International Journal of Fluid Dynamics 流体动力学, 2022, 10(4), 46-55
Published Online December 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijfd
https://doi.org/10.12677/ijfd.2022.104005

Hans汉斯

对流扩散特征值问题的DG有限元方法

段丽梅，张云飞

贵州师范大学数学科学学院，贵州 贵阳

收稿日期：2022年10月21日；录用日期：2022年11月6日；发布日期：2022年12月9日

摘　要

对流扩散方程作为偏微分方程一个很重要的分支，在很多的领域都有着广泛的应用，如流体力学、气体动力学等。由于对流扩散方程很难通过解析的方法得到解析解，所以通过各种数值方法来求解对流扩散方程在数值分析中占有很重要的地位。本文研究了对流扩散特征值问题的间断伽辽金有限元法，并给出了误差估计。

关键词

对流扩散特征值，DG方法，先验误差

The DG Finite Element Method for Convection-Diffusion Eigenvalue Problems

Limei Duan, Yunfei Zhang

School of Mathematics Science, Guizhou Normal University, Guiyang Guizhou

Received: Oct. 21st, 2022; accepted: Nov. 6th, 2022; published: Dec. 9th, 2022

Abstract

Convection-diffusion equations are an important class of partial differential equations that arise in many scientific fields including fluid mechanics, gas dynamics and so on. Since these equations normally have no closed form analytical solutions, it is very important to have accurate numerical approximations. In this paper, we study the discontinuous Galerkin finite element method for convection-diffusion eigenvalue problems, and we present error estimates.

文章引用: 段丽梅, 张云飞. 对流扩散特征值问题的 DG 有限元方法[J]. 流体动力学, 2022, 10(4): 46-55.
DOI: 10.12677/ijfd.2022.104005

Keywords

Convection-Diffusion Eigenvalue, Discontinuous Galerkin Method, Priori Error Estimate

1. 引言

对流扩散特征值问题可运用于流体力学、能源开发和电子科学等多个领域。因此利用有限元方法求解对流扩散特征值问题引起了越来越多学者的研究兴趣。例如讨论对流扩散特征值问题的后验误差估计、讨论对流扩散特征值问题的多水平校正方法，讨论自适应算法等等。因此，有限元方法解决这一问题成为引起数学和物理领域关注的重要课题。文献[1]讨论了对流扩散特征值问题的 Crouzeix-Raviart 元二网格离散方法、文献[2]讨论了自适应算法、文献[3]讨论了自适应同伦方法等等。DG 方法的主要特点是测试函数沿网格中的面(或边)不连续，具有局部质量守恒、易于与其他方法相结合、*hp* 自适应、处理多边形网格等优点。因此，DG 方法已经开发出了许多问题，例如文献[4]。此外，DG 方法还被用于解决各种特征值问题，如拉普拉斯特征值问题[5]、经典的自伴随斯特克洛夫特征值问题[6]、非自伴随斯特克洛夫特征值问题[7]等。本文研究了对流扩散特征值问题的 DG 方法的先验误差估计。

2. 基础理论准备

设 $\Omega\subset R^2$ 是一个具有 Lipshitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界域，设 $\boldsymbol{n}$ 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，考虑 Dirichlet 边界条件特征值问题；求 $\lambda\in C$ 和 $u\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$\begin{cases}-\Delta u+\boldsymbol{b}\cdot\nabla u+cu=\lambda u, & \text{in } \Omega,\\ u=0, & \text{on } \partial\Omega,\end{cases} \tag{2.1}$$

表示

$$(u,v)=\int_\Omega u\bar{v}\mathrm{d}x,$$

并定义连续的双线性形式

$$a(u,v)=(\nabla u,\nabla v)+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla u,v)+(cu,v),\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.2}$$

假设 $\boldsymbol{b}$ 和 c 是 Ω 上的有界函数，$\nabla\cdot\boldsymbol{b}$ 存在且满足

$$-\frac{1}{2}\nabla\cdot\boldsymbol{b}+c\ge 0,\ \text{in } \Omega.$$

在这些假设下，存在与 u、v 无关的两个正常数 A 和 B，使得双线性形式 $a(\cdot,\cdot)$ 满足

$$\begin{aligned}&|a(u,v)|\le A\|u\|_{1,\Omega}\|v\|_{1,\Omega},\quad \forall u,v\in H_0^1(\Omega)\\&|a(v,v)|\ge B\|v\|_{1,\Omega}^2,\quad \forall v\in H_0^1(\Omega)\end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.1)的弱形式是求 $(\lambda,u)\in C\times H_0^1(\Omega), u\ne 0$，使得下面等式成立

$$a(u,v)=\lambda(u,v),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

设 $\mathcal{T}_h=\{\kappa\}$ 为 Ω 的形状规则网格，单元 κ 中边的长度用 h_e 表示，单元 κ 的直径用 h_κ 表示，并且 $h=\max\limits_{\kappa\in\mathcal{T}_h}h_\kappa$，$\Gamma_h=\Gamma_h^i\cup\Gamma_h^b$，其中 Γ_h^i 表示内部边，Γ_h^b 表示边界 $\partial\Omega$ 上的边。定义 v 在 e 上的均值和跳跃：

$$\{v\}=\frac{1}{2}\left(v^{+}+v^{-}\right),\quad [\![v]\!]=v^{+}\boldsymbol{n}^{+}+v^{-}\boldsymbol{n}^{-},$$

其中 $e=\partial\kappa^{+}\cap\partial\kappa^{-}$，$v^{+}=v|_{\kappa^{+}}$，$v^{-}=v|_{\kappa^{-}}$，$\boldsymbol{n}$ 是从 κ^{+} 到 κ^{-} 的单位外法向量。如果 $e\in\Gamma_h^b$，定义 v 在 e 上的均值和跳跃：

$$\{v\}=v,\quad [\![v]\!]=v\boldsymbol{n}.$$

定义

$$\begin{aligned}a_h\left(w_h,v_h\right)=&\sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\int_\kappa\left(\nabla w_h\cdot\overline{\nabla v_h}+(\boldsymbol{b}\cdot\nabla w_h)\overline{v_h}+cw_h\overline{v_h}\right)\mathrm{d}x-\sum_{e\in\Gamma_h}\int_e\{\nabla w_h\}\cdot[\![\overline{v}]\!]\mathrm{d}s\\&+\sum_{e\in\Gamma_h}\int_e[\![w_h]\!]\cdot\left\{\overline{\nabla v_h}\right\}\mathrm{d}s+\sum_{e\in\Gamma_h}\sigma h_e^{-1}\int_e[\![w_h]\!]\cdot[\![\overline{v_h}]\!]\mathrm{d}s.\end{aligned}\tag{2.5}$$

其中 σ 为惩罚参数。

定义 DG 元空间：

$$S^h=\left\{v\in L^2(\Omega):v|_\kappa\in\mathbb{P}_m(\kappa),\forall\kappa\in\mathcal{T}_h\right\}.$$

其中 $\mathbb{P}_m(\kappa)$ 是 κ 上的 m 次多项式空间。引入剖分 $\mathcal{T}_h$ 上的分片函数空间：

$$H^s(\mathcal{T}_h)=\left\{v\in L^2(\Omega):v|_\kappa\in H^s(\kappa),\forall\kappa\in\mathcal{T}_h\right\}.$$

(2.4)的有限元近似是求 $(\lambda_h,u_h)\in C\times S^h$，$u_h\neq 0$，使得

$$a_h(u_h,v_h)=\lambda_h(u_h,v_h),\quad\forall v_h\in S^h.\tag{2.6}$$

(2.4)的源问题为：求 $w\in H_0^1(\Omega)$，使得

$$a(w,v)=(f,v),\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).\tag{2.7}$$

(2.7)的 DG 近似是求 $w_h\in S^h$，使得

$$a_h(w_h,v_h)=(f,v_h),\quad\forall v_h\in S^h.\tag{2.8}$$

定义线性有界算子 $T:L^2(\Omega)\to H_0^1(\Omega)$ 满足

$$a(Tf,v)=(f,v),\quad\forall f\in L^2(\Omega),v\in H_0^1(\Omega),\tag{2.9}$$

则(2.4)等价的算子形式为：

$$Tu=\frac{1}{\lambda}u.\tag{2.10}$$

由(2.6)可定义对应的离散解算子 $T_h:L^2(\Omega)\to S^h$ 满足

$$a_h(T_hf,v)=(f,v),\quad\forall f\in L^2(\Omega),\forall v\in S^h.\tag{2.11}$$

则(2.6)等价的算子形式为：

$$T_hu_h=\frac{1}{\lambda_h}u_h.\tag{2.12}$$

引入赋予 DG 范数的和空间 $V(h)=S^h+H_0^1(\Omega)$，其中 DG 范数为：

$$\|u_h\|_G^2 = \sum_{\kappa\in\mathcal{T}_h}\left(\|\nabla u_h\|_{0,\kappa}^2 + \|u_h\|_{0,\kappa}^2\right) + \sum_{e\in\Gamma_h}\sigma h_e^{-1}\|[\![u_h]\!]\|_{0,e}^2, \tag{2.13}$$

并且在分片函数空间 $H^{1+s}(\mathcal{T}_h)\left(s>\frac{1}{2}\right)$ 上定义 h 范数为：

$$\|u_h\|_h^2 = \|u_h\|_G^2 + \sum_{e\in\Gamma_h} h_e \|\{\nabla u_h\}\|_{0,e}^2. \tag{2.14}$$

注意在间断有限元空间 S^h 上，$\|\cdot\|_G$ 与 $\|\cdot\|_h$ 是等价的。

由文献[2]和格林公式可以推导出 DG 方法的一致性，再联系(2.8)的 DG 近似，可以得到误差公式为：

$$a_h(w-w_h, v_h) = 0,\quad \forall v_h\in S^h. \tag{2.15}$$

不难看出，如下连续性和椭圆性成立：

$$|a_h(u_h,v_h)| \lesssim \|u_h\|_h\|v_h\|_h,\quad \forall u_h,v_h\in S^h + H^{1+s}(\mathcal{T}_h)\left(s>\frac{1}{2}\right), \tag{2.16}$$

$$\|u_h\|_G^2 \lesssim |a_h(u_h,u_h)|. \tag{2.17}$$

定理 2.1 设 w 和 w_h 分别是(2.7)式和(2.8)式的解， $w\in H^{1+s}(\Omega)$，那么有以下不等式成立

$$\|w-w_h\|_h \lesssim \inf_{v_h\in S^h}\|w-v_h\|_h,\quad \text{if } s>\frac{1}{2}, \tag{2.18}$$

$$\|w-w_h\|_G \lesssim h^s\|f\|_{0,\Omega},\quad \text{if } 0<s<\frac{1}{2}. \tag{2.19}$$

证明首先，我们证明(2.18)式，通过利用(2.17)式，(2.15)式和(2.16)式，可以推导出

$$\begin{aligned}\|v_h-w_h\|_G^2 &\lesssim |a_h(v_h-w_h, v_h-w_h)| \\ &\lesssim a_h(v_h-w, v_h-w_h) + a_h(w-w_h, v_h-w_h) \\ &\lesssim \|v_h-w\|_h\|v_h-w_h\|_G,\end{aligned} \tag{2.20}$$

利用三角不等式，(2.20)式，可以得到

$$\|w-w_h\|_h \lesssim \|w-v_h\|_h + \|v_h-w_h\|_G \lesssim \|w-v_h\|_h + \|v_h-w\|_h. \tag{2.21}$$

因此，对于足够小的 h，可以得到(2.18)式。

下面，我们证明(2.19)式。由(2.17)式和(2.5)式，得到

$$\begin{aligned}\|w^I-w_h\|_G^2 &\lesssim |a_h(w^I-w, w^I-w_h)| \\ &\lesssim \|w^I-w\|_G\|w^I-w_h\|_G + \left|\sum_e\int_e\{\nabla(w^I-w)\}\cdot[\![w^I-w_h]\!]\mathrm{d}s\right. \\ &\quad \left.+\sum_e\int_e[\![w^I-w]\!]\cdot\{\nabla(w^I-w_h)\}\mathrm{d}s\right| \\ &\lesssim \|w^I-w\|_G\|w^I-w_h\|_G + \sum_e\|\{\nabla(w^I-w)\}\|_{0,e}\|[\![w^I-w_h]\!]\|_{0,e} \\ &\quad + \sum_e\|\{\nabla(w^I-w_h)\cdot n\}\|_{\xi-\frac{1}{2},e}\|(w^I-w)_{\kappa^+}-(w^I-w)_{\kappa^-}\|_{\frac{1}{2}-\xi,e}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

由迹不等式，插值估计，逆估计，推导出

$$\begin{aligned}\left\|\left\{\nabla\left(w^{I}-w_{h}\right)\cdot n\right\}\right\|_{\xi-\frac{1}{2},e}&\lesssim h^{\delta}\left(\left\|\nabla\left(w^{I}-w_{h}\right)\right\|_{\xi,\kappa^{+}\cup\kappa^{-}}+h_{\kappa}^{1-\xi}\left\|\Delta\left(w^{I}-w_{h}\right)\right\|_{0,\kappa^{+}\cup\kappa^{-}}\right)\\&\lesssim h^{\delta}\left(h_{e}^{-\xi}\left\|\nabla\left(w^{I}-w_{h}\right)\right\|_{0,\kappa^{+}\cup\kappa^{-}}+\left\|w\right\|_{1+\xi,\kappa^{+}\cup\kappa^{-}}\right),\end{aligned}\tag{2.23}$$

$$\left\|\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{+}}-\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{-}}\right\|_{\frac{1}{2}-\xi,e}\lesssim\left\|\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{+}}-\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{-}}\right\|_{1-\xi,\kappa^{+}\cup\kappa}\lesssim h^{\xi+\beta}\left\|f\right\|_{1+\beta,w\left(\kappa^{+}\right)\cup w\left(\kappa^{-}\right)},\tag{2.24}$$

结合以上两个式子和稳定性估计，且$\delta+\xi=s$，得

$$\begin{aligned}&\sum_{e}\left\|\left\{\nabla\left(w^{I}-w_{h}\right)\cdot n\right\}\right\|_{\xi-\frac{1}{2},e}\left\|\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{+}}-\left(w^{I}-w\right)_{\kappa^{-}}\right\|_{\frac{1}{2}-\xi,e}\\&\lesssim\left(h_{e}^{\beta+\delta}\left\|\nabla\left(w^{I}-w_{h}\right)\right\|_{0,\Omega}+h_{e}^{\beta+s}\left\|w\right\|_{1+\xi,\Omega}\right)\left\|f\right\|_{0,\Omega},\end{aligned}\tag{2.25}$$

由迹不等式，插值估计，DG 范数的定义和稳定性估计，可得

$$\begin{aligned}&\sum_{e}\left\|\left\{\nabla\left(w^{I}-w\right)\right\}\right\|_{0,e}\left\|\left[\!\left[w^{I}-w_{h}\right]\!\right]\right\|_{0,e}\lesssim\sum_{e}\left\|\left[\!\left[w^{I}-w_{h}\right]\!\right]\right\|_{0,e}h_{e}^{\beta-\frac{1}{2}}\left\|w\right\|_{1+\beta,\kappa^{+}\cup\kappa}\\&\lesssim\sum_{e}\left(\left\|h_{e}^{-\frac{1}{2}}\left[\!\left[w^{I}-w_{h}\right]\!\right]\right\|_{0,e}^{2}\right)^{\frac{1}{2}}h^{\beta}\left\|w\right\|_{1+\beta,\kappa^{+}\cup\kappa}\lesssim h^{\beta}\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}\left\|f\right\|_{0,\Omega},\end{aligned}\tag{2.26}$$

因此，可得到

$$\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}^{2}\lesssim h_{e}^{\beta+\delta}\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}\left\|f\right\|_{0,\Omega}+h^{\beta}\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}\left\|f\right\|_{0,\Omega}\lesssim h^{s}\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}\left\|f\right\|_{0,\Omega},\tag{2.27}$$

$$\left\|w^{I}-w_{h}\right\|_{G}\lesssim h^{s}\left\|f\right\|_{0,\Omega},\tag{2.28}$$

利用三角不等式和插值误差估计得(2.19)式，证明完成。

定理 2.2 设 w 和 w_h 分别是(2.7)式和(2.8)式的解，$w\in H^{1+r}(\Omega)$，那么有以下不等式成立

$$\left\|w-w_{h}\right\|_{0,\Omega}\lesssim h^{r}\left\|w-w_{h}\right\|_{h},\quad \text{if } r>\frac{1}{2},\tag{2.29}$$

$$\left\|w-w_{h}\right\|_{0,\Omega}\lesssim h^{2r}\left\|f\right\|_{0,\Omega},\quad \text{if } 0<r<\frac{1}{2}.\tag{2.30}$$

证明考虑(2.4)式对偶问题的源问题 $a\left(v,w^{*}\right)=(v,g),\forall v\in H_{0}^{1}(\Omega)$，对于任意固定的 $g\in L^{2}(\Omega)$，利用误差公式(2.15)，推导出

$$\begin{aligned}\left(w-w_{h},g\right)&=a_{h}\left(w-w_{h},w^{*}\right)=a_{h}\left(w-w_{h},w^{*}-w^{*I}\right)\\&\lesssim h^{r}\left\|w-w_{h}\right\|_{G}\left\|w^{*}\right\|_{1+r}+\left|\sum_{e}\int_{e}\nabla\left(w-w_{h}\right)\cdot\left[\!\left[w^{*}-w^{*I}\right]\!\right]\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.+\sum_{e}\int_{e}\left[\!\left[w-w_{h}\right]\!\right]\cdot\nabla\left(w^{*}-w^{*I}\right)\mathrm{d}s\right|.\end{aligned}\tag{2.31}$$

当 $r>\dfrac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{e}\int_{e}\left\{\nabla\left(w-w_{h}\right)\right\}\cdot\left[\!\left[w^{*}-w^{*I}\right]\!\right]\mathrm{d}s+\sum_{e}\int_{e}\left[\!\left[w-w_{h}\right]\!\right]\cdot\left\{\nabla\left(w^{*}-w^{*I}\right)\right\}\mathrm{d}s\right|\\&\lesssim\sum_{e}\left\|\left\{\nabla\left(w-w_{h}\right)\right\}\right\|_{0,e}h^{\frac{1}{2}+r}\left\|w^{*}\right\|_{1+r}+\sum_{e}h_{e}^{r-\frac{1}{2}}\left\|\left[\!\left[w-w_{h}\right]\!\right]\right\|_{0,e}\left\|w^{*}\right\|_{1+r}\\&\lesssim h^{r}\left\|w-w_{h}\right\|_{h}\left\|g\right\|_{0,\Omega}.\end{aligned}\tag{2.32}$$

将(2.32)代入(2.31)，利用 Riesz 表示定理可得到(2.29)式。

当 $0<r<\frac{1}{2}$ 时，有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_e \int_e \left\{\nabla\left(w-w_h\right)\right\}\cdot\left[\!\left[w^*-w^{*I}\right]\!\right]\mathrm{d}s\right| \\
&\lesssim \sum_e \left\|\left\{\nabla\left(w-w_h\right)\right\}\cdot\boldsymbol{n}\right\|_{\xi-\frac{1}{2},e}\left\|\left(w^*-w^{*I}\right)_{\kappa^+}-\left(w^*-w^{*I}\right)_{\kappa^-}\right\|_{\frac{1}{2}-\xi,e} \\
&\lesssim \sum_e h^{\delta}\left(\left\|\nabla\left(w-w_h\right)\right\|_{\xi,\kappa^+\cup\kappa^-}+h_e^{1-\xi}\left\|\Delta\left(w-w_h\right)\right\|_{0,\kappa^+\cup\kappa^-}\right) \\
&\quad\times\left\|\left(w^*-w^{*I}\right)_{\kappa^+}-\left(w^*-w^{*I}\right)_{\kappa^-}\right\|_{\frac{1}{2}-\xi,e} \\
&\lesssim h^{2r}\left\|f\right\|_{0,\Omega}\left\|g\right\|_{0,\Omega},
\end{aligned}\tag{2.33}$$

和

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_e \int_e \left[\!\left[w-w_h\right]\!\right]\cdot\left\{\nabla\left(w^*-w^{*I}\right)\right\}\mathrm{d}s\right| ? \\
&=\left|\sum_e \int_e \left(\left(w-w_h\right)_{\kappa^+}-\left(w-w_h\right)_{\kappa^-}\right)\left\{\nabla\left(w^*-w^{*I}\right)\cdot n\right\}\mathrm{d}s\right| \\
&\lesssim h^{2r}\left\|f\right\|_{0,\Omega}\left\|g\right\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}\tag{2.34}$$

将(2.33)和(2.34)代入(2.31)，利用 Riesz 表示定理，可以得到(2.30)式，证明完成。

从(2.19)式，我们可以得到以下稳定性估计：

$$\left\|T_h f\right\|_h \lesssim \left\|f\right\|_{0,\Omega}.\tag{2.35}$$

3. 特征值问题的先验误差分析

设 λ 是(2.4)的第 j 个特征值，具有代数重数 q 和陡度 α，其中 $\lambda_j=\lambda_{j+1}=\cdots=\lambda_{j+q-1}$。当 $\left\|T_h-T\right\|_{0,\Omega}\to 0$，(2.6)的 q 个特征值 $\lambda_{j,h},\cdots,\lambda_{j+q-1,h}$ 将收敛到 λ。设 $M(\lambda)$ 是与 λ 相关的(2.4)式的广义特征向量空间，$M_h(\lambda)$ 是与 λ_h 相关的(2.6)式的广义特征向量空间的直接和，λ_h 收敛于 λ。

给定两个闭子空间 V 和 U，这两个子空间的间隙表示为

$$\delta(U,V)=\sup_{u\in V,\left\|u\right\|_{0,\Omega}=1}\inf_{v\in U}\left\|u-v\right\|_{0,\Omega},\ \hat{\delta}(U,V)=\max\left\{\delta(U,V),\delta(V,U)\right\}.$$

$\hat{\lambda}_h=\frac{1}{q}\sum_{i=j}^{j+q-1}\lambda_{i,h}$ 表示算术平均值。

定理 3.1 设 $M(\lambda)\subset H^{1+s}(\Omega)\left(s>\frac{1}{2}\right), t=\min\{m,s\}$ 和 w_h，那么有以下不等式成立

$$\left|\lambda_h-\lambda\right|\lesssim h^{\frac{2t}{\alpha}}.\tag{3.1}$$

设 $u_h\in M_h(\lambda)$ 是(2.6)的广义特征向量空间的直接和，那么存在(2.3)的特征值 u 使得

$$\left\|u-u_h\right\|_{0,\Omega}\lesssim h^{(t+r)/\alpha},\tag{3.2}$$

$$\left\|u-u_h\right\|_h\lesssim h^t+h^{(t+r)/\alpha}.\tag{3.3}$$

如果设 $\alpha=1$，那么

$$\left\|u-u_h\right\|_h \lesssim h^t + h^{t+r}, \tag{3.4}$$

$$\left\|u-u_h\right\|_{0,\Omega} \lesssim h^r \left\|u-u_h\right\|_h . \tag{3.5}$$

证明记 $Tf = w$ 和 $T_h f = w_h$，结合算子形式和(2.20)式，可以得到

$$\begin{aligned}\left\|T-T_h\right\|_{0,\Omega} &= \sup_{0\neq f\in L^2(\Omega)} \frac{\left\|Tf - T_h f\right\|_{0,\Omega}}{\left\|f\right\|_{0,\Omega}} = \sup_{0\neq f\in L^2(\Omega)} \frac{\left\|w-w_h\right\|_{0,\Omega}}{\left\|f\right\|_{0,\Omega}} \\ &\lesssim \sup_{0\neq f\in L^2(\Omega)} \frac{h^{r+s}\left\|f\right\|_{0,\Omega}}{\left\|f\right\|_{0,\Omega}} \lesssim h^{2r} \to 0,\left(h\to 0\right).\end{aligned}$$

由文献[1]中定理(7.1)，定理(7.2)，定理(7.3)和定理(7.4)，有

$$\hat{\delta}\left(M\left(\lambda\right),M_h\left(\lambda\right)\right) \lesssim \left\|\left(T-T_h\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_{0,\Omega}, \tag{3.6}$$

$$\left|\lambda-\hat{\lambda}_h\right| \lesssim \sum_{i,l=j}^{j+q-1}\left|\left\langle\left(T-T_h\right)\varphi_i,\varphi_l^*\right\rangle\right| + \left\|\left(T-T_h\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_{0,\Omega}\left\|\left(T^*-T_h^*\right)\big|_{M\left(\lambda^*\right)}\right\|_{0,\Omega}, \tag{3.7}$$

$$\left|\lambda-\lambda_h\right| \lesssim \left\{\sum_{i,l=j}^{j+q-1}\left|\left\langle\left(T-T_h\right)\varphi_i,\varphi_l^*\right\rangle\right| + \left\|\left(T-T_h\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_{0,\Omega}\left\|\left(T^*-T_h^*\right)\big|_{M\left(\lambda^*\right)}\right\|_{0,\Omega}\right\}^{1/\alpha}, \tag{3.8}$$

$$\left|u-u_h\right|_{0,\Omega} \lesssim \left\|\left(T-T_h\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_{0,\Omega}^{1/\alpha}, \tag{3.9}$$

其中 $\left\{\varphi_i\right\}_{i=j}^{j+q-1}$ 是 $M\left(\lambda\right)$ 的基，$\left\{\varphi_l^*\right\}_{l=j}^{j+q-1}$ 是对偶基。

从定理 2.2 和定理 2.1，我们可以推断出

$$\begin{aligned}\left\|\left(T-T_h\right)\big|_{M(\lambda)}\right\|_{0,\Omega} &= \sup_{f\in M(\lambda),\left\|f\right\|_{0,\Omega}=1}\left\|Tf-T_h f\right\|_{0,\Omega} \\ &\lesssim \sup_{f\in M(\lambda),\left\|f\right\|_{0,\Omega}=1} h^{t+r}\left\|Tf\right\|_{1+t,\Omega}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

同理，我们有

$$\left\|\left(T^*-T_h^*\right)\big|_{M\left(\lambda^*\right)}\right\|_{0,\Omega} \lesssim h^{t+r} \sup_{f\in M\left(\lambda^*\right),\left\|f\right\|_{0,\Omega}=1}\left\|T^* f\right\|_{1+t,\Omega}. \tag{3.11}$$

将(3.10)式代入(3,9)式，可以得到(3,2)。

利用算子性质，由误差公式(2.25)，(2.16)式，可以得到

$$\begin{aligned}\left\langle\left(T-T_h\right)\varphi_i,\varphi_l^*\right\rangle &= a_h\left(T\varphi_i - T_h\varphi_i, T^*\varphi_l^*\right) \\ &= a_h\left(T\varphi_i - T_h\varphi_i, T^*\varphi_l^* - \left(T^*\varphi_l^*\right)^I\right) \\ &\lesssim \left\|T\varphi_i - T_h\varphi_i\right\|_h \left\|T^*\varphi_l^* - \left(T^*\varphi_l^*\right)^I\right\|_h \\ &\lesssim h^t\left\|T\varphi_i\right\|_{1+t} h^t\left\|T^*\varphi_l^*\right\|_{1+t} \lesssim h^{2t}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

将(3.10)式,(3.11)式和(3.12)式代入(3,8)式，我们得到(3.1)式。

由于 $u=\lambda Tu, u_h=\lambda_h T_h u_h$，利用三角不等式，(2.29)，(3.1)式，我们可以推导出

$$\left| \|u_h - u\|_h - \|-\lambda T_h u + \lambda T u\|_h \right| \lesssim \|-\lambda_h T_h u_h + \lambda T_h u\|_h \lesssim \|\lambda_h u_h - \lambda u\|_{0,\Omega} \lesssim h^{(t+r)/\alpha},$$

加上(2.18)式得到(3.3)式。

当$\alpha = 1$时，得

$$\|u - u_h\|_h \lesssim h^t + h^{t+r}, \quad \|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^{t+r}.$$

从而可得到

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} \lesssim h^r \|u - u_h\|_h .$$

4. 数值实验

在本节中，将报告一些数值实验，以此来证明我们方法的有效性。

考虑问题(2.1)，其中$\boldsymbol{b} = (0,0)$，$c = 0$。我们的程序是在 iFEM 软件包下编译的，我们使用 SIPG 方法$(\theta = 1)$来进行计算。当$\boldsymbol{b} = (0,0)$时，我们将特征值进行排序。

我们考虑以下三个测试域：L 形域$\Omega_L = (-1,1)^2 \setminus ([0,1) \times (-1,0])$，方形域$\Omega_S$且顶点为$(0,1),(1,0),(0,-1),(-1,0)$，狭缝结构域$\Omega_{SL} = (-1,1)^2 \setminus \{0 \le x \le 1, y = 0\}$。设置惩罚参数为$\sigma = 40$。我们在表 1 和表 2 中列出了通过计算得出的数值结果，从表 1 和表 2 中，我们可以看出，该算法能达到最优收敛阶数。

Table 1. The eigenvalue numerical solution results of P1 element for Ω_L, Ω_S, Ω_{SL}

表 1. 关于区域Ω_L，Ω_S，Ω_{SL}的一次元特征值数值解结果

Domin	h	*dof*	λ_1	Error	rate
Ω_L	1/8	18	9.68183177703541	0.010322912178967	0.54752820144130
	1/16	36	9.67042863648946	0.007062847360313	0.732189027169809
	1/32	72	9.65798463260152	0.004251762144351	0.875761633246100
	1/64	144	9.64838805730213	0.002317066190284	0.796041031633780
	1/128	288	9.64356880634479	0.001334462001625	0.833410276294000
Domin	h	*dof*	λ_1	Error	rate
Ω_S	1/2	6	10.01089082866180	0.054074539728354	0.575380879683627
	1/4	12	9.97164534156961	0.036289913061964	1.701594822755240
	1/8	24	9.91328960713576	0.011157190430592	1.100941881727680
	1/16	48	9.88268849973972	0.005201616332422	1.120473182924910
	1/32	96	9.87720972901890	0.002392446739869	0.735966882429369
Domin	h	*dof*	λ_1	Error	rate
Ω_{SL}	1/8	24	8.47417316342465	0.00872281246999	0.54897824456314
	1/16	48	8.45258472752046	0.00596207750184	0.64140078277942
	1/32	96	8.41976135769202	0.00382222934394	0.94298157998748
	1/64	192	8.40557928090898	0.00198815848681	0.70904441518552
	1/128	384	8.39398781461038	0.00121620662321	0.90308344586586

Table 2. The eigenvalue numerical solution results of P2 element for Ω_L, Ω_S, Ω_{SL}

表 2. 关于区域 Ω_L，Ω_S，Ω_{SL} 的二次元特征值数值解结果

Domin	*h*	*dof*	λ_1	Error	rate
	1/8	36	9.63485000085603	0.00030683093408	0.62744396232687
	1/16	72	9.63644377247644	0.00019861849599	1.00475087409285
Ω_L	1/32	144	9.63787391034161	0.00009898275505	0.78674658203632
	1/64	288	9.63847915772557	0.00005737533278	0.14410889399246
	1/128	576	9.63868091390773	0.00005192112784	0.61366754022801
Domin	*h*	*dof*	λ_1	Error	rate
	1/2	12	9.86507391756196	0.00022336111619	0.53614942475366
	1/4	24	9.86627449731763	0.00015403184314	1.42509423898113
Ω_S	1/8	48	9.86817629538561	0.00005736069433	0.04501083787391
	1/16	96	9.86830780925435	0.00005559871923	0.70366586314381
	1/32	192	9.86884493234143	0.00003413817148	0.45289598783267
Domin	*h*	*dof*	λ_1	Error	rate
	1/8	48	8.36323567490973	0.00100411394684	0.78893621674504
	1/16	96	8.36557530331546	0.00058115172794	0.85945958635435
Ω_{SL}	1/32	192	8.36782455013341	0.00032030699117	0.26268189495829
	1/64	384	8.36826344754864	0.00026698772096	0.46821245124601
	1/128	768	8.36893577466835	0.00019299466151	0.25234957567621

5. 结论

对流扩散方程在实际问题中有着广泛的应用，本文给出了求解对流扩散特征值问题的间断 Galerkin 有限元方法，为了推导出先验误差估计，关键是证明离散解算子 T_h 在 $L^2(\Omega)$ 中的范数意义上收敛于狄利克雷解算子 T，即 $\|T-T_h\|_{0,\Omega}\to 0$，在本文中证明了 $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ 范数的误差是 DG 范数 $\|\cdot\|_h$ 的高阶小量误差。我们在三个测试域 $\Omega_L,\Omega_S,\Omega_{SL}$ 上进行了数值实验，从数值结果可以看出，我们的方法可以实现特征值的最优收敛阶，得到特征函数的最优阶误差估计，数值试验表明了该算法的有效性。因此，对于流体力学问题，该方法有着较强的应用价值。

基金项目

贵州师范大学学术新苗基金(黔师新苗[2021]A01)。

参考文献

[1] 杜莹玉，韩家宇. 对流扩散特征值问题的 Crouzeix-Raviart 元二网格离散方案. 贵州师范大学学报（自然科学版), 2021, 39(6): 8-12.

[2] Li, Y., Bi, H. and Yang, Y. (2022) The a Priori and a Posteriori Error Estimates of DG Method for the Steklov Eigenvalue Problem in Inverse Scattering. *Journal of Scientific Computing*, **91**, Article No: 20. https://doi.org/10.1007/s10915-022-01775-1

[3] Carstensen, C., Gedicke, J., Mehrmann, V. and Miedlar, A. (2011) An Adaptive Homotopy Approach for Non-Selfadjoint Eigenvalue Problems. *Numerische Mathematik*, **119**, 557-583.

https://doi.org/10.1007/s00211-011-0388-x

[4] Cockburn, B., Karniadakis, G.E. and Shu, C.W. (2012) Discontinuous Galerkin Methods: Theory, Computation and Applications (Vol. 11). Springer Publishing Company, New York.

[5] Dong, G., Guo, H. and Shi, Z. (2020) Discontinuous Galerkin Methods for the Laplace-Beltrami Operator on Point Cloud. arXiv preprint arXiv: 2012.15433.

[6] Zeng, Y. and Wang, F. (2017) A posteriori Error Estimates for a Discontinuous Galerkin Approximation of Steklov Eigenvalue Problems. *Applications of Mathematics*, **62**, 243-267. https://doi.org/10.21136/AM.2017.0115-16

[7] Meng, J. and Mei, L. (2020) Discontinuous Galerkin Methods of the Non-Selfadjoint Steklov Eigenvalue Problem in Inverse Scattering. *Applied Mathematics and Computation*, **381**, Article ID: 125307. https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125307