

The Velocity Model of Fluid Particulate under External Force

Shuai Shi, Fengjiao Wu, Xia Ning, Guangke Li*

College of Environmental Science and Resources, Shanxi University, Taiyuan
Email: 89778828@qq.com, 799827618@qq.com, 280107599@qq.com, lgkcarl@yahoo.com.cn

Received: Jun. 19th, 2013; revised: Jun. 26th, 2013; accepted: Jul. 10th, 2013

Copyright © 2013 Shuai Shi et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: On the assumption that the particulates are spherical and the fluid is under laminar conditions, the basic velocity model is deduced for the fluid particulate under external force at any moment by mathematical means, and the specific velocity models are further inferred in the effects of gravity, centrifugal and static electricity. It has instructive meaning in helping students understand in class and apply the theory to practice, although it is obtained under ideal conditions. Furthermore, the kinematic velocity of fluid particulate is a major parameter in designing the related dust catcher and sedimentation basin in water and air pollution control, so the study of the velocity model of fluid particulate can redound the application value in actual engineering design.

Keywords: Fluid; Particulate; External Force; Velocity Model

流体中颗粒物在外力作用下运动速度模型的探讨

师 帅, 武凤娇, 宁 夏, 李广科*

山西大学环境与资源学院, 太原
Email: 89778828@qq.com, 799827618@qq.com, 280107599@qq.com, lgkcarl@yahoo.com.cn

收稿日期: 2013年6月19日; 修回日期: 2013年6月26日; 录用日期: 2013年7月10日

摘 要: 假设颗粒为球形, 流体处于层流状态, 通过数学手段推导出流体中颗粒物在外力作用下任意时刻的基本速度模型, 并以此为基础进一步得出颗粒物在重力、离心力及静电力作用下的特定速度模型。虽然它们是在理想条件下得出的, 但却有助于学生在课堂学习中更好的理解该部分内容, 并加以应用。此外它们还可以为水及大气污染控制中各相关除尘器、沉淀池的设计参数提供重要依据, 有助于提高其在实际工程设计中的应用价值。

关键词: 流体; 颗粒物; 外力; 运动速度模型

1. 引言

在大气污染控制及水污染控制系统中都涉及到将颗粒物或悬浮物从废气或废水中分离的处理操作单元, 涉及重力沉降、絮凝沉降、离心分离及静电分离等过程。其设备包括重力沉降室、旋风除尘器、静电除尘器等大气除尘设备及沉砂池、沉淀池、气浮等

水处理设备。颗粒物或悬浮物在流体中(水、大气)的运动速度(u)是各除尘器、沉淀池、气浮装置设计的重要参数之一, 对除尘效率和沉淀效率的理论估算以及除尘器和沉淀池的实际应用价值具有重要影响^[1-3]。在大气污染控制及水污染控制教学过程中, 有关流体中颗粒物或悬浮物的运动速度公式比较零散, 没有建立统一的模型体系, 不利于课堂教学和实际工程设计。因此, 本文对大气及水污染控制领域中的相关内容做

*通讯作者。

了相应的整理、分析与总结，将颗粒物或悬浮物假定为球形颗粒，通过理论推导，建立起运动速度(u)随时间(t)变化的基本模型，进而通过改变外力类型(重力、离心力和静电力等)得出将颗粒物从流体中分离的特定速度模型。

2. 基本速度模型的建立

在不可压缩的连续流体中，做稳定运动的颗粒将受到流体阻力的作用。阻力的方向总是和速度向量方向相反。阻力的大小决定于颗粒的形状、粒径、表面特性、运动速度及流体的种类和性质，可按如下公式计算^[4]：

$$F_D = \frac{1}{2} C_D A_p \rho u^2$$

式中： C_D ——由实验确定的阻力系数，量纲为一； A_p ——颗粒在其运动方向上的投影面积， m^2 。对球形颗粒： $A_p = \frac{\pi d_p^2}{4}$ ； ρ ——流体的密度， kg/m^3 ； u ——颗粒与流体之间的相对运动速度， m/s 。

由相似理论可知，阻力系数是颗粒雷诺数的函数，即 $C_D = f(Re_p)$ ，其中 $Re_p = d_p \rho u / \mu$ ， d_p 为颗粒的定性尺寸(m)，对球形颗粒为其直径， μ 为流体的黏度($Pa \cdot s$)^[4]。

模型假设颗粒为球形颗粒，且颗粒运动处于层流状态，此时雷诺数 $Re \leq 1$ ，由斯托克斯阻力定律可知，球形颗粒所受到的阻力为^[4]： $F_D = 3\pi\mu d_p u$ 。

流体中的单个球形颗粒，在外力作用下沉降时，如忽略颗粒间的相互作用，其所受作用力由流体阻力 F_D 和除阻力外所有外力的合力 ΔF 组成(如图 1(a))(ΔF 是稳定的，不随时间和速度的变化而变化)则有：

$$\Delta F - F_D = ma$$

$$\text{设 } a = \frac{du}{dt}, \text{ 则: } \Delta F - F_D = m \frac{du}{dt}$$

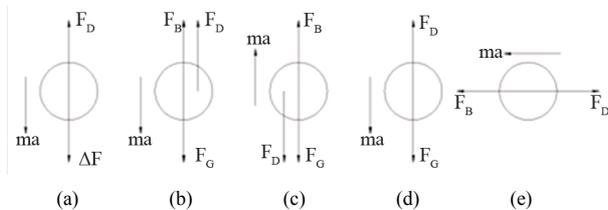


Figure 1. The force diagram of the fluid particles under external force

图 1. 流体中颗粒物在外力作用下受力示意图

对等式左右两边进行不定积分：

$$\int \frac{m \cdot du}{\Delta F - 3\pi\mu d_p u} = \int dt - \frac{m}{3\pi\mu d_p} \ln(3\pi\mu d_p u - \Delta F) = t + c$$

$$3\pi\mu d_p u - \Delta F = e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}(t+c)}$$

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } u=0, \text{ 则 } -\Delta F = e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}c}$$

$$\therefore 3\pi\mu d_p u - \Delta F = -\Delta F \cdot e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t}$$

$$3\pi\mu d_p u = \Delta F \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right)$$

$$\therefore u = \frac{\Delta F}{3\pi\mu d_p} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (1)$$

随着时间的增加， $e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t}$ 的值逐渐减小并接近于 0， ΔF 与 F_D 达到平衡，此时颗粒物达到了一个沉降的末端速度：

$$u_s = \frac{\Delta F}{3\pi\mu d_p} \quad (2)$$

可见，颗粒的终速度与 ΔF 成正比，与颗粒物的粒径 d_p 成反比。对于流体而言，颗粒终速度只与流体的黏度有关，与流体其他性质均无关。

3. 特定速度模型的建立与应用

式(1)是在 ΔF 和 F_D 的作用下得出的单个球形颗粒任意时刻速度的基本模型，其中 ΔF 是除阻力外所有外力的合力，具有普遍性，但在特定的条件下，需要通过改变外力类型(如重力、离心力和静电力等)，得出颗粒物的特定速度模型(包括重力沉降模型、离心沉降模型、静电沉降模型等)，这些模型是针对颗粒物处于不同外力条件下的具体应用模型，具有针对性。

3.1. 重力沉降模型

3.1.1. 模型建立

静止流体中的单个球形颗粒，在重力作用下发生沉降，假设颗粒只做垂直运动，此时所受到的作用力有重力 F_G ，流体浮力 F_B 和流体阻力 F_D (如图 1(b))，

即: $\Delta F = F_G - F_B = \frac{\pi d_p^3}{6}(\rho_p - \rho)g$, 将 ΔF 带入式(1),

经化简得:

$$u = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho)g}{18\mu} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (3)$$

其中: ρ ——流体的密度, kg/m^3 。

当 t 逐渐增加时, $e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t}$ 项接近于零, 此时颗粒受力平衡(即 $F_G = F_B + F_D$), 则颗粒终速度:

$$u_s = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho)g}{18\mu} \quad (4)$$

3.1.2. 模型的应用

在实际工程应用中, 此模型主要用于大气除尘中的重力沉降室和水处理中的沉淀池、沉砂池, 它们都是依靠重力作用将颗粒物或悬浮物从气体或液体中分离出来, 但它们之间的主要差异是流体的黏度 μ 和密度 ρ 。

当流体介质为气体时, 颗粒与气体的密度差较大, 此时可以忽略气体密度, 则沉降公式简化为:

$$u = \frac{d_p^2 \rho_p g}{18\mu} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (5)$$

颗粒沉降终速度模型为:

$$u_s = \frac{d_p^2 \rho_p g}{18\mu} \quad (6)$$

但在水等液态流体中, 由于颗粒物与这些流体的密度差较小, 因此不能忽略液体的密度。如果颗粒物的密度小于液体的密度, 则颗粒物不是沉降而是向上运动漂浮至液面, 其受力如图 1(c),

$$\Delta F = F_B - F_G = \frac{\pi d_p^3}{6}(\rho - \rho_p)g,$$

将此条件下 ΔF 带入式(1), 则颗粒的速度模型为:

$$u = \frac{d_p^2(\rho - \rho_p)g}{18\mu} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (7)$$

该模型属于水污染控制的气浮领域, 在实际工程中当颗粒物密度与液体密度相近时, 应采取一定的工程手段减小颗粒物的平均密度, 使其符合气浮模型的条件^[5]。

3.2. 离心沉降模型

3.2.1. 模型建立

随着气流一起旋转的球形颗粒, 在离心力作用下, 颗粒将产生离心的径向运动, 此时颗粒受到的重力和浮力方向与其运动方向垂直, 因而重力和浮力只改变其运动方向, 不改变大小, 故可忽略。加速度主要由离心力 F_C 和阻力 F_D 的合力产生(如图 1(d)), 此时 $\Delta F = F_C = \frac{\pi}{6} \cdot d_p^3 \cdot \rho_p \cdot \frac{u_t^2}{R}$, 将此条件下 ΔF 带入式

(1), 经化简得:

$$u = \frac{d_p^2 \rho_p u_t^2}{18\mu R} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (8)$$

其中: R ——旋转气流流线的半径, m ; u_t —— R 处气流的切向速度, m/s 。

当离心力和阻力达到平衡时, 颗粒便达到了一个离心沉降的末端速度, 此时颗粒物的末端速度:

$$u_c = \frac{d_p^2 \rho_p u_t^2}{18\mu R} \quad (9)$$

3.2.2. 应用

在实际工程应用中, 此模型主要用于大气除尘中的旋风除尘器和水处理中的旋流沉砂池(或沉淀池), 它们都是依靠离心力作用将颗粒物或悬浮物从气体或液体中分离出来, 在模型中关键是假设颗粒在旋转过程中只有水平运动无弧度运动。

3.3. 静电沉降模型

3.3.1. 模型建立

当流体中的单个球形颗粒处于电场中时, 假设颗粒作水平运动, 若忽略重力和惯性力等的作用, 颗粒所受的作用力主要是静电力(即库仑力) F_E 和流体阻力 F_D (如图 1e), 此时 $\Delta F = F_E = qE$, 将此条件下 ΔF 带入式(1), 则有:

$$u = \frac{qE}{3\pi\mu d_p} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (10)$$

其中: q ——颗粒的荷电量, C ; E ——颗粒所处位置的电场强度, V/m 。

在静电沉降中, e 的指数 $\frac{3\pi\mu d_p}{m}$ 是一个很大的数

值,因此在 t 很小的时候 $e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t}$ 的值可以忽略,即颗粒在 F_E 的作用下,静电力和阻力很快达到平衡,此时颗粒便达到了一个静电沉降的末端速度,习惯上称为颗粒的趋近速度,并用 ω 表示^[4]:

$$\omega = \frac{qE}{3\pi\mu d_p} \quad (11)$$

3.3.2. 模型的应用

在实际工程应用中,此模型主要用于大气除尘中的静电除尘器,它是依靠离心力作用将颗粒物从气体中分离出来。

4. 坎宁汉修正讨论

当颗粒尺寸小到与气体分子平均自由程大小差不多时,颗粒开始脱离与气体分子接触,颗粒运动发生“滑动”。这时,相对颗粒来说,气体不再具有连续流体介质的特性,流体阻力将减小。因此现将坎宁汉修正系数 C 引入式(1)来对这种滑动条件进行修正^[4],则任意时刻颗粒速度计算公式修正为:

$$u = \frac{\Delta F \cdot C}{3\pi\mu d_p} \left(1 - e^{-\frac{3\pi\mu d_p}{m}t} \right) \quad (12)$$

在此基础上将各模型中的参数代入上式,即可以

得到修正后的各个模型中颗粒物任意时刻速度和终端速度,此处不再赘述,但此修正公式仅适用于大气污染控制工程中。

5. 结果

公式(1)是其他特定模型的基础,实际应用中只要改变 ΔF 的类型就可以计算得到重力沉降、离心沉降、静电沉降模型中任意时刻颗粒物的速度。总之,对于只有垂直运动,无弧度运动的球形颗粒在任意流体,任意时刻的速度都可以通过公式(1)计算得到,这样可以方便记忆,简化计算且在工程中有实际的价值。

参考文献 (References)

- [1] 张自杰. 排水工程(下册(第四版))[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2006: 61-91,520-538.
- [2] 董长银, 栾万里, 周生田, 张琪. 牛顿流体中的固体颗粒运动模型分析及应用[J]. 中国石油大学学报(自然科学版), 2007, 31(5): 56-59.
- [3] 周国强. 大气污染扩散(高斯)模式简易推导法的研究[J]. 洛阳大学学报, 1994, 9(2): 30-34.
- [4] 郝吉明, 马广大, 王书肖. 大气污染控制工程(第三版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010: 156-211
- [5] 王言英. 格林函数与纳维——斯托克斯方程及其在船舶与海洋工程中的应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 40-45, 90-93.