

# 一阶偏微分方程的应用：交通流建模分析

胡玉玺, 郑瑞牧

中国矿业大学(北京)理学院, 北京

收稿日期: 2024年9月6日; 录用日期: 2024年9月18日; 发布日期: 2024年12月10日

## 摘要

本文主要研究偏微分方程在交通流中的应用, 并将该案例应用到具体的教学中去。首先设计并分析了全新的单车道与多车道的交通流模型, 此模型在车辆数量守恒的基础上, 将问题抽象为关于车流量的一阶微分方程, 通过求解方程, 集中讨论了在有(无)流出情况下单车道的变化情况与抑制激波的产生等性质。通过模型的建立以及求解的方程的分析方法, 可以培养学生的数学建模能力以及解决实际问题的能力。

## 关键词

偏微分方程, 交通流, 多车道, 激波

# Application of First-Order Partial Differential Equations: Traffic Flow Modeling and Analysis

Yuxi Hu, Ruimu Zheng

School of Science, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing

Received: Sep. 6<sup>th</sup>, 2024; accepted: Sep. 18<sup>th</sup>, 2024; published: Dec. 10<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

This paper primarily investigates the application of partial differential equations in traffic flow and applies this case to specific teaching practices. Initially, a novel single-lane and multi-lane traffic flow model is designed and analyzed. Based on the conservation of vehicle numbers, the problem is abstracted into a first-order differential equation concerning traffic flow. By solving the equation, the paper focuses on discussing the changes in single-lane conditions with (or without) outflow and the suppression of shock wave generation, among other properties. Through the establishment of the model and the analysis of the solved equations, students' abilities in mathematical modeling and problem-solving in real-world scenarios can be cultivated.

## Keywords

Partial Differential Equations, Traffic Flow, Multi-Lane, Shock Wave

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

随着全球城市化进程的加速, 交通流建模作为交通工程领域的一个重要研究课题, 对于缓解城市交通拥堵、提高道路使用效率、保障交通安全等方面具有重要的实际意义和应用背景。交通流模型能够模拟和预测车辆在道路上的流动行为, 为交通规划和管理提供科学依据。在众多交通流模型中, 基于偏微分方程的模型因其能够描述交通流的连续性和动态变化特性而受到广泛关注[1]-[4]。

宏观交通流模型, 又被称为流体力学模型或交通流连续介质模型, 最早由英国学者 Lighthill 和 Whitham 于 1955 年提出[1] [2]。该模型开创性地运用流体动力学理论来模拟交通流, 通过对单向运动的交通流在某一时刻和某一位置的有关变量进行分析, 以把握交通流的特性和本质。宏观交通流模型可以分为稳态模型和动态模型两大类。稳态模型假设交通流中的变化量, 如流量、速度与密度等, 仅与位置有关, 而与时间无关; 动态模型则进一步考虑了变化量与时间和位置的双重关系。本文主要研究动态模型, 旨在通过宏观交通流模型的视角, 探索偏微分方程在交通流建模中的应用, 并辅以微观交通流模型进行补充分析。

在实际交通系统中, 交通流的动态特性受到多种因素的影响, 包括车辆的启动、加速、减速、停车等行为, 以及道路条件、交通信号、驾驶员行为等。这些因素共同作用, 使得交通流呈现出复杂的动态变化。为了更准确地模拟这些动态变化, 本文设计并分析了全新的单车道与多车道交通流模型。这些模型基于车辆数量守恒的原则, 将问题抽象为关于车流量的一阶微分方程, 并通过求解这些方程, 集中讨论了在有流出和无流出情况下单车道的变化情况, 以及如何通过模型参数的调整来抑制激波(即交通拥堵)的产生。

本研究的意义在于, 通过建立和分析交通流模型, 不仅能够为理解交通流的动态行为提供新的视角, 而且能够为交通管理和规划提供理论支持。此外, 本研究还将探讨如何通过数学方法来优化交通流, 以期达到减少交通拥堵、提高道路使用效率的目的。本文的研究将为学生提供一个很好的教学案例, 培养学生数学建模的能力以及用所学知识解决具体问题的能力。

## 2. 无流出单车道模型的建立

首先回顾无流出单车道模型的建立。考虑一个最简单的情况: 在一条单行道上所有汽车同向移动, 不存在超车等次序变化, 我们假设  $x(t)$  是车辆的位置,  $u(x(t), t)$  表示速度, 我们知道  $x(t_0) = x_0$  以及

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t). \quad (1)$$

道路交通中一个重要的概念是交通密度。道路的交通密度是在特定位置  $x$  与时间  $t$  处单位长度内的车辆数量。可以使用流体密度的传统符号  $\rho$  来表示交通密度, 因此  $\rho(x, t)$  是在  $x$  和  $t$  处单位长度内的平均车辆数量。现在考虑交通流量的定义。交通流量是指车辆经过路边观察者的速度, 或者说是单位时间内通过路上定点的车辆数。我们可以把交通流量记为  $q$ , 表达式为:

$$q(x,t) = \rho(x,t)u(x,t). \quad (2)$$

如果选取一条路上的一段, 从点  $x=A$  到  $x=B > A$ , 可以知道在时间点  $t$  处于  $A$  与  $B$  之间的车辆数会主要取决于时间。如果进入  $AB$  段的车流多于流出的, 段内的车辆数会增加, 类似的如果流出的多于流入的, 车辆数减少。可以把  $A$  和  $B$  之间的流量用数学表示, 段内车辆数随时间的变化率应等于流量差。如果  $N_{AB}(t)$  是车辆数, 那么

$$\frac{dN_{AB}}{dt} = -q(B,t) + q(A,t). \quad (3)$$

另一方面, 我们知道  $AB$  段的车辆数可由密度积分计算出

$$N_{AB}(t) = \int_A^B \rho(x,t) dx.$$

因此有

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \rho(x,t) dx = -q(B,t) + q(A,t) = - \int_A^B \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} dx. \quad (4)$$

公式是道路车辆的全局守恒定律。注意在此公式里右边的符号是恒定的。如果  $q(B,t) > q(A,t)$ , 流出的车辆多于流入的车辆, 那么  $N_{AB}$  会减少。故有

$$\int_A^B \left( \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right) dx = 0. \quad (5)$$

由  $A, B$  的任意性, 可知

$$\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

此外, 我们可以假设  $u = u(\rho)$ , 而且上面的等式可以写成  $\rho$  和它的导数的关系式:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u(\rho)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

### 3. 有流出单车道模型的建立

现在考虑车辆流出的情况。在实际生活中, 从一个车道上离开的原因可能有很多, 但大致可以被归为两类: 一是因为该车道发生堵塞, 所以选择变道到另一车道, 这种情况与当前密度  $\rho$  有关。而另一类则是因为要到另一条路上才到达目的地, 这种与当前车道密度无关, 而是与位置  $x$  有关, 只要到达特定位置  $x$  即会变道。而车辆进入一个车道的的原因也是类似, 所以不失一般性只讨论流出, 把流入看作一种负向流出。

假设在  $AB$  段内两类流出都有发生, 第一类流出在  $t$  时刻流出车辆数量为  $N_{1out}$ , 而第二类记为  $N_{2out}$ , 则有

$$N_{AB}(t) = \int_A^B \rho(x,t) dx + N_{1out} + N_{2out}, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \int_A^B \rho(x,t) dx + \frac{dN_{1out}}{dt} + \frac{dN_{2out}}{dt} = -q(B,t) + q(A,t). \quad (9)$$

因为  $N_{1,2out}$  与密度有关, 所以记  $\frac{dN_{1,2out}}{dt} = q_{1,2out}$ , 因此有

$$\int_A^B \left( \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x,t)}{\partial x} \right) dx + q_{1out} + q_{2out} = 0. \quad (10)$$

此外, 假设

$$q_{1out} = \int_A^B g(\rho) dx, \quad q_{2out} = \int_A^B h(x) dx,$$

其中  $g(\rho)$  可以理解为单位时间单位长度内第一类流出的车辆密度,  $h(x)$  则是单位时间单位长度内第二类流出的密度。因此,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + g(\rho) + h(x) = 0. \tag{11}$$

此方程就是有流出的车辆守恒律。接下来考虑交通中有出口流出对于整个交通的影响与现实意义来确定流出函数  $g(\rho)$  与  $h(x)$ 。先只考虑第一类流出, 显然对于实际交通, 当车流量不大的情况下, 车辆并不会变道, 即  $g(\rho) = 0$ , 但如果一直没有流出, 交通会逐渐堵塞, 即  $\rho$  会增大且产生激波, 而第一类流出可以缓解这一现象, 所以可以对密度增长合理假设

$$g(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho < \rho_0, \\ a\rho, & \rho > \rho_0, \end{cases} \tag{12}$$

其中  $\rho_0$  是产生拥堵的临界密度,  $a > 0$ 。

我们可以根据特征线法与线性偏微分方程含  $\rho$  项的解法得到此方程的解为  $\rho = e^{-at} F(\phi(x, t))$ , 其中  $\phi(x, t)$  是满足

$$\frac{dx}{dt} = v(\rho) e^{at} \tag{13}$$

的特征线方程, 而  $F$  是满足特征线初始条件  $f(x, 0) = f_0(x)$  的函数。

由于非线性偏微分方程可能会出现激波的现象, 而激波的产生意味着特征线出现了间断现象, 这在交通流车辆守恒方程中体现为拥堵的产生。

在之前的讨论中, 我们知道了方程中加入含  $\rho$  项可以抑制  $\rho$  的增长, 其实此项同时也会一定程度抑制激波的产生, 即道路的出口不仅能降低车道密度, 还能遏制拥堵的产生。现在通过数学分析来解释这一点。

假设此单车道上车辆守恒方程为非线性

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

而  $t = 0$  时密度分布为

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & \text{如果 } x < 0, \\ 1-x, & \text{如果 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{如果 } x > 1 \end{cases}$$

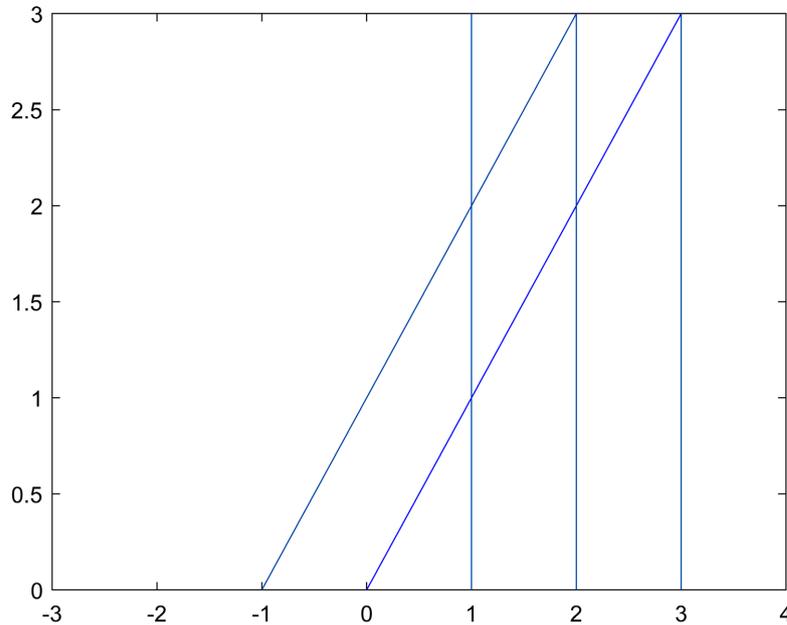
在这种情况下显然会产生激波, 如图 1 所示, 在  $x = 1, t = 1$  处开始产生激波。

而再考虑有流出项  $a\rho$  的情况, 方程变为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} + a\rho = 0.$$

则有

$$\frac{dx}{dt} = \rho(x, t),$$



**Figure 1.** The shock phenomenon when  $x = 1, t = 1$   
**图 1.** 当  $x = 1, t = 1$  时激波现象

解得

$$\rho = \rho_0 e^{-at} = g(x_0) e^{-at},$$

其中记  $\rho(x_0, 0) = g(x_0)$ 。带入特征线方程有

$$\frac{dx}{dt} = g(x_0) e^{-at},$$

得到

$$x = x_0 + \frac{1}{a} g(x_0) (1 - e^{-at}).$$

以  $x_0 = 0$  的情况为例, 此时有  $x = \frac{1}{a} (1 - e^{-at})$ , 我们来看  $x = 1$  时  $t$  与之前的变化, 故而

$$a = 1 - e^{-at},$$

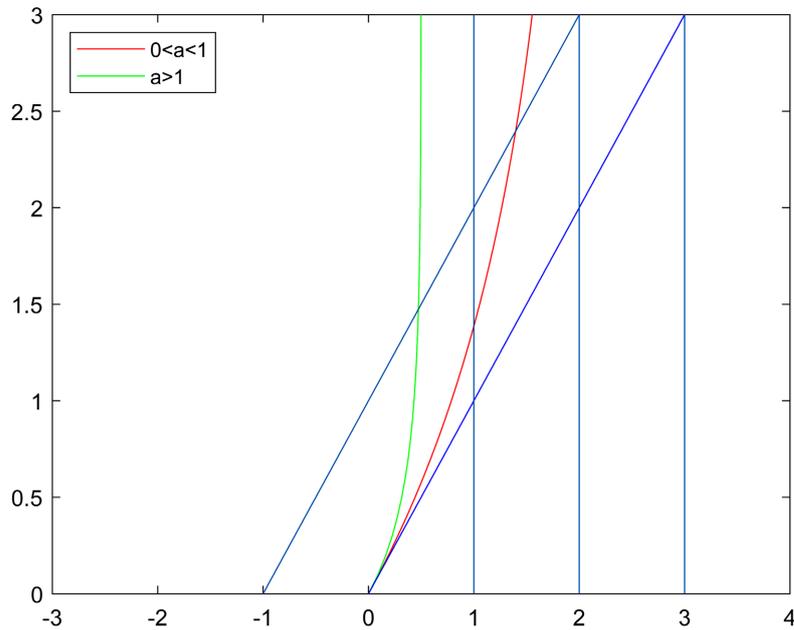
如图 2 所示, 当  $a > 1$  时特征线与  $t = 1$  无交点, 即不会产生激波, 当  $0 < a < 1$  时与  $t = 1$  交点在  $t = 1$  上方, 一定程度抑制了激波的产生, 所以证明此项一定能抑制激波的产生, 且当系数较大时可以阻止激波的产生。即若  $a_0$  为临界系数, 当  $a < a_0$  时可以缓解拥堵情况的产生, 而当  $a > a_0$ , 即流出量较大时可以阻止拥堵的产生。

接下来考虑  $h(x)$  的可能取值, 由于第二类流出的物理意义是在位置  $x$  处存在与其他道路交汇口, 因为要变道其他道路而流出。所以  $h(x)$  是只与位置  $x$  有关而与其他量无关, 且是只在特定的位置取非零值, 所以可以假设为

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x \notin U(x_i, \delta_i), \\ b, & x \in U(x_i, \delta_i). \end{cases} \quad (14)$$

其中  $x_i (i = 1, 2, \dots)$  为位于坐标轴该处的出口,  $U(x_i, \delta_i)$  是出口  $x_i$  的临域, 进入这段临域就能通过出口流出,

$\delta_i$  是各出口的临域半径, 常数  $b$  为预估每次流出车辆密度。注意这里第二类流出的车辆数应是和时间无关, 所以得到密度是常数。



**Figure 2.** The suppression of shock waves by the term involving  $a\rho$   
**图 2.**  $a\rho$  项对激波的抑制

为了方便讨论, 考虑  $g(\rho)=0$  情况, 并将  $h(x)$  看成全路段上因为第二类流出的密度, 故  $h(x)$  为恒大于 0 连续函数(或是看作在临域内讨论), 可以写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} + h(x) = 0, \tag{15}$$

显然(15)是非齐次的一类一阶偏微分方程, 故而仍可以用处理一阶偏微分方程的特征线法来计算,

$$\frac{dx}{dt} = v. \tag{16}$$

同时由于有非齐次项, 我们特征线不再是直线, 而是

$$\frac{d\rho}{dt} = -h(x).$$

我们可以解出在特征线上

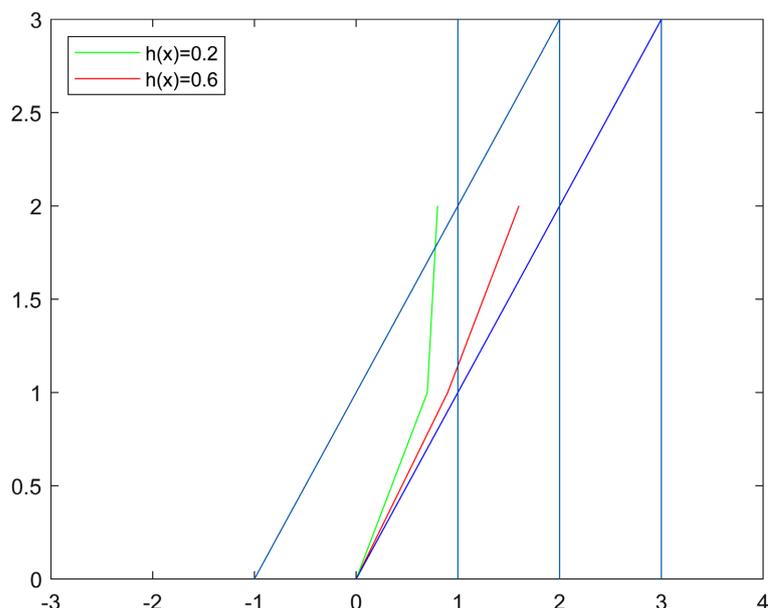
$$\rho = \rho(x, t) = -\int h(x) dt = -th(x) + \rho_0, \tag{17}$$

其中  $\rho_0 = g(x_0)$  是  $t=0$  时的密度分布。从而根据  $v(\rho)$  带入(16)解出特征线  $x = x(t)$ 。

下面证明  $h(x)$  同样能抑制激波的产生, 在方程(17)中由于  $h(x) > 0$ , 故特征线上  $\rho$  为递减函数, 那么与上一节讨论中  $\rho$  为递减函数类似, 可以证明这阻碍了激波的产生。与上一节一样取  $v(\rho) = \rho$ , 那么带入特征线方程有

$$x = x_0 - \frac{1}{2}h(x)t^2 + g(x_0)t.$$

考虑  $x_0 = 0$  时特征线为  $x = -\frac{1}{2}h(x)t^2 + t$ , 绘图可以看出  $h(x)$  也能延缓或阻止拥堵的产生, 如图 3 所示。



**Figure 3.** The suppression of shock waves by  $h(x)$

**图 3.**  $h(x)$  对激波的抑制

#### 4. 双车道模型的建立

经过对单车道模型的讨论, 现在把情况扩展到双车道情况。在无出入的单车道中有一阶 PDE

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

而当情况扩展到双车道时, 我们还是先假设在没进出与变道情况, 记一车道上  $\rho_1 = u$ 、 $v_1 = f$ , 另一车道上  $\rho_2 = v$ 、 $v_2 = g$ , 那么有方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g(v) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

当然在双车道模型中不可能两车道之间完全封闭, 不互相影响。假设无进出的两车道之间可以相互变道, 而在实际生活中, 司机变道一般是因为两种原因: 一是要驶离当前道路, 二是当前所在道路车辆较多, 而相邻道路更空旷时, 变道到车流稀疏车道显然是更好的选择。所以可以假设在无进出的情况下, 司机只会因为当前车道拥挤而向更空车道变道。那在这种情况下考虑单一车道, 车道会因为另一车道的交通情况而导致车辆的流入或流出, 这可以类比我们前面讨论的单车道有流出情况, 但现在影响车道流入流出的因素不再是自己车道的情况, 也要考虑另一车道的密度情况, 由于无外部条件时变道的方向一定是从密度高的车道流到密度低的车道, 所以考虑用两车道速度差来判断车辆流动方向, 类比单车道流入与流出情况, 当车道与相邻车道密度差大于 0 时, 应该流出, 在方程中体现为一抑制项  $a\rho$ , 反之则为  $-a\rho$ , 而且两车道相互影响是一样的。所以我们建立

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u) \frac{\partial u}{\partial x} + a(u-v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g(u) \frac{\partial v}{\partial x} + a(v-u) = 0, \end{cases} \quad (18)$$

其中不妨假设  $a > 0$ 。

下面考虑方程(18)的求解。解(18)时首先考虑最简单的情况, 假设两车道上车辆均是匀速行驶, 即  $f(x) = g(x) = c$ , 现在我们考虑如何解这个方程组。令方程组的第一个方程分别对  $x, t$  求偏导有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0. \quad (20)$$

将(19), (20)带入原方程组第二个方程有

$$u_{tt} + cu_{xt} + au_t + cu_{xt} + c^2 u_{xx} + cau_t + au_t + cau_x + a^2 u - a^2 u = 0,$$

即

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} + 2ca \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0.$$

对于解这个方程考虑最简单的道路无限长时, 即只需给定初始条件。那么此方程组可写成

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a \frac{\partial}{\partial t} + 2ca \frac{\partial}{\partial x} \right) u = 0, \\ u(0, x) = \gamma(x), u_t(0, x) = \eta(x). \end{cases}$$

考虑消去交叉项  $u_{xt}$ , 考虑变换

$$\begin{cases} x = s + ck, \\ t = s - ck. \end{cases} \quad (21)$$

那么  $u$  导数为

$$\begin{aligned} u_x &= u_s + u_k, \\ u_t &= c(u_s - u_k), \\ u_{xx} &= u_{ss} + 2u_{sk} + u_{kk}, \\ u_{xt} &= c(u_{ss} - u_{kk}), \\ u_{tt} &= c^2(u_{ss} - 2u_{sk} + u_{kk}). \end{aligned}$$

那么原方程可化为

$$c^2(u_{ss} - 2u_{sk} + u_{kk}) + 2c^2(u_{ss} - u_{kk}) + c^2(u_{ss} + 2u_{sk} + u_{kk}) + 2ca(u_s - u_k) + 2ca(u_s + u_k) = 0,$$

化简得

$$cu_{ss} + au_s = 0.$$

那么可解得  $u = A(k)e^{-\frac{c}{a}s} + B(k)$ , 其中  $A(k)$ 、 $B(k)$  为待定参数。原始的初始条件为  $u(0, x) = \gamma(x)$ ,

$u_t(0, x) = \eta(x)$ , 那么不失一般性还是可以设经过变换后初始条件为  $u(0, k) = \gamma(k)$ ,  $u_s(0, k) = \eta(k)$ , 注意这里的  $\gamma(k)$  与  $\eta(k)$  实际上是原  $\gamma$ 、 $\gamma$  经过变换(21)得到的。

$$\begin{cases} u(0, k) = A(k) + B(k) = \gamma(k), \\ u_s(0, k) = -\frac{c}{a}A(k) = \eta(k) \end{cases}$$

解得  $A = -\frac{a}{c}\eta(k)$ ,  $B = \gamma(k) + \frac{a}{c}\eta(k)$ , 所以方程通解为

$$u(s, k) = \frac{a}{c}\eta(k)\left(1 - e^{-\frac{c}{a}s}\right) + \gamma(k).$$

再对变换(21)进行逆变换

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2}(x+t), \\ k = \frac{1}{2c}(x-t). \end{cases}$$

得到

$$u(x, t) = \frac{a}{c}\eta\left(\frac{1}{2c}(x-t)\right)\left(1 - e^{-\frac{c}{2a}(x+t)}\right) + \gamma\left(\frac{1}{2c}(x-t)\right).$$

注意这里的  $\eta, \gamma$  是变换后的, 而不是原始的。

同理可得到  $v$  的表达式, 这即是双车道模型的解, 即车道密度的表达式。下面我们研究有流入和流出的双车道模型。在之前几节我们研究了无流入与流出情况下可变道的双车道模型, 结合在单车道时的研究思路, 接下来将研究可以流入流出的双车道。假设一车道有通向外界的出入口, 而另一车道只能通过变道到此车道才能出入。同时不失一般性, 可以假设只有流出情况, 因为流入可以看作负向的流出。那么结合单车道有流出的车辆守恒方程把原模型(18)改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + f(u)\frac{\partial u}{\partial x} + a(u-v) + bu = h(x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + g(v)\frac{\partial v}{\partial x} + a(v-u) = 0. \end{cases}$$

其中  $a, b, c$  均为大于零常数。

那么考虑最简单的车辆速度为常数以及道路长度接近无限情况, 其实方程与上一节非常类似, 只多了  $bu$  项, 所以可以用同样的方法处理, 首先将(21)中的一式中的  $v$  消去, 并考虑初始条件有

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c\frac{\partial^2}{\partial x\partial t} + c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial}{\partial t} + 2ca\frac{\partial}{\partial x} + b\right)u = h(x), \\ u(0, x) = \gamma(x), u_t(0, x) = \eta(x). \end{cases} \quad (22)$$

首先考虑不包含第二类流出的情况, 即  $h(x) = 0$ , 那么, 对方程(22)施加变换(21), 同理可得

$$2c^2u_{ss} + 2cau_s + bu = 0,$$

解得  $u(s, k) = A(k)e^{-\frac{-a+\sqrt{a^2-2b}}{2c}s} + B(k)e^{-\frac{-a-\sqrt{a^2-2b}}{2c}s}$ , 考虑变换后的初始条件

$$\begin{cases} u(0, k) = A(k) + B(k) = \gamma(k), \\ u_s(0, k) = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b}}{2c} A(k) + \frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b}}{2c} B(k) = \eta(k). \end{cases}$$

即可解出

$$\begin{aligned} A(k) &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 2b}}{2\sqrt{a^2 - 2b}} \gamma(k) - \eta(k), \\ B(k) &= \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b}}{2\sqrt{a^2 - 2b}} \gamma(k) - \eta(k). \end{aligned}$$

从而得到  $u(s, k)$ , 经过逆变换得到

$$u(x, t) = A(1/2c(x-t))e^{\left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b}}{4c}\right)(x+t)} + B(1/2c(x-t))e^{\left(\frac{-a - \sqrt{a^2 - 2b}}{4c}\right)(x+t)}.$$

## 5. 总结

在本研究中, 我们成功建立了包含流入和流出的单车道和双车道交通流模型, 并通过求解相关的一阶非线性偏微分方程, 深入探讨了交通流中的一些关键特性, 特别是关于交通拥堵的形成和缓解机制。以下是我们研究的主要结论。

### 5.1. 单车道模型的建立与分析

我们发现, 在无流出的单车道模型中, 车辆密度的增加会导致交通流速的下降, 从而可能引发交通拥堵。这一发现与现实世界的交通拥堵现象相吻合。引入流出机制后, 我们观察到流出项能有效减缓车辆密度的增长, 从而抑制激波(即交通拥堵)的产生。这一结果表明, 合理规划出口和交通流的分散对于缓解交通拥堵具有重要意义。

### 5.2. 双车道模型的建立与分析

在双车道模型中, 我们考虑了车辆在两个车道之间的流动, 发现车辆倾向于从密度较高的车道流向密度较低的车道, 这一现象在实际交通中普遍存在。我们进一步发现, 通过调整车道间的流入和流出参数, 可以有效地控制和优化交通流, 减少拥堵的发生。

### 5.3. 数学理论的应用

本研究利用偏微分方程的理论, 为交通流建模提供了一种新的数学工具, 这不仅有助于理解交通流的动态行为, 也为交通管理和规划提供了理论支持。通过数学模型的分析, 我们能够预测在不同交通条件下可能出现的交通流变化, 这对于设计更有效的交通控制策略具有实际应用价值。

### 5.4. 未来研究方向

尽管本研究在理论和模型方面取得了一定的成果, 但仍需进一步研究以考虑更多实际因素, 如不同车型、交通信号控制、以及非常规交通事件(如事故或道路施工)对交通流的影响。我们建议未来的研究可以探索更多关于交通流模型的稳定性和鲁棒性的问题, 以及如何将这些模型应用于实际的智能交通系统设计中。

通过这些结论, 我们期望能够为交通工程领域的研究者和实践者提供新的视角和工具, 以更有效地应对日益复杂的交通挑战。此外, 该研究可作为偏微分方程课程教学中的一个具体案例, 对提升学生数学建模的能力和水平、激发学生的学习兴趣有重要的价值。

## 基金项目

本文受中国矿业大学(北京)教学改革项目资助(项目编号: J230701)。

## 参考文献

- [1] Lighthill, M.J. and Whitham, G.B. (1955) On Kinematic Waves II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **229**, 317-345.
- [2] Lighthill, M.J. and Whitham, G.B. (1955) On Kinematic Waves I. Flood Movement in Long Rivers. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **229**, 281-316.
- [3] May, A.D. (1990) *Traffic Flow Fundamentals*. Prentice Hall Inc.
- [4] Childress, S. (2005) Notes on Traffic Flow. <https://math.nyu.edu/~childres/traffic3.pdf>