

# 基于应变率敏感性吸能材料冲击过程的 猝量理论实验验证

徐亚军<sup>1,2,3</sup>, 李世伟<sup>1,2,3</sup>, 张 赛<sup>1,2,3</sup>, 庞晓亮<sup>1,2,3</sup>, 张德生<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>天地科技股份有限公司开采设计事业部, 北京

<sup>2</sup>煤炭科学研究总院开采设计研究分院, 北京

<sup>3</sup>中煤科工开采研究院有限公司, 北京

收稿日期: 2024年7月14日; 录用日期: 2024年8月21日; 发布日期: 2024年9月14日

## 摘 要

猝量理论主要研究物体在变力作用下的动力学特性, 当前主要是进行理论研究, 相关实验研究较少。论文以吸能材料的冲击过程为研究对象, 采用理论分析和实验验证方法, 研究了在物体质量不变条件下, 当外力随时间线性变化时, 吸能材料动力学特性。根据牛二定律建立了质量恒定的吸能冲击材料力变率与急动度的函数关系, 给出了吸能材料在冲击载荷作用下的急动度、速度、位移、冲击功解析公式, 在此基础上, 进行了吸能材料冲击试验, 以验证理论计算方法和公式的正确性。结果表明: 试验数据与理论结果基本一致, 验证了理论结果的正确性。该方法对于力变率为常数的冲击载荷动力学研究具有参考意义。

## 关键词

猝量理论, 冲击试验, 急动度, 冲击功, 应变敏感性

# Experimental Verification of Jerky Theory Based on Strain Rate-Sensitive Energy Absorbing Materials in Impact Process

Yajun Xu<sup>1,2,3</sup>, Shiwei Li<sup>1,2,3</sup>, Sai Zhang<sup>1,2,3</sup>, Xiaoliang Pang<sup>1,2,3</sup>, Desheng Zhang<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup>Coal Mining Technology Department, Tiandi Science and Technology Co., Ltd., Beijing

<sup>2</sup>China Coal Research Institute, Mining Design Institute, Beijing

<sup>3</sup>China Coal Technology & Engineering Group Corp. Mining Research Institute Co., Ltd., Beijing

Received: Jul. 14<sup>th</sup>, 2024; accepted: Aug. 21<sup>st</sup>, 2024; published: Sep. 14<sup>th</sup>, 2024

文章引用: 徐亚军, 李世伟, 张赛, 庞晓亮, 张德生. 基于应变率敏感性吸能材料冲击过程的猝量理论实验验证[J]. 力学研究, 2024, 13(3): 119-125. DOI: 10.12677/ijm.2024.133013

## Abstract

The jerk theory mainly studies the dynamic characteristics of objects under the action of variable force. There are many theoretical research results in this area, but few related experiments. Taking the impact process of energy absorbing materials as the research object, the dynamic characteristics of energy absorbing materials are studied by theoretical analysis and experimental verification methods when the external force changes linearly with time under the condition that the mass of the object is constant. According to Niu Er's law, the functional relationship between the force change rate and the jerk of the energy absorbing impact material with constant mass is established, and the analytical calculation formulas of the jerk, velocity, displacement and impact energy of the energy absorbing material under the impact load are given. Based on which, the impact test of the energy absorbing material is carried out to verify the correctness of the theoretical calculation method and formula. Results show that the theoretical results are in good agreement with the experimental result, which verifies the correctness of the theoretical results. This method has reference significance for the study of impact load dynamics with constant force rate.

## Keywords

Jerky Theory, Impact Test, Jerk, Impact Energy, Strain Sensitivity

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

变加速运动研究历史悠久,但进展缓慢。早在1845年,法国数学家A. Transon就提出了路程的三阶时间导数问题[1]。1892年, Lorentz给出的电子低速运动(电子速度 $v$ 远小于光速 $c$ )时阻力公式中,已经出现了速度的二阶导数。上世纪20年代,亚伯拉罕推导的亚伯拉罕-洛伦兹力(Abraham-Lorentz force)中也出现了加速度导数[2]。1928年, Melchior将加速度对时间的导数定义为急动度(jerk) [3] [4]。1978年, Steven H. Schot对急动度进行了系统性总结和回顾[5],同时基于单摆和开普勒轨道的质点运动,对其几何意义进行了研究。在此基础上,1981年中国学者黄沛天教授提出了力变率(作用力对时间的导数)概念[1],同时给出了力变率与急动率量化关系。1983年,朱明基于矢径是三次连续可微的理念,引入加加速度(急动度的另一种说法)来描述空间曲线运动[6]。1988年,叶柏年对刚体运动的急动度进行了研究[7]。1997年, Linz S. J.给出了牛顿猝变动力学方程[8]。在此基础上,1998年 Linz S. J.又对牛顿猝变动力学(jerky dynamics)方程相关性质进行了研究[9]。期间,黄沛天教授对变加速度运动相关知识进行了系统介绍[10],同时提出了牛顿猝变动力学方程新守恒量、混沌与急动度的关系等许多思考性问题[11] [12]。我们曾对硅基应变率敏感性吸能材料的吸能效果进行了试验评价[13],但没有对其动力学特性进行详细分析。

本文基于冲击材料试验得出了冲击力为时间变量一次函数的动力学特性。基于上述特点,推导出变力作用下物体加速度、速度和位移解析式。同时根据实验结果,得出了冲击力与位移拟合曲线,理论计算结果与吸能材料冲击试验数据基本一致,验证了理论结果的正确性。

## 2. 基于猝量理论的动力学研究

由牛顿第二定律可知,物体所受作用力 $F$ 与其动量 $p$ 存在下述关系[14]:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ 。由式(1)可知:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \quad (2)$$

若物体质量  $m$  不变, 有  $\frac{dm}{dt} = 0$ , 这样式(2)就变成我们常见的牛二定律形式:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (3)$$

由式(3)可知物体所受外力  $\mathbf{F}$  与其加速度  $\mathbf{a}$  呈正比关系。易知, 牛二定律是在假定物体所受外力大小恒定不变基础上得出的结论。当物体所受作用力  $\mathbf{F}$  不是大小不为的常量, 而是一个与时间有关的变量时, 若物体质量恒定, 由式(3)可知, 有:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = m \frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad (4)$$

由式(4)可知, 当物体所受作用力为变量时, 其加速度  $\mathbf{a}$  也是变量, 这时物体做变加速度(加加速度)运动。一般将加速度  $\mathbf{a}$  随时间变化率称为急动度(jerk) [15], 即  $\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}$ , 将作用力  $\mathbf{F}$  随时间变化率称为力变率[16], 即  $\mathbf{C} = \frac{d\mathbf{F}}{dt}$ 。这样, 由式(4)得:

$$\mathbf{C} = m\mathbf{j} \quad (5)$$

由式(5)就可以得到猝量(jumpulse)方程[17]:

$$J = \int_0^t m\mathbf{j}dt = m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_0 \quad (6)$$

通过上述方程可以建立猝量理论[8] [18]。该理论主要用来研究变力作用条件下的系统变加速动力学问题。如果作用力是时间函数, 即:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(t)$ , 由式(4)可知, 有:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}(t)}{m} + C_0 \quad (7)$$

式中,  $C_0$  为变作用力  $\mathbf{F}(t)$  作用时间  $t=0$  时的加速度  $\mathbf{a}_0$ 。由式(2)可知, 当作用力  $\mathbf{F}$  为时间变量的函数, 物体的加速度  $\mathbf{a}$  也是时间函数。由式(7)可知, 物体  $t$  时刻的速度为:

$$\mathbf{v}_t = \int_0^t \frac{\mathbf{F}(t)}{m} dt + C_0 t + C_1 \quad (8)$$

由式(8)可知, 在变力  $\mathbf{F}(t)$  作用下物体  $t$  时刻位移  $s(t)$  为:

$$s(t) = \int_0^t \int_0^t \frac{\mathbf{F}(t)}{m} dt + \frac{C_0}{2} t^2 + C_1 t + C_2 \quad (9)$$

由于作用力  $\mathbf{F}(t)$  与位移  $s(t)$  都是时间函数, 因而  $t$  时刻在外力  $\mathbf{F}(t)$  作用做的功为:

$$W(t) = \mathbf{F}(t)s(t) \quad (10)$$

同理,  $t+dt$  时刻物体做的功为:  $W(t+dt) = \mathbf{F}(t+dt)s(t+dt)$ 。式中,  $s(t+dt)$  为:

$$s(t+dt) = \int_0^{t+dt} \int_0^{t+dt} \frac{\mathbf{F}(t+dt)}{m} dt + \frac{C_0}{2} (t+dt)^2 + C_1 (t+dt) + C_2 \quad (12)$$

因而在时间  $[t, t + dt]$  物体的能量变化为:  $dE(t) = W(t + dt) - W(t)$ , 即:

$$dE(t) = F(t + dt)s(t + dt) - F(t)s(t) \quad (13)$$

将式(9)、(12)代入式(13)即可求得变力作用下(作用力  $F$  是时间函数)物体的能量变化, 进而求得物体受到的冲击功。

### 3. 吸能材料冲击试验

为了验证上述结果, 在煤炭科学研究总院北京矿山支护设备检测检验中心进行了吸能材料保护下的立柱冲击试验。吸能材料为应变率敏感性自适应化学材料, 密度为  $450 \text{ kg/m}^3$ , 每片规格为  $300 \text{ mm}$  (长)  $\times$   $200 \text{ mm}$  (宽)  $\times$   $30 \text{ mm}$  (厚), 在立柱顶部共设置 5 片吸能材料, 总厚度  $150 \text{ mm}$ 。

冲击试验主要测试在吸能材料保护下, 立柱受到冲击时立柱下腔压力、高度变化以及冲击作用时间。试验采用  $\Phi 230/160 \text{ mm}$  缸径立柱, 吸能材料位于立柱顶部, 系统自动记录立柱下腔压力、立柱高度变化和冲击时间, 采样频率是  $2 \text{ K/s}$ 。试验结果如图 1 所示。图 1(a)、图 1(b)分别为冲击过程中立柱下腔压力和高度变化。其中, 图 1(a)纵坐标为立柱下腔压力, 单位为  $\text{MPa}$ ; 图 1(b)纵坐标为立柱高度, 单位为  $\text{mm}$ ; 图 1(a)和图 1(b)横坐标都是时间, 单位为  $\text{s}$ 。

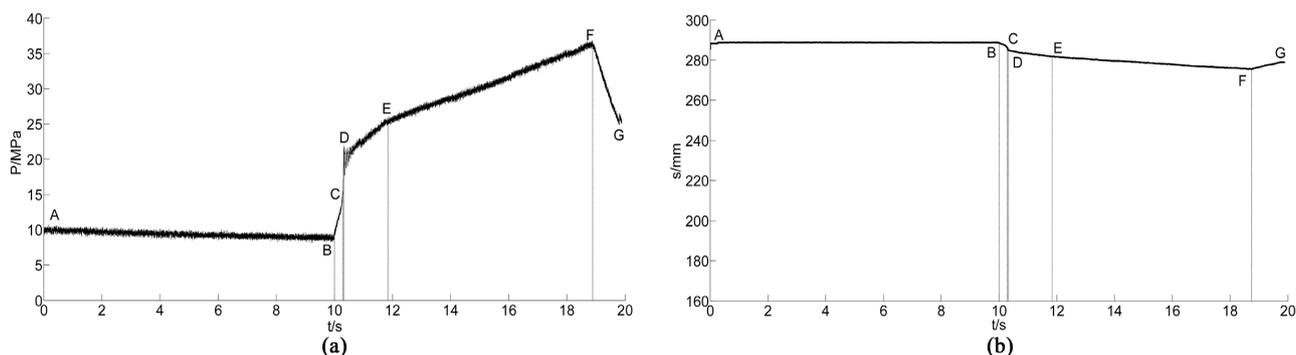


Figure 1. Impact test results of energy-absorbing materials

图 1. 吸能材料冲击试验结果

图 1 中曲线 AB 段为立柱初撑阶段, 曲线 BF 为立柱冲击过程, 曲线 FG 为冲击完成, 实验台卸压。由图可知, 立柱冲击过程分四个阶段, 曲线 BC 表示立柱受到冲击以后, 立柱内部乳化液受压, 体积压缩, 该阶段压力随时间近似线性增长; 曲线 CD 表示当立柱内部乳化液体积压缩到极限以后, 体积不能进一步减小, 立柱内腔压力开始急剧升高; 曲线 DE 表示当立柱内部压力增加到  $26 \text{ MPa}$  左右时, 吸能材料开始发挥作用, 压力先有小幅波动, 然后渐趋线性变化, 反映的是立柱内部乳化液与吸能材料耦合作用过程; 曲线 EF 表示吸能材料开始全面发挥吸能作用后, 波动消除, 压力开始稳定增长; 曲线 FG 表冲击试验结束, 实验台卸压, 立柱下腔压力开始下降。

### 4. 吸能材料速度、位移

由图 1(a)可知, 在吸能材料充分发挥作用的 EF 阶段冲击力近似线性变化, 说明冲击力是时间的线性函数。令  $F = Kt + F_0$ , 代入到式(8), 得冲击过程速度变化为:

$$v = \frac{K}{2m}t^2 + \frac{F_0 + C_0}{m}t + C_1 \quad (14)$$

相应的位移变化为:

$$s = \frac{K}{6m} t^3 + \frac{F_0 + C_0}{2m} t^2 + C_1 t + C_2 \quad (15)$$

## 5. 理论结果验证

北京矿山支护设备检测检验中心冲击试验台的特点是试验台上部为固定平台，试验台下部是活动平台，通过下部试验台向上移动模拟冲击过程。如图 2 所示，若吸能材料受到的冲击力为  $F(t)$ ，上部固定平台对吸能材料的作用力为  $N(t)$ 。由式(5)可知，对吸能材料来说，有： $N(t) - F(t) = mj$ 。式中， $m$  为冲击材料质量。为了研究方便，将立柱下腔压力乘以立柱下腔面积  $\pi d^2/4$  ( $d = 230$  mm)，将立柱下腔压力(单位 MPa)转换为易于理解的作用力(单位 KN)。

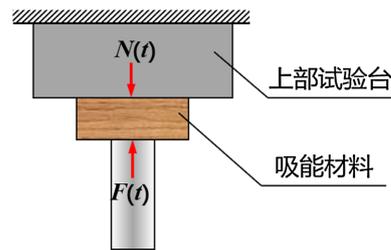


Figure 2. Force diagram of impact test  
图 2. 冲击试验受力图

吸能材料充分发挥作用时立柱下腔乳化液的作用力如图 3 所示。图中，纵坐标为冲击力(单位 kN)，横坐标为时间(单位 s)，令 QE 点作用时间  $t_0 = 0$ ，由图 1(a)可知，E 点时上部固定平台对吸能材料的作用力为  $N(t_0) = 1057$  kN，冲击过程有  $F = 1057 + 65t$ 。若仅考虑 EF 段冲击过程作用力变化，红色直线表示冲击材料受到的作用力随时间变化的拟合曲线  $F(t) = 65t$ 。

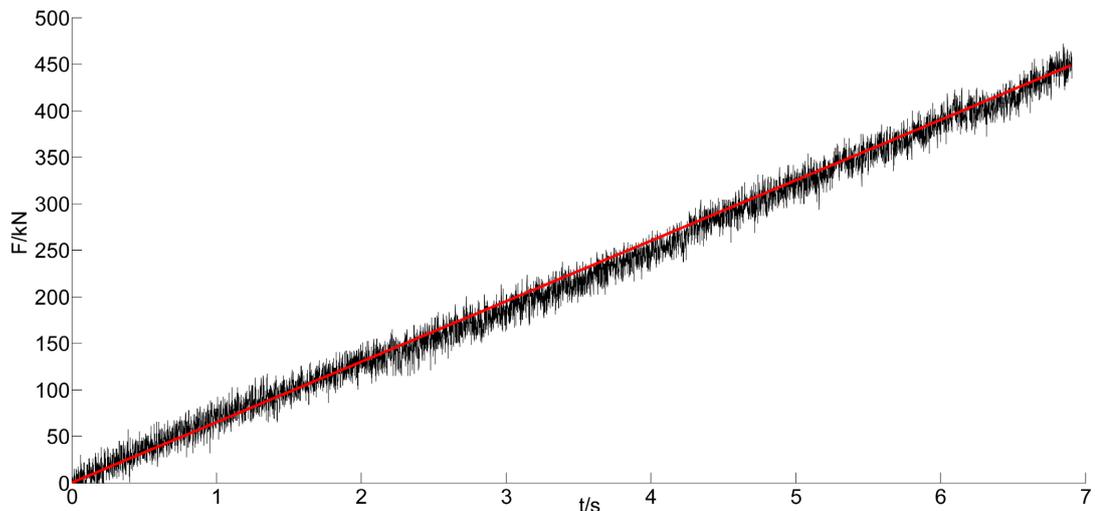
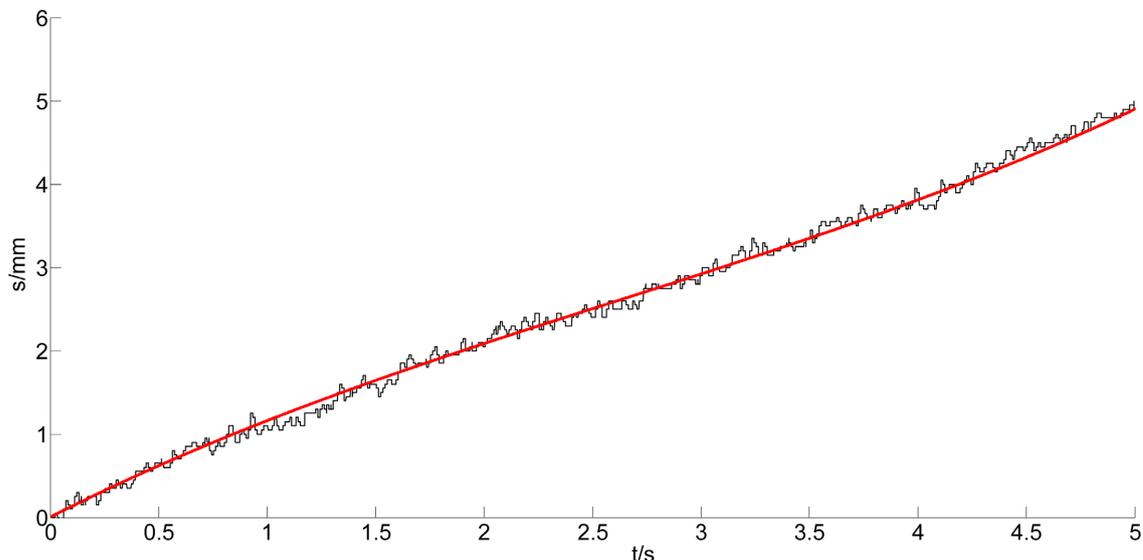


Figure 3. Relation between the force on the energy-absorbing material and time  
图 3. 吸能材料受到的作用力与时间关系

由图 3 可知， $F = Kt$ ，将其代入式(15)，得：

$$s = \frac{K}{6m} t^3 + \frac{C_0}{2m} t^2 + C_1 t \quad (16)$$

吸能材料在冲击过程中的位移变化如图 4 所示。



**Figure 4.** Relation between displacement of energy-absorbing materials and time  
**图 4.** 吸能材料位移与时间关系

图中红线曲线为拟合曲线，拟合曲线为  $s = 0.024t^3 - 0.2572t^2 + 1.5625t$ 。由图可知，同时对比式(16)， $\frac{K}{6m} = 0.024$ ， $\frac{C_0}{2m} = -0.2572$ ， $C_1 = 1.5625$ 。立柱和冲击材料质量  $m = 450 \text{ kg}$  代入计算得： $K = 64.8$ 。实验数据与理论结果差值 0.2，实验数据与理论计算结果吻合。

## 6. 结论

1) 本文进行基于吸能材料保护下的立柱冲击试验，分析在吸能材料保护下立柱冲击过程受到的作用力 - 时间与位移 - 时间曲线，并对试验曲线进行拟合，得到作用力、位移与时间的拟合方程。

2) 本文采用理论分析方法推导出当物体受到随时间线性变化的变外力作用时，物体的急动度、速度与位移变化函数，采用增量理论对冲击过程的作用力与位移曲线进行了理论分析，理论结果与拟合曲线一致性较好，说明在随时间线性变化的外力作用下，物体为变加速运动过程，可用增量理论建立的力变率和急动度的动力学方程来研究物体的速度、位移等变化。

3) 本文研究得到的变力作用下物体急动度、速度、位移函数关系式，适用于物体受到变力作用时的受力过程分析。特别是当作用力是时间的线性函数时，对于恒定质量的物体来说，其速度为时间的二次连续函数、位移为时间的三次连续函数。

后续会考虑更多的实验方法与手段，对上述问题进行深入研究。

## 基金项目

本文为国家自然科学基金资助项目(52074155)；科技创新创业资金专项(2022-2-TD-ZD017)；天地科技创新资金专项(KJ-2021-KCMS-01)研究成果。

## 参考文献

- [1] 黄沛天. 一个描写机械运动的新概念——急动度[J]. 物理, 1981, 10(7): 394-397.

- 
- [2] 阿布拉罕-洛伦兹力[Z]. <https://zh.wikipedia.org/wiki/>
- [3] Özen, K., Dündar, F. and Tosun, M. (2019) An Alternative Approach to Jerk in Motion along a Space Curve with Applications. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, **57**, 435-444. <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/104595>
- [4] Özen, K.E., Güner, M. and Tosun, M. (2020) A Note on the Acceleration and Jerk in Motion along a Space Curve. *Analele Universitatii "Ovidius" Constanta-Seria Matematica*, **28**, 151-164. <https://doi.org/10.2478/auom-2020-0011>
- [5] Schot, S.H. (1978) Jerk: The Time Rate of Change of Acceleration. *American Journal of Physics*, **46**, 1090-1094. <https://doi.org/10.1119/1.11504>
- [6] 朱明. 加速度, 挠率与点的空间曲线运动[J]. 力学与实践, 1983, 5(5): 48-50.
- [7] 叶柏年. 点的加加速度[J]. 力学与实践, 1988, 10(5): 53-55.
- [8] Linz, S.J. (1997) Nonlinear Dynamical Models and Jerky Motion. *American Journal of Physics*, **65**, 523-526. <https://doi.org/10.1119/1.18594>
- [9] Linz, S.J. (1998) Newtonian Jerky Dynamics: Some General Properties. *American Journal of Physics*, **66**, 1109-1114. <https://doi.org/10.1119/1.19052>
- [10] 黄沛天, 马善钧, 徐学翔, 等. 变加速动力学纵横[J]. 力学与实践, 2004, 26(6): 85-87.
- [11] 黄沛天, 徐学翔, 马善钧, 等. 牛顿突变动力学中的新守恒量[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2007, 31(2): 115-116.
- [12] 黄沛天, 徐学翔, 马善钧. 试论混沌和急动度之关系[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2006, 30(1): 43-46.
- [13] 徐亚军, 张赛, 庞晓亮, 杜尚宇, 张德生. 硅基应变率敏感性吸能材料吸能效果试验分析[J/OL]. 煤炭学报: 1-10. <https://doi.org/10.13225/j.cnki.jccs.2023.0713>, 2023-12-26.
- [14] 郭振华. 介绍一个新和力学量——急动度[J]. 广西物理, 1999, 20(3): 9-12.
- [15] 黄沛天. 从传统牛顿力学到当今突变动力学[J]. 大学物理, 2006, 25(1): 1-3.
- [16] 黄沛天, 黄文, 胡利云. 变加速运动理论与实践意义初探[J]. 江西师范大学学报(自然科学版): 2003, 27(1): 8-11.
- [17] 沈惠天. 吴大猷先生点评《经典力学》[J]. 物理, 2000, 29(12): 743-746.
- [18] Sprott, J.C. (1997) Some Simple Chaotic Jerk Functions. *American Journal of Physics*, **65**, 537-543. <https://doi.org/10.1119/1.18585>