

# Grey Verhulst Load Forecasting Model Based on Objective Programming

Deqiang Zhou<sup>1</sup>, Feng Xiang<sup>2</sup>

<sup>1</sup>School of Information and Mathematics, Yangtze University, Jingzhou

<sup>2</sup>Shengli Oilfield Petroleum Development Center, Dongying

Email: zdqmfk@yahoo.com.cn, menglihantang@163.com

Received: May 8th, 2012; revised: May 24th, 2012; accepted: Jun. 6th, 2012

**Abstract:** In order to overcome the defects of parameters estimation in traditional grey Verhulst model by means of least square procedure, and enhance the forecasting accuracy of grey Verhulst model in medium and long-term load forecasting for load growth in S-type or load growth being saturated, an estimation method based on least absolute deviation, which use objective programming to estimate the parameters of grey Verhulst is presented. Then, this model is applied to long-term load forecasting, and is compared with the traditional grey Verhulst model. The results show that the method takes advantages of the benefits of least absolute deviation, which is small influenced by singular value, and robustness is good. This model avoids the defects of parameters estimation in traditional grey Verhulst model by means of least square procedure, and forecasting precision is higher.

**Keywords:** Load Forecasting; Objective Programming; Least Absolute Deviation; Least Square Procedure; Grey Verhulst Model

## 基于目标规划法的灰色 Verhulst 负荷预测模型

周德强<sup>1</sup>, 向 锋<sup>2</sup>

<sup>1</sup>长江大学信息与数学学院, 荆州

<sup>2</sup>胜利油田石油开发中心, 东营

Email: zdqmfk@yahoo.com.cn, menglihantang@163.com

收稿日期: 2012年5月8日; 修回日期: 2012年5月24日; 录用日期: 2012年6月6日

**摘 要:** 为克服传统灰色 Verhulst 模型中利用最小二乘法估计参数存在的不足, 改善灰色 Verhulst 模型在具有“S型”增长或处于饱和增长状态的中长期电力负荷预测中的精度, 提出在最小一乘法准则下, 利用目标规划法估计灰色 Verhulst 模型参数的方法。对某中长期负荷进行预测, 并与传统的灰色 Verhulst 模型进行对比分析。结果表明, 该方法发挥了最小一乘法受奇异值影响小, 稳健性好的优点, 避免了利用最小二乘法估计灰色 Verhulst 模型参数存在的不足, 预测精度更高。

**关键词:** 负荷预测; 目标规划法; 最小一乘法; 最小二乘法; 灰色 Verhulst 模型

### 1. 引言

电力负荷预测是实现电力系统安全生产、经济运行的基础, 对于制定电力系统规划和实现电力系统运行自动化、安全化等都具有十分重要的意义<sup>[1]</sup>。根据预测周期的不同, 负荷预测通常可分为超短期负荷预

测、短期电力负荷预测<sup>[2-4]</sup>和中期电力负荷预测<sup>[1,5-7]</sup>。

灰色理论在电力负荷预测中已成功应用<sup>[7,8]</sup>。文献[7]将灰色 Verhulst 模型用于中长期电力负荷预测, 对近似“S型”增长的负荷预测上, 取得了较好的预测效果。一般地, 估计传统和改进的灰色 Verhulst 模型

中的参数都采用的是最小二乘法<sup>[7,9-11]</sup>，而这种估计方法一方面要假设总体服从正态分布，另一方面该方法基于残差平方和最小寻优，很容易陷入局部最小，而且易受奇异点的影响，若中长期负荷存在奇异点，应用最小二乘法会导致异常数据产生过分不恰当的影响，使得应用传统的灰色 Verhulst 模型进行预测，结果会产生较大的偏差<sup>[12]</sup>。针对这一问题，本文提出基于最小一乘法准则，利用目标规划法估计灰色 Verhulst 模型的参数。该方法可以不依赖总体的任何假设估计参数，目标函数受异常数据的影响比最小二乘法小得多，并且计算简便。在中长期负荷预测实例中验证了该方法的有效性和优越性。

## 2. 传统的灰色 Verhulst 模型

建立灰色 Verhulst 模型的一般步骤如下<sup>[7,9]</sup>：

1) 设  $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$  表示原始数据序列。

2) 作累加生成： $x_k^{(1)} = \sum_{j=1}^k x_j^{(0)}$ , ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ )，

得到  $X^{(1)} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})$ 。

3) 模型建立： $X^{(1)}$  的白化方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = b(x^{(1)})^2, \quad (1)$$

其中  $a, b$  为参数， $t$  为时间。用原始数据序列  $x_k^{(0)}$  近似代替微分方程中的  $\frac{dx^{(1)}}{dt}$ ，并利用

$z_k^{(1)} = 0.5(x_k^{(1)} + x_{k-1}^{(1)})$ , ( $k = 2, 3, \dots, n$ )，作紧邻均值生成  $Z^{(1)} = (z_2^{(1)}, z_3^{(1)}, \dots, z_n^{(1)})$ ，代换  $x^{(1)}$ ，则式(1)变为

$$X^{(0)} + aZ^{(1)} = b(Z^{(1)})^2, \quad (2)$$

4) 模型求解：对应  $n$  个时间序列，(2)式可构成一方程组：

$$Y = B\alpha, \quad (3)$$

其中： $B = \begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_n^{(1)} & (z_n^{(1)})^2 \end{bmatrix}$ ， $Y = \begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$ ，对参数  $a, b$  做

最小二乘估计

$$\min_{a,b} \sum_{k=2}^n [x_k^{(0)} - (-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2)]^2, \quad (4)$$

解得  $(\hat{a}, \hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$ ，从而白化方程的解为  $x_t^{(1)} = \frac{\hat{a}x_0^{(1)}}{\hat{b}x_0^{(1)} + (\hat{a} - \hat{b}x_0^{(1)})e^{at}}$ ，将  $x_0^{(1)}$  取为  $x_1^{(0)}$ ，则时间响应序列为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)} = \frac{\hat{a}x_1^{(0)}}{\hat{b}x_1^{(0)} + (\hat{a} - \hat{b}x_1^{(0)})e^{ak}}. \quad (5)$$

从而可得原始数据的拟合值为

$$\hat{x}_{k+1}^{(0)} = \hat{x}_{k+1}^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)}, \quad (6)$$

在实际预测中，常遇到原始序列  $X^{(0)}$  本身为“S 型”的情况，这样可取原始序列为  $X^{(1)}$ ，其 1 阶累减生成序列为  $X^{(0)}$ ，建立 Verhulst 模型直接对  $X^{(1)}$  进行模拟，同样可取得较好的预测效果<sup>[9]</sup>。

## 3. Verhulst 模型参数估计的目标规划法

在应用灰色 Verhulst 模型进行负荷预测时，首先要确定模型中的参数，参数估计的好坏直接影响到预测的结果。分析传统 Verhulst 模型参数估计方法，对于式(2)变形为

$$X^{(0)} = -aZ^{(1)} + b(Z^{(1)})^2, \quad (7)$$

式(7)有解  $(\hat{a}, \hat{b})$  的充要条件为系数矩阵

$$\begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_n^{(1)} & (z_n^{(1)})^2 \end{bmatrix}$$

与增广矩阵

$$\begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 & x_2^{(0)} \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 & x_3^{(0)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_n^{(1)} & (z_n^{(1)})^2 & x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

的秩相等，然而式(7)往往无解，因此一般考虑尽量使式(7)成立来估计参数。

为叙述方便，记

$$\varepsilon_k = x_k^{(0)} - (-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2), \quad k = 2, 3, \dots, n$$

**定义 1:** 令  $\varepsilon_k = x_k^{(0)} - \left(-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2\right)$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ ,  $f(\varepsilon_k)$  为损失函数<sup>[13]</sup>,  $f(\varepsilon_k)$  对  $\varepsilon_k$  的敏感度记作  $S(f, \varepsilon_k)$ , 定义为,

$$S(f, \varepsilon_k) = \frac{\Delta f / f}{\Delta \varepsilon_k / \varepsilon_k} \approx \frac{df}{d\varepsilon_k} \cdot \frac{\varepsilon_k}{f}, \quad (8)$$

考虑如下损失函数,

$$f_1(\varepsilon_k) = \varepsilon_k^2, \\ f_2(\varepsilon_k) = |\varepsilon_k| = \begin{cases} \varepsilon_k, & \varepsilon_k \geq 0, \\ -\varepsilon_k, & \varepsilon_k < 0. \end{cases}$$

当  $\varepsilon_k = 0$  时,  $f_1(\varepsilon_k) = f_2(\varepsilon_k)$ , 因此, 只考虑  $\varepsilon_k \neq 0$  时的情况, 计算两种损失函数对  $\varepsilon_k$  的敏感度,

$$S(f_1, \varepsilon_k) \approx \frac{df_1}{d\varepsilon_k} \cdot \frac{\varepsilon_k}{f_1} = 2\varepsilon_k \cdot \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_k^2} = 2, \quad (9)$$

$$S(f_2, \varepsilon_k) \approx \frac{df_2}{d\varepsilon_k} \cdot \frac{\varepsilon_k}{f_2} = 1. \quad (10)$$

式(4)采用最小二乘法估计参数  $(a, b)$ , 本质是利用  $\left[x_k^{(0)} - \left(-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2\right)\right]^2$  刻画真实值  $x_k^{(0)}$  与模型值  $-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2$  的偏差, 主要考虑到计算简便, 参数估计易于用公式求解。用最小二乘法估计 Verhulst 模型参数时, 假定  $x_k^{(0)}$  是在正态加性噪声下对一个回归函数的度量结果<sup>[13]</sup>, 但当原始数据存在奇异点时, 由式(9)可见, 平方会放大奇异点对可信度的影响, 即最小二乘法的稳健性不好<sup>[12]</sup>, 进而影响到 Verhulst 模型的预测效果。在中长期负荷预测中, 经常会出现异常点, 异常点处的加性噪声可能是由其他分布产生的, 而异常点恰好在某些方面反映了一些特殊的信息, 不应随意剔除, 因此利用 Verhulst 模型进行中长期负荷预测时, 不宜用最小二乘法估计模型参数。

由式(9)、(10)可见, 损失函数  $f_2(\varepsilon_k)$  相对于  $f_1(\varepsilon_k)$  对误差  $\varepsilon_k$  的敏感度要弱, 因此, 针对中长期负荷预测中经常会出现异常点这一问题, 可考虑利用最小一乘法

$$\min_{a,b} \sum_{k=2}^n \left| x_k^{(0)} - \left(-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2\right) \right|, \quad (11)$$

估计 Verhulst 模型的参数。该方法利用  $\left|x_k^{(0)} - \left(-az_k^{(1)} + b(z_k^{(1)})^2\right)\right|$  刻画偏差, 由于只考虑偏差的一次方而非平方, 所受影响就较小, 即最小一乘法比

最小二乘法的稳健性好。

模型(11)的目标函数不可导, 不易求解, 引入偏差变量将其转化为以  $a, b$  为决策变量的目标规划问题。

设  $a = a_1 - a_2$ ,  $a_1, a_2 \geq 0$ ,

$$b = b_1 - b_2, \quad b_1, b_2 \geq 0, \quad (12)$$

$$d_k^+ \geq 0, \quad d_k^- \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

分别为正负偏差变量。

将优化问题(11)转化为目标规划模型

$$\min \sum_{k=2}^n d_k^+ + d_k^- \\ s.t. \quad -a_1 z_k^{(1)} + a_2 z_k^{(1)} + b_1 (z_k^{(1)})^2 - b_2 (z_k^{(1)})^2 + d_k^- - d_k^+ = x_k^{(0)} \\ a_1, a_2, b_1, b_2 \geq 0, \\ d_k^-, d_k^+ \geq 0, k = 2, 3, \dots, n \quad (13)$$

求解上述目标规划问题, 并根据式(12)得到参数  $\hat{a} = a_1 - a_2, \hat{b} = b_1 - b_2$ , 再根据(5)、(6)得到预测结果。

#### 4. 实例分析

为了说明该改进模型的性能, 以陕西省某市 1984~1989 年用电量为预测样本<sup>[9]</sup>, 对该市 1990 年的用电量进行预测。该市年用电量历史数据见表 1。

原始数据呈现“S 型”增长状态, 基于传统灰色 Verhulst 模型与本文模型得到的预测结果及其相对误差见表 2。

**Table 1. The electric energy data of a certain city from 1984 to 1990**

**表 1. 陕西省某市 1984~1990 年用电量数据**

年份	1984	1985	1986	1987
用电量/GWh	2783.20	3028.26	3290.55	3477.77
年份	1988	1989	1990	-
用电量/GWh	3685.02	3935.09	4210.29	-

**Table 2. The forecasting results and relative errors based on different models**

**表 2. 基于不同模型得到的预测结果及其相对误差**

年份	实际值	增长率/%	预测结果/GWh		相对误差/%	
			Verhulst 模型	本文	Verhulst 模型	本文
1984	2783.20	-	2783.20	2783.20	0	0
1985	3028.26	8.09	3018.04	3039.87	0.34	0.38
1986	3290.55	7.97	3253.16	3295.33	1.14	0.14
1987	3477.77	5.39	3485.79	3545.82	0.23	1.95
1988	3685.02	5.62	3713.24	3787.84	0.77	2.79
1989	3935.09	6.35	3933.08	4018.41	0.05	2.11
1990	4210.29	6.54	4143.19	4235.10	1.59	0.58

原始数据 1986 年的增长率为 7.97%，然后突降到 1987 年的 5.39%，降幅达 2.58%，其他年份的增长率波动较小，可以认为 1987 年负荷为奇异点。实验数据表明，用传统 Verhulst 模型预测 1990 年负荷相对误差为 1.59%，本文仅为 0.58%，降低 1.01%，较传统方法的推广性能更好。从以上分析可得，若中长期负荷存在奇异点，基于最小一乘法估计灰色 Verhulst 模型的参数可以使模型的预测精度相对于传统方法得到显著改善。

## 5. 结束语

最小二乘法具有良好的解析性，易于求解，使得该方法在灰色 Verhulst 模型中成为普遍采用的参数估计方法，但是该方法容易陷入局部最小，并且稳健性较差。对于中长期负荷预测而言，经常面临奇异点，最小二乘法在处理存在奇异点的预测问题时，不能很好地拟合。本文提出基于最小一乘法估计灰色 Verhulst 模型的参数，理论上可以克服最小二乘法估计模型参数的缺陷，利用目标规划法将灰色 Verhulst 模型的参数估计转化为一个目标规划问题求解，使得计算简便，由于目标规划可以不依赖总体的任何假设估计参数，可实现问题的灵敏度分析，应用更广泛。对实例进行预测，本文方法的预测精度高于传统模型

的推算结果，这进一步说明其优越性。

## 参考文献 (References)

- [1] 俞明生, 冯桂宏, 杨祥. 组合优化灰色模型在中长期电力负荷预测中的应用[J]. 沈阳工业大学学报, 2007, 29(2): 450-453.
- [2] 徐军华, 刘天琪. 基于小波分解和人工神经网络的短期负荷预测[J]. 电网技术, 2004, 28(8): 30-33.
- [3] 李元诚, 方廷健, 于尔铿. 短期负荷预测的支持向量机方法研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(6): 55-59.
- [4] 杨延西, 刘丁. 基于小波变换和最小二乘支持向量机的短期电力负荷预测[J]. 电网技术, 2005, 29(13): 60-64.
- [5] 高强, 王胜辉, 徐建源. 基于神经网络的中期电力负荷预测[J]. 沈阳工业大学学报, 2004, 26(1): 41-43.
- [6] 王成山, 杨军, 张崇见. 灰色系统理论在城市年用电量预测中的应用——不同预测方法的分析比较[J]. 电网技术, 1999, 23(2): 15-18.
- [7] 张伏生, 刘芳, 赵文彬等. 灰色 Verhulst 模型在中长期负荷预测中的应用[J]. 电网技术, 2003, 27(5): 37-39.
- [8] 张俊芳, 吴伊昂, 吴军基. 基于灰色理论负荷预测的应用研究[J]. 电力自动化设备, 2004, 24(5): 24-26.
- [9] 王福建, 李铁强, 俞传正. 道路交通事故灰色 Verhulst 预测模型[J]. 交通运输工程学报, 2006, 6(1): 122-126.
- [10] Z. J. Guo, J. Ye and X. Q. Song. Verhulst model on time series error corrected for port throughput forecasting. Journal of the Eastern Asia Society for Transportation Studies, 2005, 6: 881-891.
- [11] D. H. Li. Verhulst model to predicate ground displacement and deformation. Coal Science and Technology, 2004, 32(3): 58-59.
- [12] 安德洪, 韩文秀, 岳毅宏. 组合预测法的改进及其在负荷预测中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 26(6): 842-844.
- [13] V. N. Vapnik. The nature of statistical learning theory. Heidelberg: Springer Verlag, 1995.