International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2022, 11(3), 63-67
Published Online September 2022 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijm
https://doi.org/10.12677/ijm.2022.113008

Hans汉斯

修正的CH方程的非零渐近值的光滑孤立波的直接求法

彭　叠，易亚婷

南华大学数理学院，资源环境与安全工程学院，湖南 衡阳

收稿日期：2022年8月22日；录用日期：2022年9月5日；发布日期：2022年9月15日

摘　要

本文关注mCH方程的非零渐近值的光滑孤立波，并通过平面动力系统的分析方法，直接给出了孤立波解的显示表达式。

关键词

修正的Camassa-Holm方程，孤立波解，平面动力系统方法

Direct Method for Smooth Solitary Waves of Non-Zero Asymptotic Values of the Modified CH Equation

Die Peng, Yating Yi

School of Mathematics and Physics, School of Resource Environment and Safety Engineering, University of South China, Hengyang Hunan

Received: Aug. 22nd, 2022; accepted: Sep. 5th, 2022; published: Sep. 15th, 2022

Abstract

This paper focuses on the non-zero asymptotic value of the smooth solitary wave of the mCH equation and directly gives the explicit expression of the solitary wave solution through the analysis of the planar dynamical system.

Keywords

Modified Camsa-Holm Equation, Solitary Wave Solution, Planar Dynamical System Method

文章引用: 彭叠, 易亚婷. 修正的 CH 方程的非零渐近值的光滑孤立波的直接求法[J]. 力学研究, 2022, 11(3): 63-67.
DOI: 10.12677/ijm.2022.113008

1. 背景

著名的 Camassa-Holm (CH)方程的形式是

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + 3uu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{1}$$

方程(1)在 1981 年被 Fuchssteiner 和 Fokas [1]引入作为一种新的可积系统。后来，Camassa 和 Holm [2] [3]发现了方程式可以作为浅水波模型，并且当 $k = 0$ 时，它具有非光滑孤立波，表达式为

$$u(x,t) = ce^{-|x-ct|},$$

其中 c 是波速。进一步的，Constantin and Strauss [4]证明了上述解是轨道稳定的。

当 $k \neq 0$ 时，刘[5]等人证明了方程(1)具有非零渐近值的非光滑孤立波，表达式为

$$u(x,t) = (k+c)\mathrm{e}^{-|x-ct|} - k.$$

欧阳等人证明了该解是轨道稳定的。许多其他的作者都研究了方程(1)的很多其他性质[6]-[12]。

此外，方程(1)的其他形式都被广泛的研究，例如，Li and Olver [13]考虑了方程

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + auu_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx} \tag{2}$$

的全局适定性，其中 a 是常数。基于方程(2)，刘[14]等人推广了该方程，修正的 CH 方程的具体形式为

$$u_t - u_{xxt} + 2ku_x + au^2 u_x = 2u_x u_{xx} + uu_{xxx}. \tag{3}$$

部分学者研究了该方程的很多性质[15] [16] [17] [18]。其中当 $k = 0$ 时，Wazwaz [19]研究了方程(3)的钟型孤立波解，表达式为

$$u(x,t) = -2\operatorname{sec}h^2 \frac{1}{2}(x-ct).$$

在这篇文章中，主要关注非零渐近值的光滑孤立波解，并采用平面动力系统的分析方法，直接求出其孤立波解的精确表达式。这个方法同样适用于求解其他解，例如周期波解，扭波解，尖孤立波解等等。

2. 平面动力系统

首先，令 $u(x,t) = \varphi(\xi)$，且 $\xi = x - ct$ 代入方程(3)，得到常微分方程

$$-c\varphi' + c\varphi''' + 2k\varphi' + a\varphi^2\varphi' = 2\varphi'\varphi'' + \varphi\varphi'''. \tag{4}$$

积分方程(4)，得到

$$\varphi''(\varphi - c) = \frac{a}{3}\varphi^3 + (2k-c)\varphi - \frac{1}{2}(\varphi')^2 + g,$$

其中 g 是一个积分常数。

让 $y = \varphi'$，我们将得到下面的平面系统

$$\begin{cases} \varphi' = y \\ y' = \dfrac{1}{\varphi - c}\left(\dfrac{a}{3}\varphi^3 + (2k-c)\varphi - \dfrac{1}{2}y^2 + g\right) \end{cases}.$$

两边同时乘以 $\varphi-c$ 得到

$$\begin{cases}(\varphi-c)\varphi'=(\varphi-c)y\\(\varphi-c)y'=\left(\frac{a}{3}\varphi^3+(2k-c)\varphi-\frac{1}{2}y^2+g\right)\end{cases}.$$

做变换 $d\xi=(\varphi-c)d\tau$，我们就可以得到如下的哈密尔顿系统

$$\begin{cases}\frac{d\varphi}{d\tau}=(\varphi-c)y\\\frac{dy}{d\tau}=\frac{a}{3}\varphi^3+(2k-c)\varphi-\frac{1}{2}y^2+g\end{cases}.$$

上述系统具有首次积分

$$H(\varphi,y)=h,$$

其中

$$H(\varphi,y)=y^2(\varphi-c)-\frac{a}{6}\varphi^4-(2k-c)\varphi^2-2g\varphi.$$

3. 孤立波解的直接求法

令

$$f(\varphi)=\frac{a}{6}(\varphi-c)(\varphi-\alpha)^2(\varphi-\beta),$$

其中，α 和 β 是 $f(\varphi)=0$ 的两个根。进一步的，从首次积分中我们可以得到

$$\alpha=\frac{-ac+\Delta}{3a},$$

$$\beta=\frac{-ac-2\Delta}{3a},$$

其中 $\Delta=\sqrt{-2a^2c^2-18a(2k-c)}$，因此，首次积分可以写成

$$y^2=\frac{a}{6}(\varphi-\alpha)^2(\varphi-\beta),$$

或者

$$y=\pm\sqrt{\frac{a}{6}}\sqrt{\varphi-\beta}(\varphi-\alpha).$$

将上述 y 的表达式代入到 $\frac{d\varphi}{d\xi}=y$ 中，并且积分一次得到

$$\int_\beta^\varphi\frac{ds}{\sqrt{s-\beta}(s-\alpha)}=\sqrt{\frac{a}{6}}\int_0^\xi d\xi,$$

完成这个积分我们就得到

$$\varphi(\xi)=\alpha+(\beta-\alpha)\sec h^2\left(\frac{\eta}{2}\right),$$

其中

$$\eta = \sqrt{\frac{a(\alpha-\beta)}{6}}\xi,$$

注意到 $u(x,t)=\varphi(\xi)$，所以我们得到孤立波解为

$$u(x,t)=\alpha+(\beta-\alpha)\sec h^2\left(\frac{\eta}{2}\right).$$

这个解具有非零渐近值 α。这个解可以通过数学软件 Mathematica 验证其正确性。其次若参数取特定的值的时候，这个解与文献[19]的解是一致的，进一步验证了该解的正确性。

4. 结论

该文章所使用的动力系统的分支方法不仅适用于孤立波解，也同样适用于行波解，周期波解以及不光滑的孤立波解。分析的过程类似，需要克服的困难是选定特定的初值和积分区域，从而得到的解就不同。与齐次平衡法，待定系数法，扰动方法等比较，我们的方法可以求出具有 Hamiltonian 函数的所有的有界行波解。这是动力系统分支方法的独特之处。接下来，我们还将应用于其他更多的具有力学，物理学等背景的偏微分方程中。

基金项目

湖南省教育厅资助项目：17C1363。

参考文献

[1] Fuchssteiner, B. and Fokas, A.S. (1981) Symplectic Structures, Their Backlund Transformations and Hereditary Symmetries. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **4**, 47-66. https://doi.org/10.1016/0167-2789(81)90004-X

[2] Camassa, R. and Holm, D.D. (1993) An Integrable Shallow Water Equation with Peaked Solitons. *Physical Review Letters*, **71**, 1661-1664. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1661

[3] Camassa, R., Holm, D.D. and Hyman, J. (1994) A New Integrable Shallow Water Equation. *Advances in Applied Mechanics*, **31**, 1-33. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70254-0

[4] Constantin, A. and Strauss, W. (2000) Stability of Peakons. C*ommunications on Pure and Applied Mathematics*, **53**, 603-610. https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0312(200005)53:5<603::AID-CPA3>3.0.CO;2-L

[5] Liu, Z.R., Wang, R.Q. and Jing, Z.J. (2004) Peaked Wave Solutions of Camassa-Holm Equation. *Chaos*, *Solitons & Fractals*, **19**, 77-92. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00082-1

[6] Ouyang, Z.Y., Shan, Z. and Liu, Z.R. (2008) Orbital Stability of Peakons with Nonvanishing Boundary for CH and CH-Gamma Equations. *Physics Letters A*, **372**, 7046-7050. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2008.07.091

[7] Constantin, A. and Strauss, W. (2002) Stability of Camassa-Holm Solitons. *Journal of Nonlinear Science*, **12**, 415-422. https://doi.org/10.1007/s00332-002-0517-x

[8] Constantin, A. and Molinet, L. (2001) Orbital Stability of Solitary Waves for a Shallow Water Equation. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **157**, 75-89. https://doi.org/10.1016/S0167-2789(01)00298-6

[9] Lenells, J. (2004) Stability of Periodic Peakons. *International Mathematics Research Notices*, **10**, 485-499. https://doi.org/10.1155/S1073792804132431

[10] Yin, J.L., Tian, L.X. and Fan, X.H. (2010) Orbital Stability of Floating Periodic Peakons for the Camassa-Holm. *Nonlinear Analysis Real World Applications*, **11**, 4021-4026. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2010.03.008

[11] Yin, Z.Y. (2007) On the Cauchy Problem for the Generalized Camassa-Holm Equation. *Nonlinear Analysis*, **66**, 460-471. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.11.040

[12] Kalisch, H. (2004) Stability of Solitary Waves for a Nonlinearly Dispersive Equation. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **10**, 709-717. https://doi.org/10.3934/dcds.2004.10.709

[13] Li, Y.A. and Olver, P.J. (2000) Well-Posedness and Blow-Up Solutions for an Integrable Nonlinearly Dispersive Model Wave Equation. *Journal of Differential Equations*, **162**, 27-63. https://doi.org/10.1006/jdeq.1999.3683

[14] Liu, Z.R. and Qian, T.F. (2001) Peakons and Their Bifurcation in a Generalized Camassa-Holm Equation. *International-*

al Journal of Bifurcation and Chaos, **11**, 781-792. https://doi.org/10.1142/S0218127401002420

[15] Tian, L.X. and Song, X.Y. (2004) New Peaked Solitary Wave Solutions of the Generalized Camassa-Holm Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **21**, 621-637. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00192-9

[16] He, B., Rui, W.G. and Chen. C. (2008) Exact Travelling Wave Solutions for a Generalized Camassa-Holm Equation Using the Integral Bifurcation Method. *Applied Mathematics and Computation*, **206**, 141-149. https://doi.org/10.1016/j.amc.2008.08.043

[17] Khuri, S.A. (2005) New Ansatz for Obtaining Wave Solutions of the Generalized Camassa-Holm Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **25**, 705-710. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2004.11.083

[18] Shen, J.W. and Xu, W. (2005) Bifurcation of Smooth and Non-Smooth Travelling Wave Solutions in the Generalized Camassa-Holm Equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, **26**, 1149-1162. https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.02.021

[19] Wazwaz, A.W. (2006) Solitary Wave Solutions for Modified Forms of Degasperis-Procesi and Camassa-Holm Equations. *Physics Letters A*, **352**, 500-504. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.12.036