International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2024, 13(2), 27-38
Published Online June 2024 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/ijm
https://doi.org/10.12677/ijm.2024.132004

奇异力学系统的矩阵分析与几何研究

陈泽彬

深圳地铁运营集团有限公司，广东 深圳

收稿日期：2024年3月5日；录用日期：2024年3月15日；发布日期：2024年6月13日

摘　要

本文研究了奇异Lagrange系统(后文统称“奇异力学系统”)的Hesse矩阵求逆、泛函极值、Jacobi场共轭点等问题，利用矩阵分析、变分学及微分几何等一系列数学方法，创造性地推导了奇异力学系统的矩阵解法，获得了该类系统测地线的某些邻域行为以及测地线的极值特性等结论。相关结果推广了矩阵分析、微分几何等有关理论在动力学系统中的应用，使矩阵分析与几何研究相融合，为进一步研究奇异力学系统提供了参考的基础。

关键词

奇异Hesse矩阵，广义逆，度量，邻域行为，泛函极值

Matrix Analysis and Geometric Study of Singular Mechanical Systems

Zebin Chen

Shenzhen Metro Group Co., Ltd., Shenzhen Guangdong

Received: Mar. 5th, 2024; accepted: Mar. 15th, 2024; published: Jun. 13th, 2024

Abstract

In this paper, we study the inverse of Hesse matrix, functional extremum and Jacobi conjugate point of singular Lagrange system, by using a series of mathematical methods such as matrix analysis, variational calculus and differential geometry, the matrix solution of singular mechanical system is deduced creatively, and some conclusions about the neighborhood behavior of geodesic and the extreme value characteristics of geodesic are obtained. The related results extend the application of the theories of matrix analysis and differential geometry in the field of dynamical system mechanics, and make the matrix analysis and geometry research merge, which provides a reference for the further study of singular mechanical systems.

文章引用：陈泽彬. 奇异力学系统的矩阵分析与几何研究[J]. 力学研究, 2024, 13(2): 27-38.
DOI: 10.12677/ijm.2024.132004

Keywords

Singular Hesse Matrix, Generalized Inverse, Metric, Neighborhood Behavior, Functional Extremum

1. 引言

在实际应用中，力学系统的 Lagrange 函数不仅高度非线性，常常还具有高度复杂性，奇异 Lagrange 函数即是其中一种。奇异 Lagrange 函数指对广义速度 u^i 的二阶偏导的 Hesse 矩阵是退化的，故导致由 Lagrange 系统过渡到 Hamilton 系统时会出现广义动量 p_i 之间的约束条件，进而成为约束 Hamilton 系统。

目前对奇异力学系统的研究，已取得大量成果，尤其针对约束 Hamilton 系统，Dirac-Bergmann 算法理论已相当成熟，并且其对称性与守恒量研究已解决量子化的许多问题。通过引入 Lagrange 乘子，Hamilton 正则方程得以修正，再进一步以共轭变量的关系反推出奇异力学系统的部分解[1]。而对于一般非量子的奇异力学系统，目前仍少有人探究，以至于系统的大部分区域长期处在未知状态。

本文基于奇异力学系统的本身进行研究，不回避任何奇异性质，旨在将其所具有的微妙特性呈现出来。在讨论奇异 Hesse 矩阵时，只考虑自治系统的 Lagrange 函数，这样能更方便去处理 Hesse 矩阵本身，而略去无关项；在研究作用量的二阶变分时，则考虑非自治系统，因为这样更具有普适性。文中凡涉及指标 i，j 的，取值皆分别是 $1,2,\cdots,n$，且推导使用 Einstein 求和约定。

2. 奇异 Hesse 矩阵与解的关系

奇异力学系统中的 Hesse 矩阵对于方程而言具有深刻的数学意义，传统的求解方式是“间接”地通过共轭变量的关系进行的，然而只能求解出部分的广义速度，是“局部”求解。这里将从另一个角度进行全局考虑，进行“整体”求解而非局部。

设 M 为正规 Lagrange 系统的位形空间流形，且 $\dim \mathrm{M} = n$，则 Lagrange 函数 $\dim \mathrm{M} = nL = L\left(q^i, u^i\right)$，是速度相空间 TM 上的实值函数，即 $\mathrm{TM} \to \mathbb{R}$，且 $\dim \mathrm{TM} = 2n$。流形 M 上有由局部坐标系 $\left(\mathrm{U}, \varphi; q^1, q^2, \cdots, q^n, u^1, u^2, \cdots, u^n\right)$ 诱导出的切坐标系，我们任取切从 TM 上的一个切坐标系 $\left(\mathrm{TU}, \varphi_*; q^1, q^2, \cdots, q^n, u^1, u^2, \cdots, u^n\right)$，其中 φ_* 为切映射。在此切坐标系上即可将 Euler-Lagrange 方程的二阶常微分形式展开为 $2n$ 个一阶常微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q^i = u^i \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial u^i} = \dfrac{\partial L}{\partial q^i} \end{cases} \tag{2.1}$$

此方程组同时在 TM 上定义了 Lagrange 向量场。现对 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \dfrac{\partial L}{\partial u^i}$ 进行展开，有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial L}{\partial u^i} = \frac{\partial L}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial L}{\partial u^i}\dot{u}^j\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial u^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\dot{u}^j \tag{2.2}$$

从而得到方程组的矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} L_{u^1q^1} & \cdots & L_{u^1q^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nq^1} & \cdots & L_{u^nq^n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_{u^1u^1} & \cdots & L_{u^1u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nu^1} & \cdots & L_{u^nu^n} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \\ \dot{u}^1 \\ \vdots \\ \dot{u}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ L_{q^1} \\ \vdots \\ L_{q^n} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

记等号左侧第一个矩阵(含方块矩阵 $L_{u^iu^j}$)为 A，将 A 移项，可得到方程的以下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}^1 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \\ \dot{u}^1 \\ \vdots \\ \dot{u}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ \begin{bmatrix} L_{u^1q^1} & \cdots & L_{u^1q^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nq^1} & \cdots & L_{u^nq^n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_{u^1u^1} & \cdots & L_{u^1u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nu^1} & \cdots & L_{u^nu^n} \end{bmatrix} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ L_{q^1} \\ \vdots \\ L_{q^n} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

其中 $L_{q^i} = \dfrac{\partial L}{\partial q^i}$，$L_{u^iq^j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial q^j}$，$L_{u^iu^j} = \dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}$，由于 $\dot{q}^i = u^i$，故方程最终化为求解 $\dot{u}^i$ 即广义加速度的问题。可见，矩阵 A 的行列式就等于矩阵块 $L_{u^iu^j}$ 的行列式，即 $\det|A| = \det\left|\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\right|$，若 $\det\left|\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\right| \neq 0$，则(2.4)式成立，那么所定义的 Lagrange 向量场在切坐标系下的表达式是存在的。记 Hesse 矩阵 $L_{u^iu^j} = \left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\right]_{n\times n}$ 为 H_{ij}，那么我们所研究的奇异力学系统即是 $\det\left|\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i \partial u^j}\right| = 0$ 的情况，也就是 A 不可逆，故(2.4)式不成立。

由(2.4)式转为微分方程形式：

$$H_{ij}\dot{u}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i} u^j \tag{2.5}$$

由(2.2)式可得：

$$\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i} u^j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial u^i} - H_{ij}\dot{u}^j \tag{2.6}$$

将(2.5)式变形后代入上式，有：

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - H_{ij}\dot{u}^j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial u^i} - H_{ij}\dot{u}^j \tag{2.7}$$

则(2.7)式证明了(2.5)式恒成立，且 Euler-Lagrange 方程无论力学系统是否奇异都是存在的，无关乎 H_{ij} 是否可逆。(2.5)式既然恒成立，那么应该是有解而非“无解”的，但局限于理论而不可常规求解。所以，Hesse 矩阵的奇异性与解的存在性无必然联系。我们可立足于奇异力学系统的本身，不必借助与约束 Hamilton 系统中的共轭关系进行间接求解，而从系统自身条件去直接求解。

3. 奇异 Hesse 矩阵的广义逆求解

考虑(2.5)式中 $\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i} u^j$ 的量纲组成，其中 $\dfrac{\partial L}{\partial q^i}$ 是所谓“广义力”，与广义动量随时间变化率的

量纲相同，具有向量性质；而 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i}$ 则是一个线性变换所表示的二阶混合矩阵，u^j 为广义速度，同样具有向量性质，那么 $\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i} u^j$ 则是向量的数乘，仍为向量。所以 $\dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial u^i} u^j$ 为向量之间运算，结果仍为一向量，记作 K。同理，(2.5)式中 $H_{ij}\dot{u}^j$ 是向量的数乘，仍为向量。由于等号两边量纲一致，故可将(2.5)式看为一个线性方程组，即 $H_{ij}\dot{u}^j = K$，H_{ij} 则是一个线性映射的表示矩阵，$\dot{u}^j$ 为一列向量。

由于奇异力学系统的 H_{ij} 不满秩，现假设矩阵的第 α 列到第 β 列的列向量(含第 α、β 列)共有 s 列，是与第 λ 列的列向量是线性相关的，即 $\beta - \alpha + 1 = s$，$1 \le \lambda < \alpha < \beta \le n$，因此从第 α 列到第 β 列共 s 列的列向量都可由第 λ 列线性表示。

$$H_{ij} = L_{u^i u^j} = \begin{bmatrix} L_{u^1u^1} & \cdots & L_{u^1u^\lambda} & \cdots & L_{u^1u^\alpha} & \cdots & L_{u^1u^\beta} & \cdots & L_{u^1u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nu^1} & \cdots & L_{u^nu^\lambda} & \cdots & L_{u^nu^\alpha} & \cdots & L_{u^nu^\beta} & \cdots & L_{u^nu^n} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

将上式写成列向量组的形式，有：

$$H_{ij} = \left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha \cdots a_\beta \cdots a_n\right) \tag{3.2}$$

其中 H_{ij} 的每个元素 $L_{u^iu^j} \in \mathbb{R}$，则可对矩阵进行初等行、列变换，记为 $f_1 \cdots f_l$，从而得到 H_{ij} 的行最简型，将这样的行最简型记为：

$$H_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \cdots & \sigma_1^\lambda & \cdots & \sigma_1^\alpha & \cdots & \sigma_1^\beta & \cdots & \sigma_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_n^1 & \cdots & \sigma_n^\lambda & \cdots & \sigma_n^\alpha & \cdots & \sigma_n^\beta & \cdots & \sigma_n^n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

根据(3.3)式可看出，$\operatorname{rank}\left(H_{ij}\right) = r > 0$，又因 $\left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha^o \cdots a_\beta^o \cdots a_n\right)$ 为列向量组的最大线性无关组($a_\alpha^o \cdots a_\beta^o$ 表示去掉这些列)，那么(3.2)式中的列向量都可以由这个最大线性无关组表示：

$$\left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha \cdots a_\beta \cdots a_n\right) = \left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha^o \cdots a_\beta^o \cdots a_n\right) \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & x_1^\alpha & \cdots & x_1^\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & x_\lambda^\alpha & \cdots & x_\lambda^\beta & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & x_n^\alpha & \cdots & x_n^\beta & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

其中 $x_1^{\alpha\cdots\beta} \cdots x_\lambda^{\alpha\cdots\beta} \cdots x_n^{\alpha\cdots\beta}$ 即为关于最大线性无关组的系数，有：

$$\left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha^o \cdots a_\beta^o \cdots a_n\right) \begin{pmatrix} x_1^\alpha & \cdots & x_1^\beta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_\lambda^\alpha & \cdots & x_\lambda^\beta \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^\alpha & \cdots & x_n^\beta \end{pmatrix} = \left(a_\alpha \cdots a_\beta\right)$$

$$\begin{gathered} a_1 x_1^\alpha + \cdots + a_\lambda x_\lambda^\alpha + \cdots + a_n x_n^\alpha = a_\alpha \\ \vdots \\ a_1 x_1^\beta + \cdots + a_\lambda x_\lambda^\beta + \cdots + a_n x_n^\beta = a_\beta \end{gathered} \tag{3.5}$$

进而可写出增广矩阵，将上述初等行、列变换 $f_1 \cdots f_l$ 操作在 $\left(a_1 \cdots a_\lambda \cdots a_\alpha \cdots a_\beta \cdots a_n\right)$ 上，得到系数 $x_1^{\alpha\cdots\beta} \cdots x_\lambda^{\alpha\cdots\beta} \cdots x_n^{\alpha\cdots\beta}$ 的线性方程组，从而解出未知系数。

由此，矩阵 H_{ij} 可进一步写成：

$$H_{ij}=\begin{bmatrix} L_{u^1u^1} & \cdots & L_{u^1u^\lambda} & \cdots & L^o_{u^1u^\alpha} & \cdots & L^o_{u^1u^\beta} & \cdots & L_{u^1u^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^nu^1} & \cdots & L_{u^nu^\lambda} & \cdots & L^o_{u^nu^\alpha} & \cdots & L^o_{u^nu^\beta} & \cdots & L_{u^nu^n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \cdots & \sigma_1^\lambda & \cdots & \sigma_1^\alpha & \cdots & \sigma_1^\beta & \cdots & \sigma_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_r^1 & \cdots & \sigma_r^\lambda & \cdots & \sigma_r^\alpha & \cdots & \sigma_r^\beta & \cdots & \sigma_r^n \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

将(3.6)式中等号右侧第一个矩阵记为 G，是一个 $n\times r$ 矩阵，此时 $r=n-s$；将等号右侧第二个矩阵记为 P，是一个 $r\times n$ 矩阵，则有 $H_{ij}=GP$，且 $\operatorname{rank}(G)=\operatorname{rank}(P)=r$。当然 H_{ij} 的满秩分解并不唯一，只要存在 r 阶可逆矩阵 T，满足 $G^*=GT$，$P^*=T^{-1}P$ 即可获得新的满秩分解关系式[2]。

这一过程说明奇异 Hesse 矩阵 H_{ij} 的等价标准型是存在的，且与普通矩阵一样，可写成分块矩阵：

$$H_{ij}=GP=B\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \end{bmatrix}D=BE_{n\times n}^{(r)}D$$

$$E_{n\times n}^{(r)}=\begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_r \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_r & 0 \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

其中 B、D 是可逆矩阵，$E_{n\times n}^{(r)}$ 为 r 阶 $n\times n$ 矩阵。

基于上述结果，我们可运用 Moore-Penrose 广义逆矩阵理论，寻找 H_{ij} 的广义逆 H_{ij}^+。已知 H_{ij} 为 r 阶 $n\times n$ 实矩阵，则一定存在 $n\times n$ 的实矩阵 H_{ij}^+ 且满足四条 Penrose 方程或 $H_{ij}^+H_{ij}H_{ij}^{\mathrm{T}}=H_{ij}^{\mathrm{T}}$ 与 $H_{ij}^+\left(H_{ij}^+\right)^{\mathrm{T}}H_{ij}^{\mathrm{T}}=H_{ij}^+$ 这两个条件。根据 $H_{ij}=GP$ 这一满秩分解，那么广义逆：

$$H_{ij}^+=P^{\mathrm{T}}\left(PP^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}} \tag{3.8}$$

所以针对 $H_{ij}\dot{u}^j=K$ 这一线性方程组，需考虑其是否有解。

由于 $H_{ij}=(a_1\cdots a_n)$，故由 H_{ij} 作为列向量组所张成的子空间为 $\operatorname{Ran}(H_{ij})=\operatorname{span}\{a_1\cdots a_n\}$，且 $\dim\left(\operatorname{Ran}(H_{ij})\right)=r$。从几何角度看，如果方程有解，则向量 K 可由向量组 $(a_1\cdots a_n)$ 来线性表示，$\dot{u}^j$ 为适配的系数，即 $K\in\operatorname{Ran}(H_{ij})$；若方程无解，则 $K\notin\operatorname{Ran}(H_{ij})$。

这里并不能预知向量 $K=\dfrac{\partial L}{\partial q^i}-\dfrac{\partial^2 L}{\partial q^j\partial u^i}u^j$ 与 $\operatorname{Ran}(H_{ij})$ 之间的关系，更不能直接断定其在 $\operatorname{Ran}(H_{ij})$ 中。现需将 K 投影到 $\operatorname{Ran}(H_{ij})$ 这一列空间上，得到向量 p。因为 $p\in\operatorname{Ran}(H_{ij})$，故 $p=y(a_1\cdots a_n)$，再按照一般情况，定义从 p 指向 K 的向量 $e=K-p$，则 $e\perp\operatorname{Ran}(H_{ij})$，有：

$$(K-p)(a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}=0$$

$$\left(K-y(a_1\cdots a_n)\right)(a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}=0$$

$$y(a_1\cdots a_n)(a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}=(a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}K \tag{3.9}$$

已知 H_{ij} 是非满秩的，故取其广义逆，有：

$$y=\left((a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}(a_1\cdots a_n)\right)^+(a_1\cdots a_n)^{\mathrm{T}}K=\left(H_{ij}^{\mathrm{T}}H_{ij}\right)^+H_{ij}^{\mathrm{T}}K=H_{ij}^+K \tag{3.10}$$

那么

$$p=y(a_1\cdots a_n)=H_{ij}H_{ij}^+K \tag{3.11}$$

这样便得到所要的投影矩阵为 $p^H=H_{ij}H_{ij}^+$，由于 $\operatorname{rank}\left(H_{ij}H_{ij}^+\right)=\operatorname{rank}\left(H_{ij}^+\right)=\operatorname{rank}(H_{ij})$，同时 $\operatorname{Ran}\left(H_{ij}H_{ij}^+\right)=\operatorname{Ran}(H_{ij})$，则印证了 $p\in\operatorname{Ran}(H_{ij})$，所以：

$$K \times p = K \times \left(H_{ij}H_{ij}^{+}K\right) = 0 \tag{3.12}$$

即表明 K 与 p 共线或平行，又 $p \in \mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)$，则 $K \in \mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)$，所以方程 $H_{ij}\dot{u}^{j} = K$ 有解！至此可得出奇异力学系统的方程(2.5)式在广义逆的描述下是有解的。

如此就得到 $\dot{u}^{j} = H_{ij}^{+}K$ 是方程的特解，则在 $\dot{u}_{0}^{\dot{u}}$ 处有 $H_{ij}\dot{u}_{0}^{\dot{u}} = K$，故

$$H_{ij}H_{ij}^{+}H_{ij}\dot{u}_{0}^{\dot{u}} = H_{ij}H_{ij}^{+}K \tag{3.13}$$

又 $H_{ij}H_{ij}^{+}H_{ij} = H_{ij}$，所以

$$K = H_{ij}H_{ij}^{+}K \tag{3.14}$$

因为 K、$H_{ij} \in \mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)$，则有：

$$H_{ij}^{+}K \in \mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right) = \mathrm{Ran}\left(H_{ij}^{\mathrm{T}}\right) \tag{3.15}$$

设 Y 是齐次方程 $H_{ij}Y = 0$ 的解，即对任意 K，有：

$$\left\langle Y, H_{ij}K \right\rangle = Y^{\mathrm{T}}H_{ij}K = \left(H_{ij}^{\mathrm{T}}Y\right)^{\mathrm{T}}K = \left\langle H_{ij}^{\mathrm{T}}Y, K \right\rangle = 0 \tag{3.16}$$

即有 $H_{ij}^{\mathrm{T}}Y = 0$，所以有 $\mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)$ 的正交补 $\mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)^{\perp} = \left\{K : H_{ij}^{\mathrm{T}}K = 0\right\}$；$\mathrm{Ran}\left(H_{ij}^{\mathrm{T}}\right)$ 的正交补 $\mathrm{Ran}\left(H_{ij}^{\mathrm{T}}\right)^{\perp} = \left\{K : H_{ij}K = 0\right\}$，从而得到 $Y \in \mathrm{Ran}\left(H_{ij}\right)^{\perp}$，即 $Y \perp H_{ij}^{+}K$，方程的通解可写成：

$$\dot{u}^{j} = H_{ij}^{+}K + Y \tag{3.17}$$

进而有 $\dot{u}^{j}$ 的范数平方 $\left\|\dot{u}^{j}\right\|^{2} = \left\|H_{ij}^{+}K\right\|^{2} + \left\|Y\right\|^{2} \geq \left\|H_{ij}^{+}K\right\|^{2}$，所以 $\dot{u}^{j} = H_{ij}^{+}K$ 为方程的最小范数解，可进一步将其展开为：

$$\dot{u}^{j} = P^{\mathrm{T}}\left(PP^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(G^{\mathrm{T}}G\right)^{-1}G^{\mathrm{T}}K \tag{3.18}$$

以上即为奇异力学系统利用奇异 Hesse 矩阵的广义逆来求解的过程，在一般性解法无法实现时，广义逆求解是精确而非近似的。

4. 奇异力学系统的邻域行为

观察流形 M 上的切丛 TM，并考虑 Lagrange 形式的 1-形式 θ_{L} 与 2-形式 ω_{L}，直接使用 Legendre 变换的拉回计算可从辛势 θ 及辛形式 ω 得到。

由 $\theta = p_{i}\mathrm{d}q^{i}$，有：

$$\theta_{L} = \left(\mathbb{F}L\right)^{*}\theta = \frac{\partial L}{\partial u^{i}}\mathrm{d}q^{i} \tag{4.1}$$

由 $\omega = \mathrm{d}p_{i} \wedge \mathrm{d}q^{i}$，有：

$$\omega_{L} = \left(\mathbb{F}L\right)^{*}\omega = \frac{\partial^{2}L}{\partial q^{j}\partial u^{i}}\mathrm{d}q^{j} \wedge \mathrm{d}q^{i} + \frac{\partial^{2}L}{\partial u^{i}\partial u^{j}}\mathrm{d}q^{i} \wedge \mathrm{d}u^{j} \tag{4.2}$$

可知 ω_{L} 是一个 $2n \times 2n$ 的反对称矩阵

$$\omega_{L} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{u^{1}q^{1}} & \cdots & L_{u^{1}q^{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^{n}q^{1}} & \cdots & L_{u^{n}q^{n}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} L_{u^{1}u^{1}} & \cdots & L_{u^{1}u^{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^{n}u^{1}} & \cdots & L_{u^{n}u^{n}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} L_{u^{1}u^{1}} & \cdots & L_{u^{1}u^{n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{u^{n}u^{1}} & \cdots & L_{u^{n}u^{n}} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

其中矩阵块 $L_{u^iq^j}=\left[\dfrac{\partial^2 L}{\partial u^i\partial q^j}\right]$ 只存在反对称部分。从矩阵形式可见，ω_L 的行列式是否为 0 同样取决于方块矩阵 $L_{u^iu^j}$ 即 Hesse 矩阵的行列式。

所以在奇异力学系统中，Lagrange 形式从 2-形式退化到 1-形式，最后仅存在 1-形式。广义速度 u^j 的外微分 $\mathrm{d}u^j$ 与广义坐标 q^i 的外微分 $\mathrm{d}q^i$ 之间的体积形式是奇异的，故无法张成 $\mathrm{d}q^i\wedge\mathrm{d}u^j$ 的形式。因此纤维导数 $\mathbb{F}L$ 是不可逆的，即在任意的邻域上，切丛 TM 与余切丛 $\mathrm{T}^*\mathrm{M}$ 之间不是微分同胚的。在此几何情况下，从约束 Hamilton 系统反解奇异力学系统并非精准。

同时，从 TM 出发，将丛映射 $\pi:\mathrm{TM}\to\mathrm{M}$ 看作是流形间的映射，从而在 TM 上引入曲线 J，与 M 上的曲线 $\gamma:(0,a]\to\mathrm{M}$ 所对应，即若 J 为 TM 上的切向量场 X 的积分曲线，则 $\gamma=\pi\circ J$ 是 M 上的测地线[3]。这里的切向量场 X 是二阶系统，$X:\mathrm{TM}\to\mathrm{T(TM)}$，切映射 $\pi_*:\mathrm{T(TM)}\to\mathrm{TM}$，由于 H_{ij} 是不满秩的，即有部分切向量场 X 是满足 $\pi_*X=i_{\mathrm{TM}}$ (TM 上的切向量场)，另一部分则不满足。然而测地线是处于一阶系统的描述，所以奇异力学系统积分曲线的所对应的测地线仍是存在的。

测地线的几何性质不能直接从存在性得知，因为奇异力学系统所在的位形空间流形 M 与之适配的度量仍未获得，故仍需借助正规 Lagrange 系统进行研究。在 M 上适配 Riemann 度量 $g=g_{ij}\left(q^i(t)\right)$，$g_{ij}$ 是一个 $n\times n$ 的对称正定矩阵，则形成 n 维 Riemann 流形(M, g)。选定 M 中处于同一坐标卡 $\mathrm{U}\subset\mathrm{M}$ 中的两个点 P_1、P_2，此时 U 与 $\mathbb{R}^n$ 中的开集微分同胚，ψ 为同胚映射，则 $P_1=\psi_*\circ P_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$P_2=\psi_*\circ P_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2&=\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2+\cdots+\mathrm{d}x_n^2\\&=\left(\frac{\partial x_1}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1+\frac{\partial x_1}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2+\cdots+\frac{\partial x_1}{\partial q^n}\mathrm{d}q^n\right)^2+\left(\frac{\partial x_2}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1+\frac{\partial x_2}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2+\cdots+\frac{\partial x_2}{\partial q^n}\mathrm{d}q^n\right)^2\\&\quad+\cdots+\left(\frac{\partial x_n}{\partial q^1}\mathrm{d}q^1+\frac{\partial x_n}{\partial q^2}\mathrm{d}q^2+\cdots+\frac{\partial x_n}{\partial q^n}\mathrm{d}q^n\right)^2\\&=g_{ij}\mathrm{d}q^i\mathrm{d}q^j\end{aligned}\tag{4.4}$$

则

$$L\left(q^i,u^i\right)=\sqrt{g_{ij}u^iu^j}\tag{4.5}$$

进一步有

$$\begin{aligned}L_{u^iu^j}&=\frac{\partial^2 L}{\partial u^i\partial u^j}=\frac{\partial L}{\partial u^i}\left(\frac{\partial L}{\partial u^j}\sqrt{g_{ij}u^iu^j}\right)=\frac{\partial L}{\partial u^i}\left(\frac{1}{2}\sqrt{g_{ij}u^j}\left(u^i\right)^{-\frac{1}{2}}+2\sqrt{g_{ij}}\right)\\&=\frac{1}{4}g_{ij}\left(\sqrt{g_{ij}u^iu^j}\right)^{-1}-\frac{1}{4}\sqrt{g_{ij}u^iu^j}\left(u^i\right)^{-2}\\&=\frac{1}{4}\frac{g_{ij}}{L}-\frac{1}{4}L\left(u^i\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{g_{ij}}{L}-\frac{L}{\left(u^i\right)^2}\right)\end{aligned}\tag{4.6}$$

在奇异力学系统下，进一步得到：

$$\frac{g_{ij}}{L}-\frac{L}{\left(u^i\right)^2}=0$$

$$L^2 = g_{ij}\left(u^i\right)^2$$

$$L = \sqrt{g_{ij}}u^i = \sqrt{g_{ij}u^i u^i} \tag{4.7}$$

即当 $i = j$ 时，判定 Lagrange 函数是奇异的，因为 $i \neq j$ 的部分已退化掉。将(4.7)式的奇异 Lagrange 函数改用 L^γ 表示，适配的度量用 g_{ij}^γ 表示，指标 i 和 j 仍然都保留，使用 δ_{ij} 进行约束，则有：

$$L^\gamma = \delta_{ij}\sqrt{g_{ij}u^i u^j}\ ,\quad L^\gamma = \delta_{ij}L\ ,\quad g_{ij}^\gamma = \delta_{ij}g_{ij} \tag{4.8}$$

将 g_{ij}^γ 展开后，有：

$$g_{ij}^\gamma = \delta_{ij}\begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & h_n^2 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

其中 h_i 为 Lame 系数，可见 g_{ij}^γ 是一个对角阵，$g_{ij}^\gamma = \operatorname{diag}\left\{h_1^2, h_2^2, \cdots, h_n^2\right\}$。所以，奇异力学系统的切空间由 L^γ 的梯度张成，只沿着变化率的最大方向延展。这里的 δ_{ij} 可看成是 Euclid 度量，即奇异力学系统的度量与正规 Lagrange 系统的度量仅相差一个 δ_{ij}。但我们并不把 $g_{ij}^\gamma = \delta_{ij}g_{ij}$ 看作是一个乘积度量，因为整个位形空间流形 M 并不改变，只是 Riemann 流形改为(M, g^γ)，g^γ 显然是一个新的 Riemann 度量，形式上却更加简单。由于 δ_{ij} 又可认为是一个线性变换，所以 g^γ 保持了切空间的夹角不变，故奇异力学系统的度量 g^γ 是关于正规 Lagrange 系统度量 g 的共形变换。

由测地线方程 $\dot{u}^k = -\Gamma_{ij}^k u^i u^j$，$k = 1, 2, \cdots, n$，联立(3.18)式与(4.8)式，再令 $j = i$，可得奇异力学系统下的 Christoffel 符号：

$$\begin{aligned} -\Gamma_{ii}^k &= H_{ii}^+\left(\frac{\partial L^\gamma}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L^\gamma}{\partial q^i \partial u^i}u^i\right) \\ &= H_{ii}^+\left(\frac{\partial\left(\sqrt{g_{ii}}u^i\right)}{\partial q^i} - \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial\left(\sqrt{g_{ii}}u^i\right)}{\partial u^i}\right)u^i\right) \\ &= H_{ii}^+\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i} + u^i\frac{\partial\sqrt{g_{ii}}}{\partial q^i} - \frac{\partial\sqrt{g_{ii}}}{\partial q^i}u^i\right) \\ &= H_{ii}^+\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i}\right) \end{aligned} \tag{4.10}$$

在没有给定的前提条件下，我们不能判断(4.10)式是否为 0，需对带负号的 Christoffel 符号自身进行展开，有：

$$-\Gamma_{ii}^k = -\frac{1}{2}g^{ki}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k}\right) = \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k} \tag{4.11}$$

因此，在 L^γ 所适配的度量下，分成两种情况，有：

1) 若 $g_{ij}^\gamma = \delta_{ij}g_{ij} \neq I_{n\times n}$ 时，即在完整基下，

当 $k \neq i$ 时，由于 $g^{ki} = 0$，所以

$$\dot{u}^k = -\Gamma_{ii}^k u^i u^i = \frac{1}{2}g^{ki}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^k}u^i u^i = H_{ii}^+\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i}\right)u^i u^i = 0 \tag{4.12}$$

也就是在完整基下，测地线 γ 在邻域 $\mathrm{U} \subset \mathrm{M}$ 上表现为一条直线段的形态，即法坐标系存在于邻域 U 中的 P 点上。

当 $k=i$ 时，有：

$$-\Gamma_{ii}^{i}=-\frac{1}{h_i^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ii}}{\partial q^i}=-\frac{\partial}{\partial q^i}\ln\sqrt{g_{ii}}=-\frac{\partial\ln h_i}{\partial q^i} \tag{4.13}$$

所以得出以下结果：

$$\dot{u}^k=\dot{u}^i=-\Gamma_{ii}^{i}u^iu^i=-\frac{\partial\ln h_i}{\partial q^i}u^iu^i=H_{ii}^{+}\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i}\right)u^iu^i\neq 0 \tag{4.14}$$

即在邻域 U 上，测地线 γ 仍然是曲线状态。

2) 若 $g_{ij}^{\gamma}=\delta_{ij}g_{ij}=I_{n\times n}$，即在非完整基下，则 Christoffel 符号转化为形式 Christoffel 符号。

当 $k\neq i$ 时，有：

$$-\Gamma_{(i)(i)}^{(k)}=-\frac{h_k}{h_i^2}\Gamma_{ii}^{k}=-\frac{h_k}{h_i^2}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h_k^2}\frac{\partial h_k^2}{\partial q^k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2h_i}{h_i^2h_k}\frac{\partial h_i}{\partial q^k}=\frac{1}{h_k}\frac{\partial\ln h_i}{\partial q^k}=\frac{\partial\ln h_i}{\partial S^k} \tag{4.15}$$

其中 S^k 为弧长参数的第 k 个方向的分量，故

$$\dot{u}^k=-\Gamma_{(i)(i)}^{(k)}u^iu^i=\frac{\partial\ln h_i}{\partial S^k}u^iu^i=H_{ii}^{+}\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i}\right)u^iu^i\neq 0 \tag{4.16}$$

即测地线 γ 在邻域 U 上呈现出曲线形态。

当 $k=i$ 时，有：

$$-\Gamma_{(i)(i)}^{(k)}=-\Gamma_{(i)(i)}^{(i)}=-\left(\frac{1}{h_k}\Gamma_{ii}^{i}-\frac{1}{h_i^2}\frac{\partial h_i}{\partial q^i}\right)=-\left(\frac{1}{h_k}\frac{\partial\ln h_i}{\partial q^i}-\frac{1}{h_k}\frac{\partial\ln h_i}{\partial q^i}\right)=0 \tag{4.17}$$

所以有：

$$\dot{u}^k=\dot{u}^i=-\Gamma_{(i)(i)}^{(i)}u^iu^i=H_{ii}^{+}\left(\sqrt{g_{ii}}\frac{\partial u^i}{\partial q^i}\right)u^iu^i=0 \tag{4.18}$$

此时已转化为 Euclid 空间，在邻域 U 上，测地线 γ 表现为一条直线段，即法坐标系存在于邻域U 中的 P 点上。

所以，奇异力学系统在邻域中的行为，从不同的坐标基上观察会有不同结果。当 $k\neq i$ 时，在完整基上观察，系统的积分曲线 J 所对应的测地线是一条直线段；而从非完整基上观察，则仍是曲线形态。当 $k=i$ 时，完整基上的测地线是曲线，而在非完整基下则是呈现出直线形态。

从奇异力学系统的积分曲线本身上看，流形 M 上的完整基空间记为 F，非完整基空间记为 Z，则二者互为正交补，即 $\langle f,z\rangle=0\big|_{f\in\mathrm{F},z\in\mathrm{Z}}$。当积分曲线 J 所对应的测地线的曲率出现在一个空间中时，则另一个空间中的曲率为零，曲率不可能同时出现在两个空间中。可见，奇异力学系统测地线的邻域行为，对基底所在的空间具有“选择性”。这是由度量 g_{ij}^{γ} 是否是单位的所决定，可单位化则出现非完整基的现象，不可单位化则出现完整基的现象。

以物理学的意义而言，系统的上述邻域行为，体现了选用不同坐标对运动进行观察，则所观察运动的情形是分段而非连续的，总体上是加速运动与匀速运动的组合。

5. 奇异力学系统的极值特性

设奇异力学系统的作用量为 $S\left(q^i(t)\right)=\int_0^a L^{\gamma}\left(t,q^i(t),u^i(t)\right)\mathrm{d}t$，由泛函取极值需推出变分 $\delta S=0$，但在极值函数或极值曲线上，泛函并不一定能取得极值[4]。对任意 $\varphi\in\mathrm{C}^1(0,a)$，$|\varepsilon|<1$，在 q_0 处有一阶变分

$$g'(t)=\delta S\left(q_0(t)+\varepsilon\varphi(t)\right)=\int_0^a L^{\gamma}\left(t,q_0(t)+\varepsilon\varphi(t),u_0(t)+\varepsilon\dot{\varphi}(t)\right)\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

以及二阶变分

$$
\begin{aligned}
g''(t) &= \delta^2 S\left(q_0(t),\varphi(t)\right) \\
&= \int_0^a \Big\{ L^{\gamma}_{q^i q^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)\varphi^2(t) + L^{\gamma}_{q^i u^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)\varphi(t)\dot{\varphi}(t) \\
&\quad + L^{\gamma}_{u^i q^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)\varphi(t)\dot{\varphi}(t) + L^{\gamma}_{u^i u^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)\dot{\varphi}^2(t)\Big\}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a \left(A_0\dot{\varphi}^2 + 2B_0\varphi\dot{\varphi} + C_0\varphi^2\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

其中 $A_0 = L^{\gamma}_{u^i u^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)$； $B_0 = L^{\gamma}_{u^i q^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)$； $C_0 = L^{\gamma}_{q^i q^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)$。

泛函取极值的必要条件是二阶变分 $\delta^2 S\left(q_0(t),\varphi(t)\right)\ge 0$，由于奇异力学系统的 H_{ij} 退化，但 $\det\left[L_{u^i u^i}\right]=0$ 仍是非负定，仍符合 Legendre-Hadamard 条件，即使是非严格的。如此(5.2)式便退化为：

$$
g''(t) = \delta^2 S\left(q_0(t),\varphi(t)\right) = \int_0^a \left(2B_0\varphi\dot{\varphi} + C_0\varphi^2\right)\mathrm{d}t \tag{5.3}
$$

那么评估数量级的对象只剩下 B_0 与 C_0 两项。假设在 τ 点考虑 φ 导数的平方积分为 1，与普通情况一样，构造函数 $v(s)=0$，当 $|s|\ge 1$， $\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{v}^2(t)\mathrm{d}s = 1$。取 $\varphi(t)=\xi\mu v\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right)$， $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，则有：

$$
\begin{gathered}
\dot{\varphi}(t) = \xi\dot{v}\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right) \\
\int_0^a \dot{\varphi}_i(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = \xi_i\xi_j\mu^2\cdot c \\
\int_0^a \varphi_i(t)\varphi_j(t)\mathrm{d}t = \xi_i\xi_j\mu^3\cdot d
\end{gathered}
\tag{5.4}
$$

其中 $c = \int_0^a \dot{v}\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right)v\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right)\mathrm{d}t = Const$， $d = \int_0^a v\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right)v\left(\frac{t-\tau}{\mu}\right)\mathrm{d}t = Const$，所以 $\ddot{g}(0)\ge 0$ 取决于 B_0 的数量级，即：

$$
L^{\gamma}_{u^i q^i}\left(t,q_0(t),u_0(t)\right)\xi_i\xi_j\mu^2\cdot c \ge 0 \tag{5.5}
$$

因此奇异力学系统作用量的极值必要条件与正规 Lagrange 系统是不一样的，从而 Jacobi 算子随之退化为：

$$
\mathcal{J}_0^{\gamma}(\varphi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(B_0\varphi\right) - \left(B_0\dot{\varphi} + C_0\varphi\right) = \varphi\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0 - C_0\varphi \tag{5.6}
$$

故 Jacobi 方程不再是关于 φ 的微分方程，而是代数方程：

$$
\mathcal{J}_0^{\gamma}(\varphi) = 0，\ \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0 - C_0\right)\varphi = 0 \tag{5.7}
$$

当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0 = C_0$ 时，$\forall\varphi\in\mathbb{R}^n$，(5.7)式恒成立，Jacobi 场处处存在，填满整个空间；当 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}B_0 \ne C_0$ 时，$\varphi = 0$，故 Jacobi 场是平凡的。

考虑非平凡的 Jacobi 场，则：

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L^{\gamma}_{u^i q^i} = L^{\gamma}_{q^i q^i}，\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial^2 L^{\gamma}}{\partial q^i\partial u^i}\right) = \frac{\partial^2 L^{\gamma}}{\partial q^i\partial q^i} \tag{5.8}
$$

然而由 Euler-Lagrange 方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{\gamma}}{\partial u^i} = \frac{\partial L^{\gamma}}{\partial q^i}$，得到：

$$
\frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L^{\gamma}}{\partial u^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i}\frac{\partial L^{\gamma}}{\partial q^i} = \frac{\partial^2 L^{\gamma}}{\partial q^i\partial q^i} \tag{5.9}
$$

所以(5.8)式可由 Euler-Lagrange 方程推导而来，即(5.8)式恒成立，证明奇异力学系统中的 Jacobi 场在解空间的每一点中都有定义。

若 φ_0 是沿 q_0 的一个 Jacobi 场，则 $\delta^2 S\left(q_0(t),\varphi(t)\right)=0$，表明奇异力学系统的泛函极值的 Jacobi 方程仍然成立，即泛函极值依然存在。一般而言，沿测地线 γ 的 Jacobi 场是由初值 $\mathcal{J}^{\gamma}(0)$ 和 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{J}^{\gamma}(0)$ 唯一确定的。由于 $\mathcal{J}_0^{\gamma}(\varphi)=0$ 这一奇异力学系统的 Jacobi 方程中关于 φ 的微分项已退化，所以 φ_0 在局部邻域上是任意阶光滑可微都是允许的。

假设 $\gamma(0)=p$，$t_0\in(0,a]$，$\gamma(t_0)=q$，且 $\mathcal{J}^{\gamma}(0)=0$，考虑 $\mathcal{J}^{\gamma}(t_0)=0$ 使得 q 为 p 的共轭点，则 $\left\langle\mathcal{J}^{\gamma}(t),\gamma'(t)\right\rangle=0$。对任意两个切向量 $v,w\in \mathrm{T}_p\mathrm{M}$，测地线 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$，且 $|t|<\varepsilon$，又有 $\mathcal{J}^{\gamma}(t)=\left(d\exp_p\right)_{tv}(tw)$，其中 $tw=\mathrm{T}_p\mathrm{M}\big|_{tv}$，所以 $\mathcal{J}^{\gamma}(t)$ 正交于 Lagrange 向量场。根据上文的邻域行为，有：

1) 在 $k\neq i$ 的情况下，若在非完整基 $\left\{e_1(t),e_2(t),\cdots,e_n(t)\right\}$ 上观察，$\left\langle e_i(t),e_j(t)\right\rangle=\delta_{ij}$，那么 Riemann 曲率算子 $\mathcal{R}=\mathcal{R}\left(\gamma'(t),\varphi(t)\right)\neq 0$，$\mathcal{J}^{\gamma}(t)=f_i(t)e_i(t)$，因此由 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{J}^{\gamma}(t)+\mathcal{R}\left(\gamma'(t),\varphi(t)\right)\gamma'(t)=0$，得到

$$\left\langle\mathcal{J}^{\gamma}(t),\gamma'(t)\right\rangle=0 \tag{5.10}$$

所以 $\mathcal{J}^{\gamma}(t)=\left(\mathrm{T}_p\mathrm{M}\right)^{\perp}$，有 $\mathcal{R}\gamma'=G\mathcal{J}$，$G$ 为流形的 Gauss 曲率，且为常数。此时对应的 Jacobi 场有以下三种情况：

$$\mathcal{J}^{\gamma}(t)\begin{cases} t,\ G=0 \\ \frac{1}{\sqrt{-G}}\sinh\left(t\sqrt{-G}\right),\ G<0 \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\sin\left(t\sqrt{G}\right),\ G>0 \end{cases} \tag{5.11}$$

当 $G\leq 0$ 时，测地线上没有共轭点，假设条件与此矛盾。但一般而言多考虑曲率非负定的情况，即 $G>0$ 时，则存在一对共轭点 $(0,0)$ 和 $\left(\frac{\pi}{\sqrt{G}},0\right)$，符合假设条件。这时 Jacobi 场沿测地线变化，共轭点 p 与 q 存在，故测地线 $\gamma(t)$ 的长度不能取得极小值。此时 Jacobi 场的线性子空间的维数为 $n-1$，且点 $v_0=t_0\gamma'(0)$ 为指数映射 $\exp_p$ 的临界点。

若在完整基 $\left\{g_1(t),g_2(t),\cdots,g_n(t)\right\}$ 上观察，$\left\langle g_i(t),g_j(t)\right\rangle\neq\delta_{ij}$，则 Riemann 曲率算子 $\mathcal{R}=\mathcal{R}\left(\gamma'(t),\varphi(t)\right)=0$，$\mathcal{J}^{\gamma}(t)=y_i(t)g_i(t)$，因此由 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathcal{J}^{\gamma}(t)=0$，从而有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{J}^{\gamma}(t)=Const \tag{5.12}$$

所以 Jacobi 场沿测地线是恒定的、单调的变化，故与 $\mathcal{J}^{\gamma}(t_0)=0$ 矛盾，即不存在 p 的共轭点 q。测地线 $\gamma(t)$ 的长度能取得极小值，且 $\left\langle\mathcal{J}^{\gamma}(t),\gamma'(t)\right\rangle\neq 0$，即 $\mathcal{J}^{\gamma}(t)$ 不正交于 Lagrange 向量场，$\mathcal{J}^{\gamma}(t)=\left(d\exp_p\right)_{v_0}(tw)\neq 0$，满足非共轭点的要求，因此点 v_0 不是指数映射 $\exp_p$ 的临界点。

2) 同理，在 $k=i$ 的情况下，非完整基的现象与(5.12)式一致，完整基的现象则与(5.10)相同。在此不需赘述。

所以，奇异力学系统的积分曲线 J 所对应的测地线，它的极值特性与其邻域行为相互对应。

6. 结论

本文运用矩阵、变分、几何等数学工具，立足奇异力学系统的本身进行研究，首次系统性地讨论了奇异力学系统的矩阵解法，及其邻域行为与极值特性，得到了如下结论：

1) 由 Euler-Lagrange 方程微分形式的推导可知，Hesse 矩阵的奇异性与解的存在性无必然联系。方程的存在无关乎 H_{ij} 是否可逆，方程的解理应存在。

2) 由奇异 Hesse 矩阵的分解以及 Moore-Penrose 广义逆矩阵理论，推导出奇异力学系统的特解与通解的形式，再次证明方程解的存在性。

3) 从几何角度出发，在奇异力学系统的情况下，纤维导数 $\mathbb{F}L$ 是不可逆的。然而奇异力学系统积分曲线的所对应的测地线仍然存在，即奇异力学系统的度量与正规 Lagrange 系统的度量仅相差一个 Euclid 度量 δ_{ij}，并且奇异力学系统的切空间由 L^{γ} 的梯度张成，只沿着变化率的最大方向延展。

4) 奇异力学系统测地线的邻域行为，对基底所在的空间具有“选择性”。当 $k \neq i$ 时，在完整基上观察，系统的积分曲线 J 所对应的测地线是一条直线段；而从非完整基上观察，则仍是曲线形态。当 $k = i$ 时，完整基上的测地线是曲线，而在非完整基下则是呈现出直线段的形态。若积分曲线 J 所对应的测地线的曲率出现在一个空间中时，则另一个空间中的曲率为零，曲率不可能同时出现在两个空间中。这是由度量 g_{ij}^{γ} 是否是单位的所决定的。

5) 奇异力学系统测地线的极值特性，与其邻域行为相互对应。当 $k \neq i$ 时，流形的 Gauss 曲率非负定，从非完整基上观察，则存在一对共轭点，测地线长度不能取得极小值；在完整基上观察，无共轭点对，测地线长度能取得极小值。同理，当 $k = i$ 时相反。

由于奇异力学系统的复杂性之高，研究范围应继续扩展。本文力求使矩阵分析与几何研究相融合，旨在为进一步研究奇异力学系统提供参考。

参考文献

[1] 李子平. 约束哈密顿系统及其对称性质[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1999.

[2] Horn, R.A. and Johnson, C.R. (2012) Matrix Analysis. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139020411

[3] 唐梓洲. 黎曼几何基础[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2011.

[4] 张恭庆. 变分学讲义[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.