

# “换铰法”定义及应用步骤刍议

李伟捷, 孙静, 岳中文\*, 赵卫平, 王振波

中国矿业大学(北京)力学与土木工程学院, 北京

收稿日期: 2024年5月13日; 录用日期: 2024年5月29日; 发布日期: 2024年6月26日

## 摘要

结构动力自由度是结构动力学教学环节中的重要概念之一, 是指在任意时刻确定全部质量所在位置所需的独立几何参数数量。而“换铰法”是一种计算结构动力自由度的方法。根据换铰法现有定义, 使换铰后的体系成为几何不变体系所需增加的最少链杆数, 即为结构的动力自由度数。然而, 该定义中关于“几何不变体系”的要求在某些情况下过于“严格”, 超出结构动力学关于确定全部质量独立几何位置参数的要求。为此, 本文提出关于“换铰法”的改进定义, 并给出换铰法应用的建议步骤。本研究提出的“换铰法”及所建议的应用步骤简洁易懂, 对学生结构力学基础要求较低, 适合面向本科生的课程教学。

## 关键词

结构动力学, 自由度, 换铰法, 应用步骤

# Definition of “Rotation-Release Method” and Its Application Procedure

Weijie Li, Jing Sun, Zhongwen Yue\*, Weiping Zhao, Zhenbo Wang

School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing

Received: May 13<sup>th</sup>, 2024; accepted: May 29<sup>th</sup>, 2024; published: Jun. 26<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

The degree of dynamic freedom is an important concept in the teaching of structural dynamics, which refers to the number of independent geometric parameters ascertaining the location of all masses at any time. The “rotation-release method” is one of the methods to ascertain the degree of dynamic freedom. According to the current definition of the rotation-release method, the value equals the least number of hinged rods required to transform the system after setting joints rotation-free to a geometrically stable system. However, this requirement concerning a “geometric

\*通讯作者。

stable system” may be overly strict under some circumstances, exceeding the requirement of ascertaining the independent location of all masses in structural dynamics. Given this, this study proposed an amended definition of “rotation-release method”, in companion with suggested application procedures. The amended definition of the “rotation-release method” and the suggested application procedure for analysis are easy to understand and have low requirements on students’ previous knowledge of structural mechanics, and are suitable for undergraduate teaching.

## Keywords

Structural Dynamics, Degree of Freedom, Rotation-Release Method, Application Procedure

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在结构动力学课程中, 动力自由度是重要概念之一, 是指在任意时刻确定全部质量所在位置所需的独立几何参数(如位移、转角等)的数量[1]-[4]。通常采用“链杆法”确定体系的动力自由度。约束所有质量的运动所需要增加的最少链杆数量即为体系的动力自由度[2] [5]。

与此同时, 对于一些复杂的结构体系, 有研究者提出采用“换铰法”确定结构体系动力自由度[5]-[8]。通常将“换铰法”定义为“将质点和杆件结点(如刚结点、固端约束处)替换为铰结点后, 使体系成为几何不变体系所需增加的最少链杆数即为该体系的动力自由度。”张丹和路新水[5]以及孙旭峰[7]进一步指出, 在应用换铰法时, 定向支座应替换为铰支座, 弹簧支座应删除, 抗弯刚度无穷大的杆仅在与其它杆连接处将刚结点替换为铰结点, 刚性杆本身应视为一个整体。陈敏等[8]利用换铰法, 给出了特殊条件下的分析。

在本科教学和研究过程中, 作者发现关于“补充链杆, 使得体系成为几何不变体系”的定义容易引起误解, 关于“几何不变体系”的要求超出动力自由度关于“确定全部质量独立几何位置”的定义要求。此外, 当前换铰法的应用步骤要求学生掌握几何不变体系的判定方法。对于基础较差的学生, 学生学习结构动力学的积极性易受影响[9]。基于面向本科生的教学实践, 本文提出关于“换铰法”的改进定义, 并给出关于具体应用步骤的建议。

## 2. 换铰法

换铰法的核心在于: 在分析结构动力自由度的过程中, 针对杆件截面抗弯刚度(弹性模量  $E$  和惯性矩  $I$  的乘积  $EI$ )为有限值, 且忽略杆件轴向压缩或拉伸变形(即弹性模量  $E$  和截面面积  $A$  的乘积  $EA = \infty$ )的情况下, 将质点以及杆件结点(如刚结点、固端约束处)等位置替换为铰接约束, 进行动力自由度分析。

关于将质点及杆件结点等位置替换为铰接约束的合理性解释如下: 由于  $EI$  为有限值且未给定具体数值, 为便于分析, 可假设  $EI$  无限小, 接近于 0。此时, 尽管固端约束或刚结点处不可转动, 但在稍微远离结点处, 杆件可在受弯作用下发生转动和变形(因为  $EI$  接近于 0)。如果假设所有的受弯变形均集中到结点处, 而杆件本身保持直线, 则此时“ $EA = \infty$ ,  $EI$  为有限值, 固端约束”即转化为“ $EA = \infty$ , 铰接约束”的情况, 便于进一步开展动力自由度分析。

## 3. 现有定义存在的问题

现有定义要求, 在换为铰结点后, 应当补充链杆使得体系成为几何不变体系。作者在教学和研究过

程中发现,关于“几何不变体系”的要求在某些情况下可能过于严格。例如对于图 1(a)所示情况,将质点所在位置和杆件结点处替换为铰结点后的体系如图 1(b)所示。对于结点  $A$ ,需补充竖向链杆;针对结点  $B$ ,需补充竖向和水平链杆。此外,根据现有定义,为确保体系为几何不变体系,还需要在结点  $C$  处补充一个水平链杆,限制水平位移。然而,结点  $C$  是否补充链杆,并不影响质点  $m_1$  和  $m_2$  处位置的确定结果。

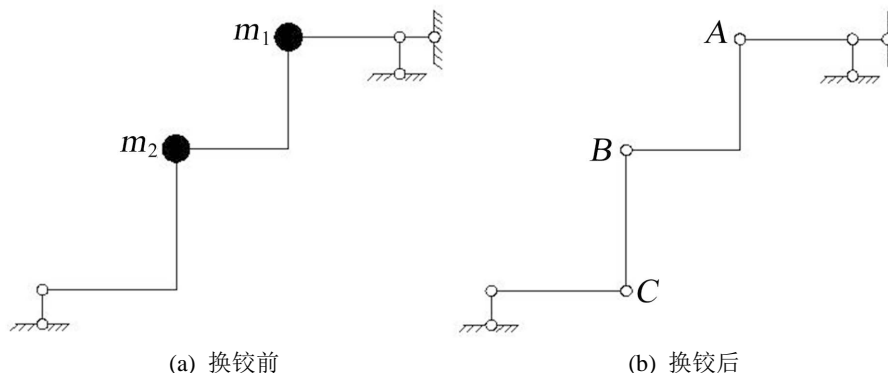


Figure 1. Analysis of rotation-release method  
图 1. 换铰法分析

因此现有关于“换铰法”的定义中,添加附加链杆,使体系成为几何不变体系的表述不完全准确,有待修正。上述结论也见诸其他研究者的报道[5] [7]。然而已有研究并未涉及定义的更改,仅进行了补充说明,如要求垂直于杆轴线方向的线位移不应计入动力自由度。当不包含质点的附属体系较多时,这些补充说明无法准确适用。因此,有待从根本上提出更加科学、明确的关于“换铰法”的定义。

#### 4. 本文提出的改进定义及具体应用步骤

针对现有定义存在的问题,本文提出关于换铰法的改进定义如下:“将质点、刚结点和固端约束处等替换为铰结点后,确定全部质量所在位置所需的独立几何参数数量即为该体系的动力自由度。”相比于原有定义,删除了关于要求体系成为几何不变体系的表述。该定义一方面可以凸显换铰法的核心思想,另一方面也可以与现有动力自由度的定义保持一致,因此比以前定义更加准确和具有科学性。

结合作者面向本科生的教学实践,建议换铰法的具体应用步骤如下:

##### 1) 判断杆件 $EI$ 是否为有限值

$EI$  为有限值,是“换铰法”使用的前提。一般地,在动力自由度的分析过程中,忽略沿杆件轴向的变形,即认为  $EA$  是无穷大。此时,如果  $EI$  也是无穷大,则意味着杆件为刚性杆。此时即使杆件中间有质点,也不应将质点处替换为铰结点。对于刚性杆的情况,仅需将刚性杆与其他杆件连接处视为铰结点。

##### 2) 换铰

在确认  $EI$  为有限值的基础上,可根据换铰法的原理,将集中质点处、杆件刚结点、固端约束处等位置的结点替换为铰结点。

##### 3) 动力自由度分析

在替换为铰结点后,在质量处施加惯性力,判断质量位置是否可以改变。如果可以改变,则说明存在该方向的动力自由度。在该步骤仅需判断质量位置,不需要判断体系是否为几何不变体系。

综上,所有分析步骤围绕质点所在位置进行,对于无质点的结点处不进行分析。这与结构动力学自由度关于确定全部质量所在位置所需的独立几何参数数量的定义一致。此外,不需要判断体系是否为几

何不变体系，分析过程简洁、清晰，便于学生应用。

## 5. 应用案例

以图 2(a)为例，进一步介绍本文建议的换铰法应用步骤。该图中， $EA = \infty$ ， $EI$  为有限值。

1) 判断杆件  $EI$  是否为有限值

图 2(a)中，杆件  $EI$  均为有限值，满足采用换铰法的前提。

2) 换铰

图 2 中，体系和地面的连接位置存在固端约束的情况，集中质量处和杆件结点重合。因此，换铰后，体系增加了三个铰结点，如图 2(b)所示。

3) 动力自由度分析

首先明确平面内质点在无约束条件下的动力自由度为 2。其次，结合图所示体系进行分析。

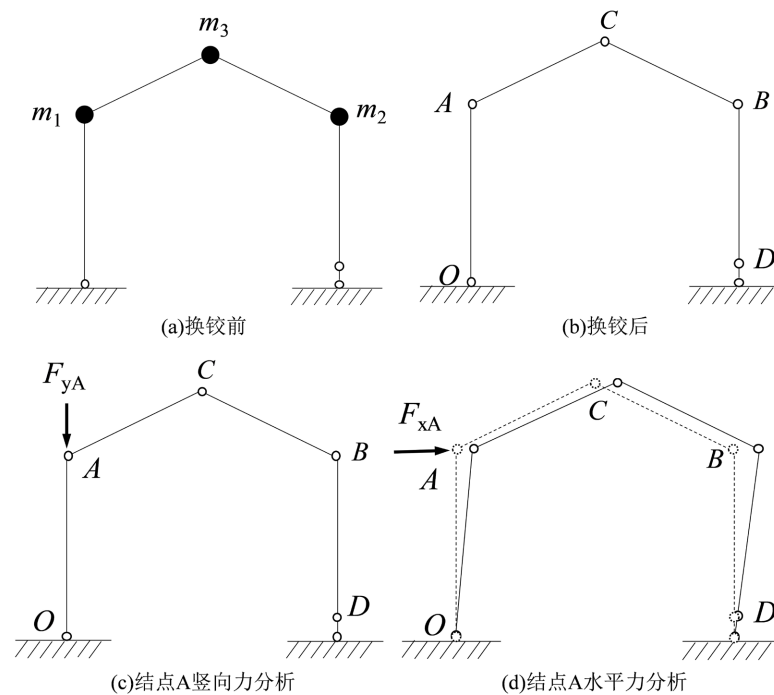


Figure 2. Application procedure of rotation-release method

图 2. 换铰法应用步骤举例

结点 A: 对于结点 A，在可能发生的竖向惯性力下，杆件 OA 承担竖向荷载。考虑杆件不存在轴向压缩或拉伸变形，因此，结点 A 不存在竖向动力自由度，如图 2(c)所示。与此同时，对于结点 A，在可能发生的水平惯性力下，杆 OA 可能发生绕 O 点的转动，如图 2(d)所示，结点 A 存在水平方向的动力自由度。

结点 B: 类似于结点 A 的分析，结点 B 也存在水平方向的动力自由度。

结点 C: 进一步分析当结点 A 和 B 的动力自由度被限制后，体系在结点 C 处是否存在独立的动力自由度。此时，不论是水平还是竖向惯性力，体系均不发生变形，也即不存在额外的独立自由度。

因此，体系所示的动力自由度为 2。

为进一步阐明本文建议步骤的准确性和科学性，作为对比，这里给出采用原有定义(即要求体系成为

几何不变体系)的分析结果。在如图 2(b)换铰之后,为使体系成为几何不变体系,除在 A 点和 B 点需要附加水平链杆约束外,还需要在 D 点附加水平链杆约束,从而自由度数量易误判为 3。而事实上, D 点有无附加水平链杆约束,并不影响 A 点和 B 点位置的确定。因此,该对比过程进一步说明了本文建议步骤的准确性和科学性。

## 6. 结论

本文研究表明,当前换铰法的定义中,关于换铰后体系成为几何不变体系的要求在某些情况下会过于严格,超出动力自由度的定义本身。本文提出了“换铰法”的改进定义,即“将质点、刚结点和固端约束处等替换为铰结点后,确定全部质量所在位置所需的独立几何参数数量即为该体系的动力自由度。”相比于已有定义,该定义更加准确和科学。本文还提出了根据改进定义的换铰法具体实施步骤,具体包括判断杆件  $EI$  是否为有限值、换铰、动力自由度分析等。本文结合实际案例进行补充说明,并与当前定义的判别方法进行了对比。本文所建议的“换铰法”及应用步骤简便易懂,适合面向本科生的结构动力学课程教学。

## 基金项目

本项目研究受到中国矿业大学(北京)本科教育教学改革与研究项目(J230601)和(J23ZD10)资助。

## 参考文献

- [1] 龙驭球,包世华,匡文起,等. 结构力学教程 II [M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [2] 岳中文. 结构动力学基础[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2021.
- [3] 刘晶波,杜修力,李宏男,等. 结构动力学[M]. 北京: 机械工业出版社, 2022.
- [4] 陈政清,樊伟,李寿英,等. 结构动力学[M]. 北京: 人民交通出版社, 2021.
- [5] 张丹,路新水. 结构动力计算中确定体系振动自由度的方法[J]. 力学与实践, 2007, 29(2): 71-73.
- [6] 孙晔青,雷金波. 换铰法确定结点线位移数的研究[J]. 南昌航空工业学院学报(自然科学版), 2005, 19(1): 26-30.
- [7] 孙旭峰. 结构力学中的换铰法应用刍议[J]. 力学与实践, 2019, 41(1): 91-94.
- [8] 陈敏,袁健,唐小弟. 确定结构体系振动自由度的实用方法[J]. 四川建筑科学研究, 2010, 36(2): 184-185.
- [9] 岳中文,朱宏. “结构动力学”课程教学探讨[J]. 学理论, 2011(36): 286-287.