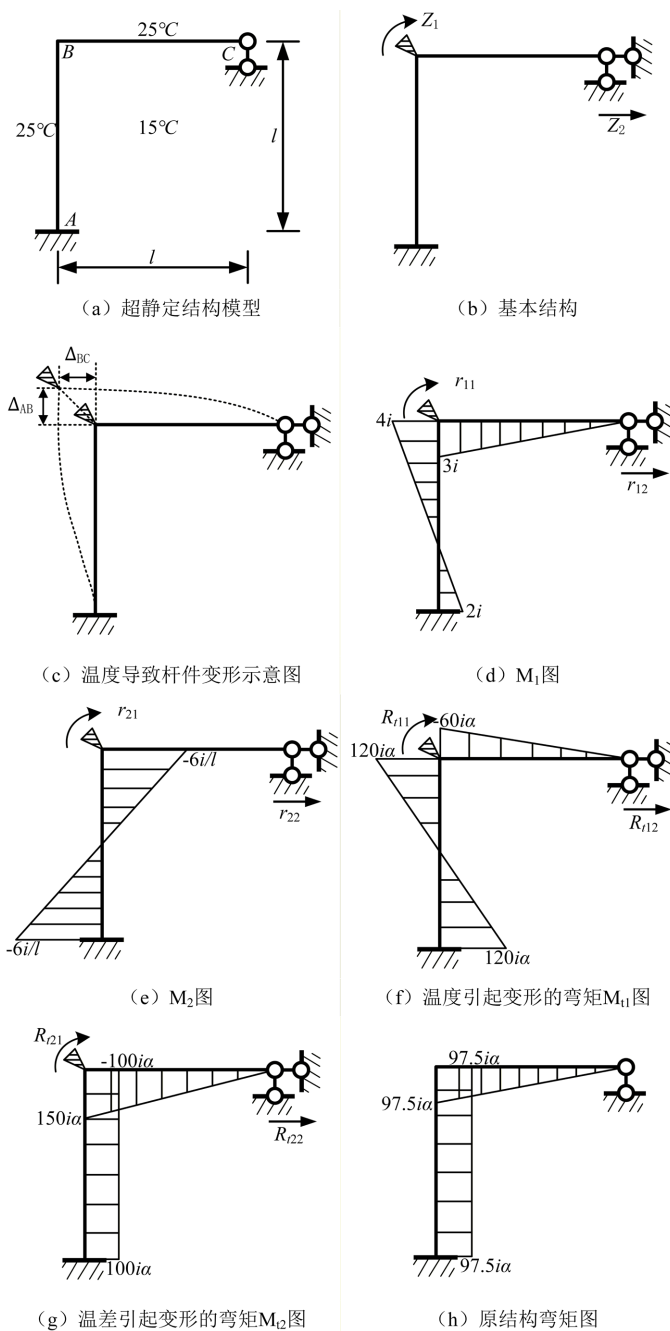
$$\Delta_{AB} = \Delta_{BC} = t_0 \cdot \alpha \cdot l = 20\alpha l$$

$$r_{11} = 7i, \quad r_{12} = r_{21} = -6i/l, \quad r_{22} = 12i/l^2$$

$$R_{r11} = 60i\alpha, \quad R_{r12} = -240i\alpha/l, \quad R_{r21} = 50i\alpha, \quad R_{r22} = 0$$

将得到的未知量带入下述公式，即可得到原结构的弯矩，如图 9(h)所示。

$$M = \sum M_i \cdot X_i + \sum M_{ii}$$



**Figure 9.** Solving temperature effects using the displacement method  
**图 9.** 位移法解决温度作用问题

## 4. 总结

本文聚焦结构力学中的特殊问题，首先系统剖析了力法与位移法的解题核心要点，包括力法中基本未知量的选取原则、位移法中内力方向的判定逻辑及内力符号的规范确定方法。在此基础上，运用上述两种方法对特殊问题展开实例分析，解题的基本思路为：设置基本未知量→选取基本结构→建立基本方程。同时针对“建立基本方程”步骤，得出如下规律：

(1) 采用力法求解弹簧支座问题时，平衡方程中的柔度系数需涵盖三部分贡献：单位外力作用下产生的位移、节点弹簧自身变形引发的位移，以及其他节点位移传递至弹簧的附加位移；基于位移法处理弹簧支座问题时，弹簧支座仅产生线位移及弹性力，则方程构建中仅需考虑弹簧因线位移产生的变形效应。

(2) 针对无限刚度杆件问题，位移法为优先选用的求解方法。可将无限刚度杆件等效为固定约束，与之相连的杆件会产生角位移和线位移，而无限刚度杆件的弯矩需根据其杆端受力状态分别确定。

(3) 力法解决温度作用问题时，力法平衡方程中的自由项为弯矩及轴积分与温度相关参数乘积之和。对于温度作用问题，位移法方程中的自由项需包含两类变形影响：一是平均温度变化导致杆件沿长度方向伸缩变形所诱发的弯矩，其方向与杆件变形趋势一致；二是内外温差引起杆件两侧胀缩差异所产生的弯矩，该弯矩主要分布于杆件温度较高的一侧。

本文围绕结构力学中常见的特殊问题展开系统分析，通过对力法与位移法在各类特殊问题中的应用探究，提炼出相应的解题一般规律，并深入剖析了结果产生的主要成因。研究成果可为该类问题的求解提供具有实践意义的参考，助力学习者更高效地掌握特殊问题的处理方法，同时也为结构力学相关问题的深入研究提供了一定的思路借鉴。

## 参考文献

- [1] 赵朝前. 力法基本结构的选择技巧[J]. 科技视界, 2020(29): 90-92.
- [2] 黄亮, 马捷, 邓煜涵, 等. 一种超静定变截面梁的力法计算技巧[J]. 力学与实践, 2016, 38(4): 459-461.
- [3] 赵东平, 和琦, 唐伟超, 等. 隧道衬砌内力的力法解算及抗力范围对计算结果的影响研究[J]. 现代隧道技术, 2024, 61(S1): 109-120.
- [4] 杨小钰. 结构力学中位移法的探讨[J]. 中国设备工程, 2021(6): 239-240.
- [5] 贾宇峰. 力法与位移法的比较分析[J]. 西部素质教育, 2016, 2(14): 44-44, 46.
- [6] 王媛媛, 杨彬. 浅谈力法与位移法在结构计算中的异同[J]. 建筑工程技术与设计, 2017(4): 1430.
- [7] 阮澍铭, 于玲玲. 结构力学(研究生)考试指导[M]. 北京: 中国建材工业出版社, 2003.
- [8] 龙驭球, 包世华, 袁驷. 结构力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.