

热应力下超导块体中夹杂与共线裂纹的相互作用机制研究

类先杰, 杨一帆, 赵玉峰*

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年4月15日; 录用日期: 2025年4月27日; 发布日期: 2025年6月10日

摘要

高温超导体在制备过程中不可避免地会出现大量缺陷(裂纹、夹杂和孔洞等)。缺陷的存在会降低超导材料的性能, 使得高温超导设备的使用范围受限。本文考虑共线裂纹之间的相互作用, 分析了在热应力作用下超导块体中夹杂对于共线裂纹的影响。假设超导材料的性质随宽度和温度变化, 求解了超导块体的温度和应力分布。通过控制变量, 分析了共线裂纹的长度比、裂纹之间的距离、夹杂的属性、梯度参数等因素对应力强度因子的影响。

关键词

高温超导体, 共线裂纹相互作用, 热应力, 应力强度因子

Study on Interaction Mechanism between Inclusions and Collinear Cracks in Superconducting Bulk under Thermal Stress

Xianjie Lei, Yifan Yang, Yufeng Zhao*

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: Apr. 15th, 2025; accepted: Apr. 27th, 2025; published: Jun. 10th, 2025

Abstract

During the fabrication process of high-temperature superconductors, the formation of numerous defects (e.g., cracks, inclusions, and voids) is inevitable. These defects degrade the performance of superconducting materials, thereby limiting the operational range of high-temperature superconducting

*通讯作者。

文章引用: 类先杰, 杨一帆, 赵玉峰. 热应力下超导块体中夹杂与共线裂纹的相互作用机制研究[J]. 力学研究, 2025, 14(2): 97-109. DOI: 10.12677/ijm.2025.142010

devices. This study investigates the interaction between collinear cracks and analyzes the influence of inclusions on crack behavior in superconducting bulk under thermal stress. The material properties of the superconductor are assumed to vary with both width and temperature, enabling the determination of temperature and stress distributions within the bulk. Through controlled parametric studies, the effects of crack length ratio, inter-crack spacing, inclusion properties, and gradient parameters on the stress intensity factor are systematically examined.

Keywords

High-Temperature Superconductors, Interaction of Collinear Cracks, Thermal Stress, Stress Intensity Factor

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

高温超导体因其脆性特性，在实际工程应用中面临许多的力学性能挑战。为确保其在复杂工况下的可靠性，研究人员普遍采用实验测试与理论建模相结合的研究方法来测定其力学性能。在实验研究方面，Ikuta 等[1][2]开展了开创性工作，他们通过电容式膨胀计精确测量了 $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ 单晶超导体的磁致伸缩行为，并基于实验数据建立了钉扎效应诱导的磁致伸缩理论模型，该研究为理解超导材料的力学 - 电磁耦合特性提供了重要依据。在理论研究方面，众多学者通过建立各种本构模型，系统探究了超导材料的力学响应机制。Johansen 等[3]-[6]系统研究了矩形板状超导体中的磁致伸缩问题，通过平面应变方法获得了三维问题的精确解析解。研究给出了基于指数模型和 Bean 模型的计算结果，重点分析了磁场下降过程中产生的拉应力变化特征。进一步地拓展了长圆柱超导体在平行磁场中的力学行为，揭示了由磁通钉扎效应引起的应力 - 应变不可逆特性，并定量计算了两种典型磁化过程中的磁致应力分布。Yong 等[7]-[9]采用平面应变方法，求解了 Kim 模型下无限长超导平板内的应力场分布，并与经典 Bean 模型的结果进行了对比分析，系统研究了磁通钉扎效应导致的弹性力学行为，研究人员将分析对象扩展至长椭圆柱超导体，揭示了应力分布与外加磁场强度及椭圆柱几何参数之间的内在关联性。Yang 等[10]系统研究了场冷和零场冷两种磁化方式下，粘性磁通流动速度对长圆柱超导体内应力分布的影响规律。研究表明，随着流动速度增大，环向应力和径向应力均显著增加，且在磁化区域呈现减小趋势，在场冷条件下环向应力最大值等于径向应力，而在零场冷条件下则大于或等于径向应力。Takahashi 等[11]针对 REBaCuO 超导环在场冷条件下的力学行为，采用不锈钢环进行结构增强，发现由于两者热膨胀系数的差异导致超导环表面应力分布不均，并在边缘区域产生明显的拉应力集中现象。杨小斌等[12]-[14]通过建立多物理场耦合模型，深入分析了脉冲磁场作用下超导圆柱体中电磁力、热应力及俘获场的相互作用机制，定量评估了热应力和电磁力对总应力的作用比例。Wu 等[15]重点研究了大块高温超导体在脉冲场磁化过程中的力学响应特性，基于热传导方程和 H 方法获得了温度场与磁场的时空演化规律，证实温度变化对块体的径向和环向应力分布均具有重要影响。

由于加工条件和环境存在限制，致使超导材料在生产和运输时会在其内部和表面产生夹杂、裂纹等缺陷。超导体内的缺陷会严重影响超导体的力学性能。超导体无论是在磁化冷却还是在工作过程中都会受到热应力和电磁力的作用，这些力作用在内部缺陷上导致应力集中，使超导结构失效。Zhou 等[16]系统研究了含中心裂纹的长矩形超导板在电磁载荷作用下的断裂特性，建立了定量评估电磁力对断裂行为

影响的理论模型,为超导体失效分析提供了有效工具。Xue 等[17]在此基础上深入研究了圆柱超导体中裂纹附近的电流分布特性,发现裂纹尖端区域的奇异性行为与传统应力奇异性存在显著差异,并观察到裂纹尖端存在明显的磁通钉扎区域。Gao 等[18]创新性地电磁屏蔽与反屏蔽效应引入超导体断裂分析,首次揭示了电磁力对超导板中平行裂纹应力强度因子的影响机制。Seidov 等[19]建立了含椭球形超导夹杂的各向异性导体电导率理论模型,推导出了电导率的解析表达式,为研究各向异性超导体电导率的温度依赖性提供了理论基础。Zhang 等[20]基于 Ginzburg-Landau 理论,采用最优控制方法分析了涡旋钉扎与临界电流的关系,研究表明夹杂物密度的增加会增强磁通钉扎效应并提高临界电流,但过量夹杂反而会损害材料的超导性能。Zhao 等[21]基于 Bean 模型系统研究了夹杂物特性、弹性模量及体积分数等参数对超导体有效磁致伸缩行为的影响规律。

本文对含有共线裂纹和夹杂的超导块体进行了数值求解,考虑共线裂纹之间的相互作用,分析了在热应力作用下超导块体中夹杂对于共线裂纹的影响。假设超导材料的性质随宽度和温度变化,求解了超导块体的温度和应力分布。通过控制变量,分析了共线裂纹的长度比、裂纹之间的距离、夹杂的属性、梯度参数等因素对应力强度因子的影响。

2. 理论模型建立

2.1. 理论方程

本对于非均匀超导体中的热应力问题,可以参考 Gao 等[22]提出的梯度有限元方法。对于热 - 力耦合问题可以将控制方程写成:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (1)$$

$$q_{i,i} + \rho c \dot{\theta} + \gamma T_0 \dot{\epsilon}_{ii} = R \quad (2)$$

式中 $\theta = T - T_0$, T_0 为参考温度, $\gamma = \alpha(3\lambda + 2\mu)$ 。

由于应力分布与温度分布互相依赖,必须同时得到热学和力学解,需要进行完全耦合的热 - 力分析。可以把位移和温度离散为:

$$u_i^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = U_{im}(t) N_m(x_1, x_2, x_3) \quad (3)$$

$$\theta^{(e)}(x_1, x_2, x_3, t) = \theta_{im}(t) N_m(x_1, x_2, x_3), \quad m = 1, 2, \dots, r \quad (4)$$

式中 $U_{im}(t)$ 为各节点位移分量, $\theta_{im}(t)$ 为各节点温度变化, 形状函数 $N_m(x_1, x_2, x_3)$ 是空间变量的函数。

将式(3)和(4)带入方程(1), 对 $N_m(x_1, x_2, x_3)$ 应用加权残差积分, 则伽辽金近似为:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j} + X_i - \rho \ddot{u}_i) N_l dV = 0, \quad l = 1, 2, \dots, r \quad (5)$$

将弱形式应用到第一项可以得出:

$$\int_{V(e)} (\sigma_{ij,j}) N_l dV = \int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j N_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV \quad (6)$$

式中 n_j 是单位外法向量到边界的分量。将式(6)带入式(5)得:

$$\int_{A(e)} \sigma_{ij} n_j N_l dA - \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \sigma_{ij} dV + \int_{V(e)} X_i N_l dV - \int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i N_l dV = 0 \quad (7)$$

根据柯西公式, 边界上的应力张量和牵引力分量的关系可以表示为:

$$t_i^n = \sigma_{ij} n_j \quad (8)$$

根据胡克定律, 由位移分量、应变张量和温度变化表示的应力张量为:

$$\sigma_{ij} = G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} - \gamma \theta \delta_{ij} \quad (9)$$

将式(8)和(9)带入式(7)得:

$$\begin{aligned} & \int_{V(e)} \rho \ddot{u}_i N_l dV + \int_{V(e)} \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \left[G(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k} \delta_{ij} \right] dV - \int_{V(e)} \gamma \theta \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \\ & = \int_{V(e)} X_i N_l dV + \int_{A(e)} t_i^n N_l dA \end{aligned} \quad (10)$$

另一方面, 考虑具有 r 个节点的基单元, 该单元中的位移分量和温度变化可以通过式(3)和(4)近似表示。可以得到运动方程的有限元近似:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V(e)} \rho N_l N_m dV \right) \ddot{U}_{mi} + \left(\int_{V(e)} G \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dV \right) U_{mi} + \left(\int_{V(e)} G \frac{\partial N_l}{\partial x_j} \frac{\partial N_m}{\partial x_i} dV \right) U_{mj} \\ & + \left(\int_{V(e)} \lambda \frac{\partial N_l}{\partial x_i} \frac{\partial N_m}{\partial x_j} dV \right) U_{mj} - \left(\int_{V(e)} \gamma \frac{\partial N_l}{\partial x_i} N_m dV \right) \theta_m = \int_{V(e)} X_i N_l dV + \int_{A(e)} t_i^n N_l dA \\ & l, m = 1, 2, \dots, r; \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (11)$$

由式(2)给出的能量方程的伽辽金近似和热通量梯度的弱形式得到:

$$\begin{aligned} & \int_{V(e)} \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} N_l dV - \int_{V(e)} q_i \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV + \int_{V(e)} T_0 \gamma \dot{u}_{i,i} N_l dV = \int_{V(e)} R N_l dV - \int_{A(e)} (q_i n_i) N_l dA \\ & l = 1, 2, \dots, r \end{aligned} \quad (12)$$

式中 $A(e)$ 为基单元的边界面。

将位移分量 u_i 和温度变化量 θ 代入基单元的近似值, 由式(3)和(4)可以给出近似的耦合能量方程:

$$\begin{aligned} & \left(\int_{V(e)} k \frac{\partial N_m}{\partial x_j} \frac{\partial N_l}{\partial x_i} dV \right) \theta_m + \left(\int_{V(e)} T \gamma \frac{\partial N_m}{\partial x_i} N_l dV \right) \dot{U}_{mi} + \left(\int_{V(e)} \rho c N_m N_l dV \right) \dot{\theta}_m \\ & = \int_{V(e)} R N_l dV - \int_{A(e)} (q_i n_i) N_l dA \end{aligned} \quad (13)$$

热边界条件由下列任一方程满足:

$$\theta = \theta_s \quad \text{on } A \quad (14)$$

$$\theta_{,n} + a\theta = b \quad \text{on } A \quad (15)$$

式中 $\theta_{,n}$ 为温度沿表面边界的法向变化梯度, a 和 b 为边界上温度的常数或给定函数。

由于非均匀高温超导体的主要特征是其空间和温度变化。通过采用的方法, 首先将材料属性分配到每个节点, 再使用高斯求积计算与每个节点相对应的单元矩阵和向量。梯度有限元采用与空间坐标相同的等参形状函数, 用节点值插值单元材料属性, 可以得到:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) U_i \quad (16)$$

式中 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 为位移分量矩阵, $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$ 为插值或形状函数的矩阵, U_i 为单元各节点的节点位移值。

通过求解位移导数得到应变分量：

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^m \mathbf{B}_i(x) U_i \quad (17)$$

式中 $\mathbf{B}_i(x)$ 表示形状函数导数的应变位移矩阵。

由此，得到应力和应变的关系，表示为：

$$\sigma(x) = \mathbf{D}(x) \varepsilon(x) \quad (18)$$

式中 $\mathbf{D}(x)$ 为本构矩阵，在非均匀超导体中 $\mathbf{D}(x)$ 的分量是描述实际材料性能梯度的显式函数。

利用虚功原理，通过下式得到单元刚度矩阵：

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T(x) \mathbf{D}(x) \mathbf{B}(x) dV \quad (19)$$

式中 V_e 为单元(e)的域。上式积分的值可通过高斯积分法求得，并在每个高斯积分点处赋予导热系数、热膨胀系数和杨氏模量的值。

2.2. 含夹杂和共线裂纹的超导块体模型

如图 1 所示，将一个宽为 $2W$ ($-W < x < W$) 的无限长块状超导体(沿 y 轴和 z 轴方向无限延伸)，放置在液氮中冷却。超导体中存在着两个共线裂纹和一个圆形夹杂。两个裂纹的长度分别为 a_1 和 a_2 ，圆形夹杂的直径为 $2r$ ，两个共线裂纹之间的距离为 d 。假设超导块体是非均匀的，考虑夹杂物和基体的等温膨胀，假设夹杂物与基体的泊松比相同，可以把此模型的问题视为平面应变问题。夹杂物的杨氏模量为 E_1 ，超导基体杨氏模量 $E(x)$ 随 x 坐标变化，可以描述为：

$$E(x) = E_0 e^{\beta|x|} \quad (20)$$

式中 E_0 为初始杨氏模量， β 为梯度参数。

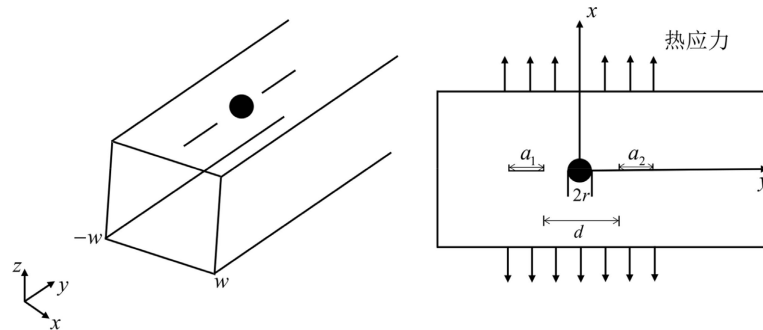


Figure 1. Superconducting bulk with collinear cracks and inclusions

图 1. 含共线裂纹和夹杂的超导块体

2.3. 数值结果与讨论

数值计算使用的超导块体物性参数，初始的裂纹长度为 $a_1 = a_2 = 2 \text{ mm}$ ，裂纹之间的距离 $d = 2 \text{ mm}$ ，夹杂物半径 $r = 0.5 \text{ mm}$ ，超导块体宽 $W = 50 \text{ mm}$ 。考虑超导块材在液氮中自由膨胀，初始条件和边界条件如下：

$$T = T_0, \quad -W < x < W \quad (21)$$

$$T = T_1, \quad x = W, \quad x = -W \quad (22)$$

由于模型的对称性,只考虑 I 型应力强度因子 K_I 。将数值计算得到的应力强度因子进行无量纲处理,所有应力强度因子归一化为 K_I/K_0 , 其中:

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}, \quad \sigma_0 = \frac{\theta \alpha E}{1 - \nu} \quad (23)$$

2.3.1. 超导块体中温度与应力分布

图 2 展示了超导块体在冷却过程中,从中心到边缘沿 x 方向每隔 10 mm 选取点位的温度随时间的变化。由于超导体与液氮之间的热交换,温度随着时间快速下降。从图中可以观察到,在 $t = 0 \sim 100$ s,靠近边缘部分的温度急速下降,而中心附近的温度下降缓慢。在 $t = 100 \sim 500$ s,边缘部分的温度下降速度减缓,而靠近中心部分的温度开始快速下降。这种现象是由于超导体的导热系数会随着温度的下降而降低导致的。在 $t = 500$ s,整体的温度下降速度放缓,直到 $t = 750$ s,超导体的温度下降到液氮温度。

图 3 为不同时间点,超导块体宽度方向上的温度分布。从图中可以看到,在 $t = 10 \sim 360$ s,超导块体边缘和中心的温度差距较大, $t = 500$ s 时,超导体内部的温度差距变小。在 $t = 750$ s,超导体内部各处温度相等。

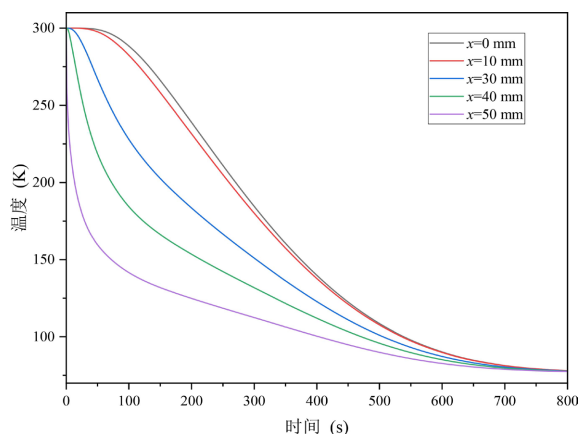


Figure 2. The variation of temperature with time

图 2. 温度随时间的变化

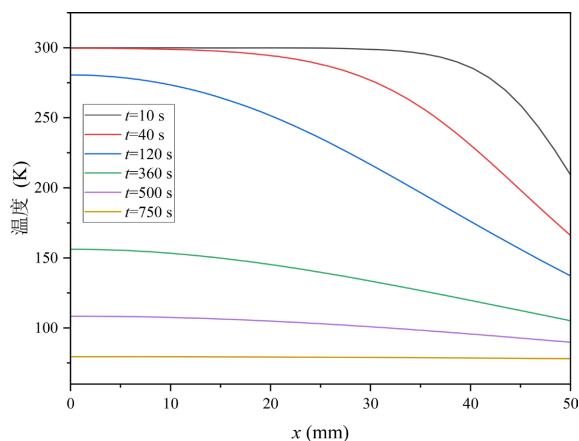


Figure 3. Temperature variation from center to edge

图 3. 温度随中心到边缘距离的变化

图 4 为超导块体内温度分布随时间的演变图。对比这六个时间点的温度分布可以得到,在前 100 s 内边缘的温度变化比较剧烈,而内部的温度波动比较小。从图 4(f)中可以观察到超导体整体温度已经接近液氮温度。

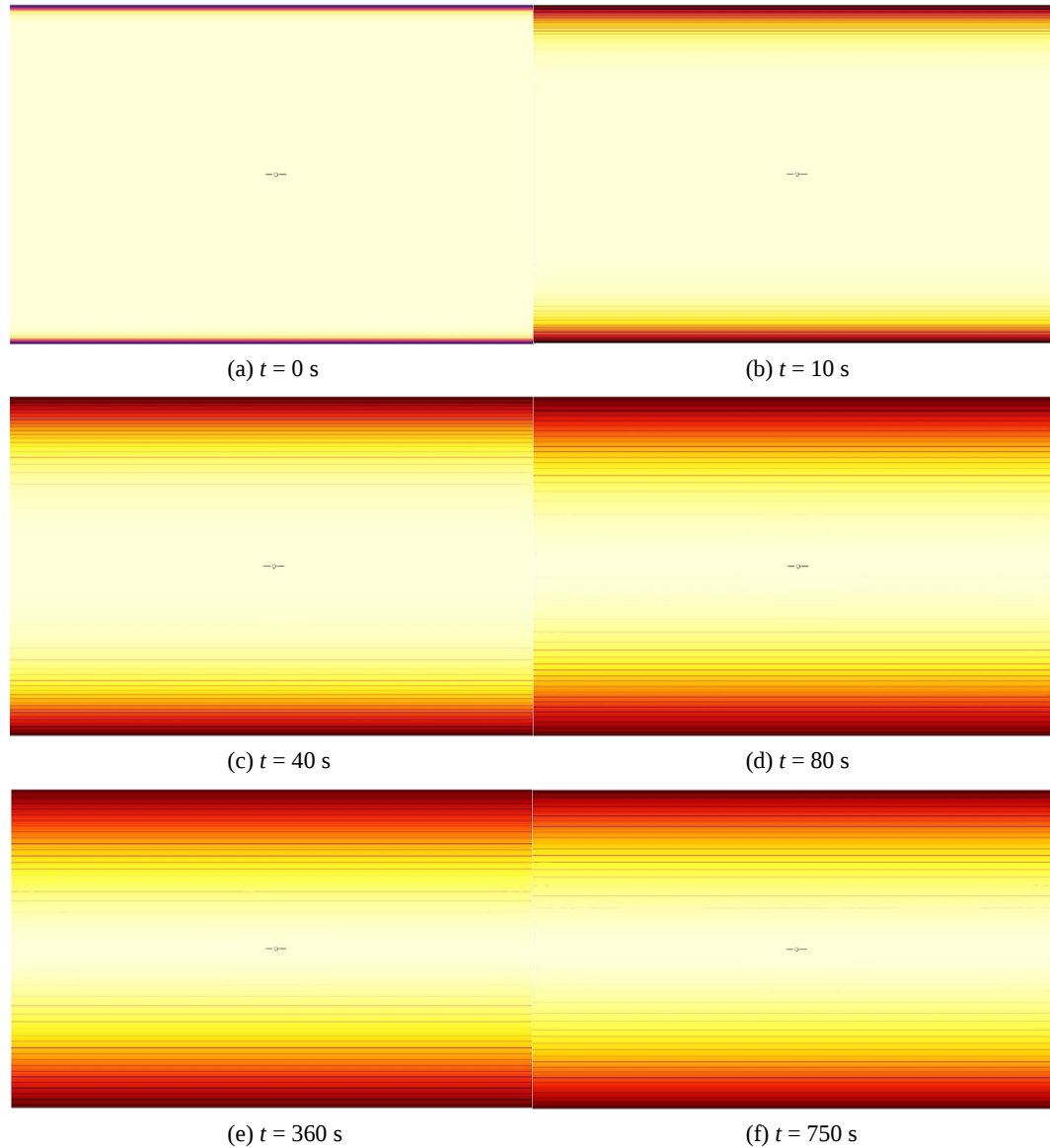


Figure 4. The temporal evolution of temperature within the superconductor

图 4. 超导体内温度随时间的演变

图 5 展示了超导块体在选定时刻($t = 10 \text{ s}$ 、 90 s 、 180 s 、 280 s 和 360 s)沿宽度方向的热应力分布。结果表明,初始阶段边缘区域呈现拉应力,而中心区域则以压应力为主。随着时间推移,边缘应力逐渐减小并最终转变为压应力,而中心区域的压应力则先增大至峰值,随后减小并最终转为拉应力。值得注意的是,边缘应力在 $t = 10 \text{ s}$ 至 180 s 期间变化最为显著,这归因于超导材料热导率和热膨胀系数随温度变化的特性。图 6 展示了热应力分布的时序演变,与图 3 中的时间点相对应。这些演变规律更清晰地呈现了应力分布的细节特征,与图 5 的曲线趋势基本一致。

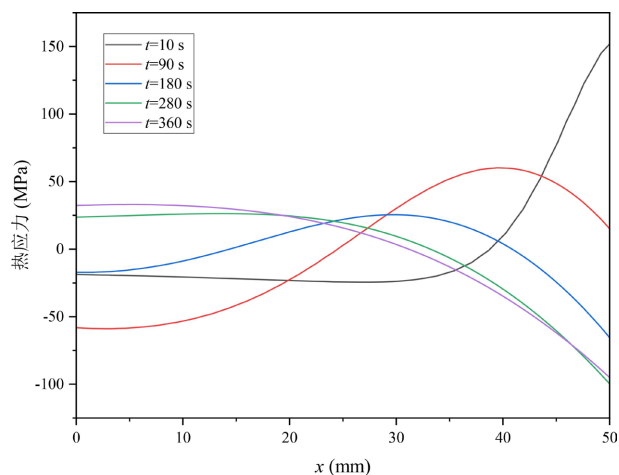


Figure 5. The distribution of thermal stress along the width
图 5. 热应力沿宽度的分布

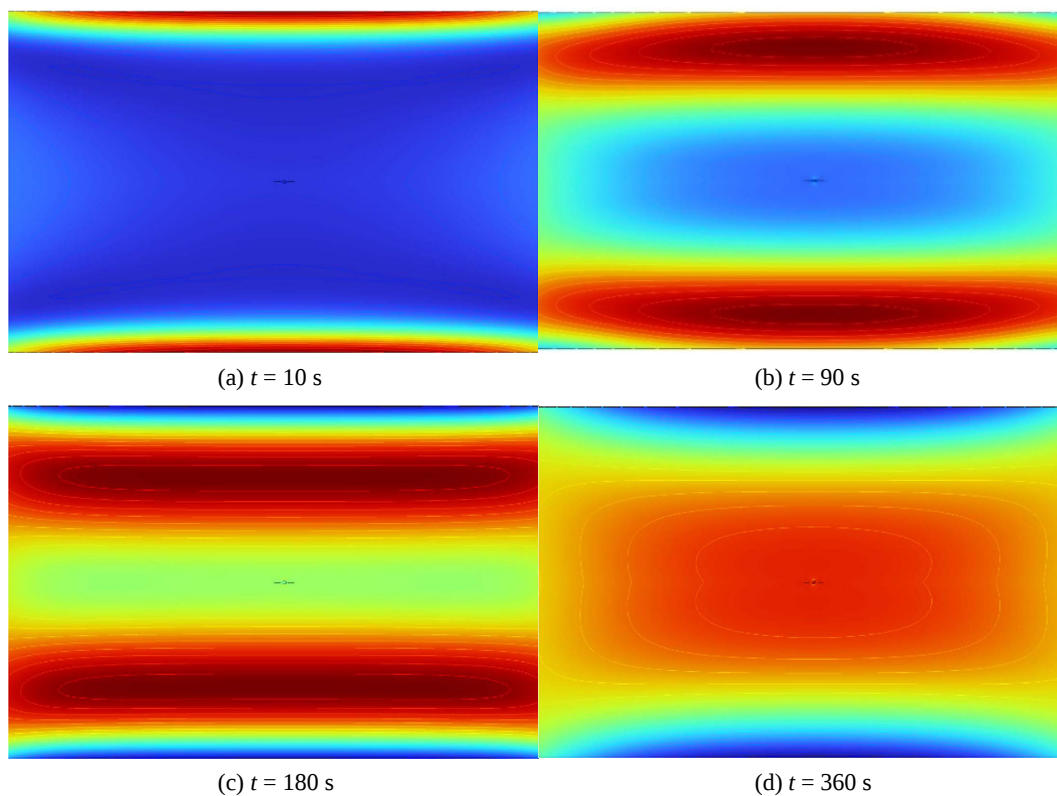


Figure 6. Thermal stress evolution over time
图 6. 热应力随时间的演变

2.3.2. 共线裂纹的相互作用

假设夹杂与基体的性质相同, 研究在热应力的作用下, 共线裂纹之间的相互作用。图 7 显示了当共线裂纹的长度相等时, 应力强度因子 K_I/K_0 随共线裂纹之间的距离的变化规律。图 7(a)展示了三种不同梯度参数下的变化。当梯度参数 $\beta > 0$ 时, 表示杨氏模量沿宽度方向增大; $\beta = 0$ 表示杨氏模量均匀变化; $\beta < 0$ 则表示杨氏模量沿宽度方向减小。可以看出, 在整体上 K_I/K_0 随着共线裂纹之间的距离增大而减

小。在 $d/W \leq 0.02$ 时, 曲线斜率较大且随间距增加快速减小, 表明裂纹间相互作用强烈。当 $d/W \geq 0.02$ 时, K_I/K_0 随着间距的增大而缓慢减小, 最终趋于平稳。随着梯度参数的增大, K_I/K_0 变化的趋势虽不发生改变, 但会系统性提高各节点的应力强度因子值。图 7(b) 通过对比共线裂纹左右尖端与单裂纹条件发现可以得到, 小间距时右尖端应力强度因子显著高于其他情况。随间距增大, 右尖端值快速下降至与左尖端相等, 并且裂纹左右尖端的 K_I/K_0 最终会趋于单个裂纹的值。综合图 7(a) 和图 7(b) 的结果可以得出结论: 共线裂纹的临近效应会显著提升裂纹尖端的应力强度因子, 促进了裂纹的扩展。共线裂纹的间距越小, 相互影响越强烈, 这种影响随着裂纹间距离的增大而减小直至消失, 而且材料梯度参数对应应力强度因子具有放大效应。

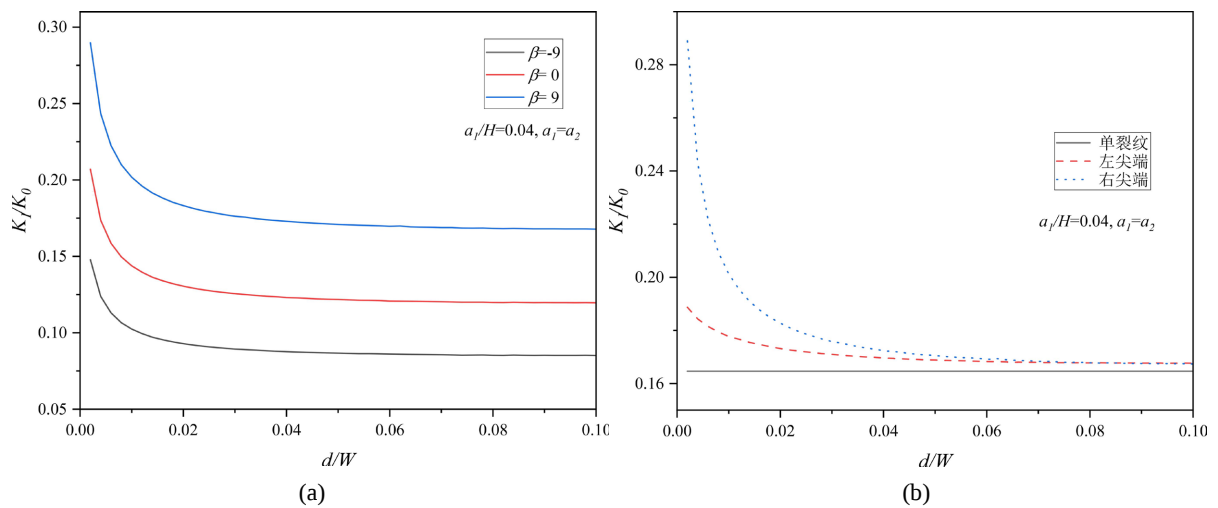


Figure 7. Variation of K_I/K_0 with the distance between collinear cracks: (a) Effect of gradient parameter β ; (b) Comparison between left/right tips and single crack

图 7. K_I/K_0 随共线裂纹之间的距离变化: (a) 梯度参数 β 的影响; (b) 左右尖端和单个裂纹的对比

图 8 显示了固定间距下右裂纹与左裂纹长度的比值 a_2/a_1 的变化对裂纹尖端的应力强度因子 K_I/K_0 的影响。图 8(a)~(c) 分别为左裂纹和右裂纹、不同梯度参数和左裂纹与单个裂纹之间的对比。观察图 8(a) 可以得到, 左右裂纹两尖端的 K_I/K_0 都随着 a_2/a_1 的增大而增大。在 a_2/a_1 较小时, 右裂纹两尖端应力强度因子相近, 但随着长度比增大, 其左尖端值逐渐超过右尖端。随着 a_2/a_1 的增大, 右裂纹左尖端的 K_I/K_0 要逐渐大于右尖端, 最终回归相等。当 $a_2/a_1 = 1$, 即两裂纹的长度相等, 左右裂纹相对应尖端的值相等。从图 8(b) 可以看出不同梯度参数对 K_I/K_0 的影响, 梯度参数变化会显著影响应力强度因子的绝对值, 但不改变总体趋势。通过对比图 8(c) 的三条曲线可以得到, 在长度的比值较小时, 小长度比时, 双裂纹行为趋近于单裂纹, 但随着长度比增大, 右裂纹对左裂纹的干扰效应逐渐凸显。由此可知: 当两共线裂纹的距离一定时, 共线裂纹间的相互作用强度与裂纹长度比呈正相关关系。

2.3.3. 夹杂物对共线裂纹的影响

通过考虑夹杂物与基体的性质不同, 研究了不同种类的夹杂物对共线裂纹的影响。图 9 为夹杂物的杨氏模量 E_1/E_0 对裂纹尖端的应力强度因子 K_I/K_0 的影响。对于夹杂的杨氏模量 E_1/E_0 : 当 $E_1/E_0 > 1$ 时, 夹杂为刚性夹杂; 当 $E_1/E_0 < 1$ 时为弹性夹杂; $E_1/E_0 = 1$ 可视为无夹杂的存在。观察图 9(a) 可以得到, 在 $E_1/E_0 < 1$ 时, 应力强度因子随模量比减小而显著增大; 在 $E_1/E_0 > 1$ 时, 应力强度因子随模量比增大呈缓慢递减趋势, 且曲线斜率逐渐降低。对比梯度参数, 梯度参数增大将全面提升各模量比下的应力强度

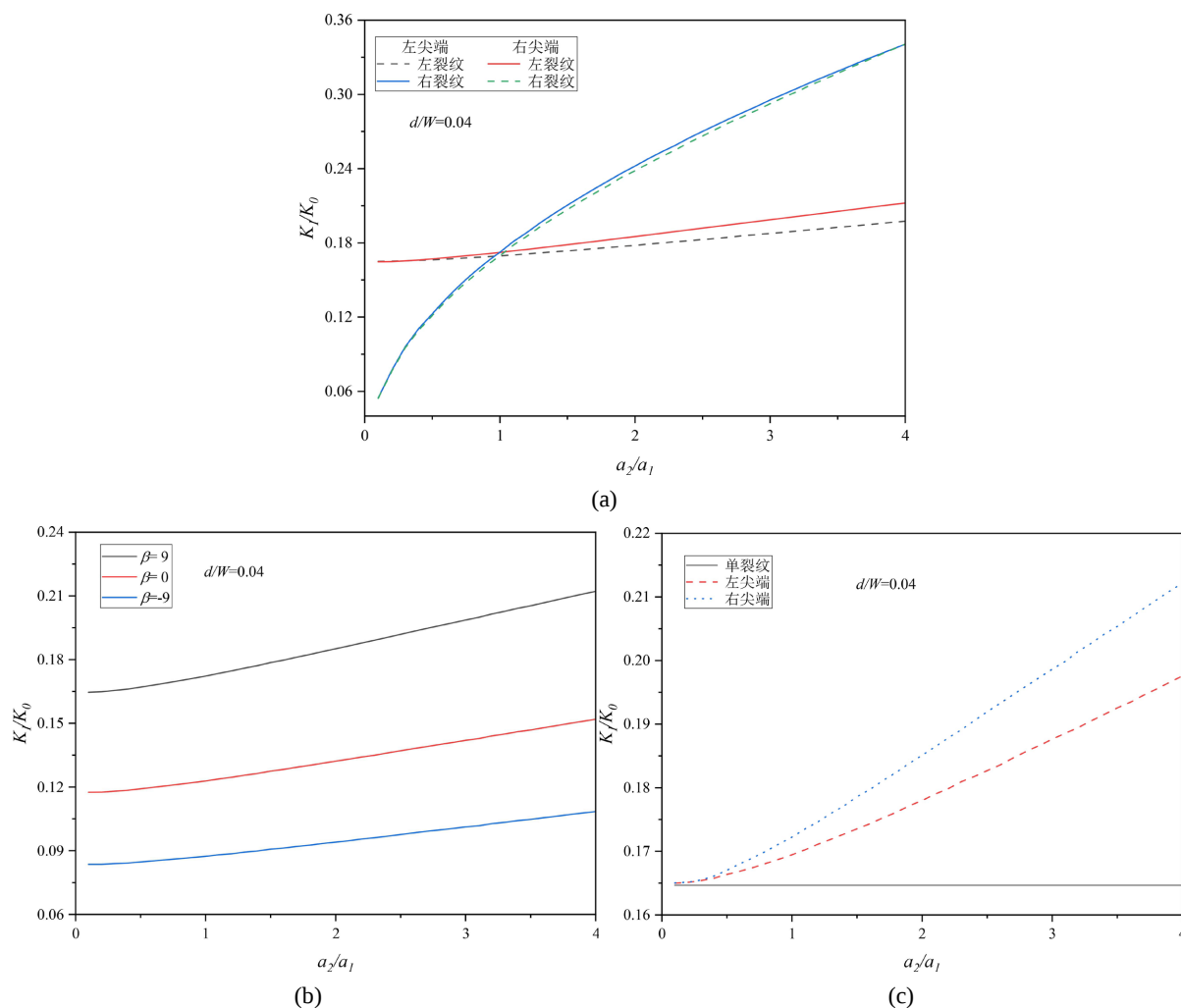


Figure 8. Variation of K_I/K_0 with crack length ratio: (a) Comparison between left and right cracks; (b) Effect of gradient parameter β ; (c) Comparison with single crack case

图 8. K_I/K_0 随长度的比值的变化的: (a) 左右裂纹对比; (b) 梯度参数 β 的影响; (c) 与单裂纹对比

因子水平。通过比较图 9(b)的曲线发现, 共线裂纹左右尖端的 K_I/K_0 都随着杨氏模量比值 E_1/E_0 的增大而减小。在 $E_1/E_0=1$ 时, 含夹杂条件下右尖端应力强度因子始终高于左尖端, 再次验证共线裂纹的相互促进效应。可以得出结论: 夹杂物与基体的杨氏模量比值 $E_1/E_0 < 1$ (即夹杂为弹性夹杂) 时, 会显著促进裂纹扩展, 且模量比越低促进作用越强。当 $E_1/E_0 > 1$ (夹杂为刚性夹杂) 时, 能有效抑制裂纹扩展, 其抑制效果随模量比提高而增强。

假设夹杂为刚性, 图 10 显示了四种典型工况下应力强度因子的时变规律。选取 $t = 200 \sim 800$ s 区间是因为裂纹在此区间扩展。从图 10 可以看到, 应力强度因子在 $200 \text{ s} \sim 350 \text{ s}$ 附近快速达到峰值后持续衰减, $t = 800 \text{ s}$ 附近时趋于零。共线裂纹尖端的呈现最高应力强度因子, 证实裂纹间相互作用促进扩展。靠近夹杂的单裂纹的 K_I/K_0 最小, 是因为刚性夹杂阻碍了裂纹的扩展。而含夹杂的共线裂纹的 K_I/K_0 小于单裂纹的值则说明了刚性夹杂的抑制作用要强于共线裂纹之间的相互作用。最后通过对比几种情况的 K_I/K_0 可以得到, 刚性夹杂对裂纹扩展的抑制作用强于共线裂纹间的促进效应, 且能有效削弱裂纹相互作用强度。

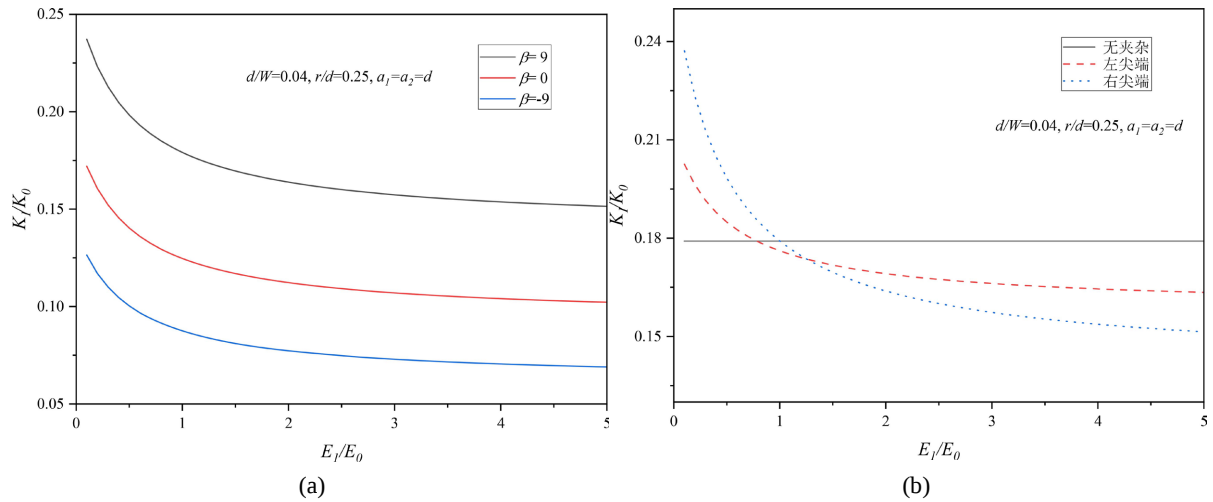


Figure 9. Effect of inclusion's Young's modulus E_1/E_0 on K_I/K_0 : (a) Comparison of three gradient parameters; (b) Contrast between cases with and without inclusions

图 9. 夹杂的杨氏模量 E_1/E_0 对 K_I/K_0 的影响: (a) 三种梯度参数对比; (b) 含夹杂与不含夹杂共线裂纹的对比

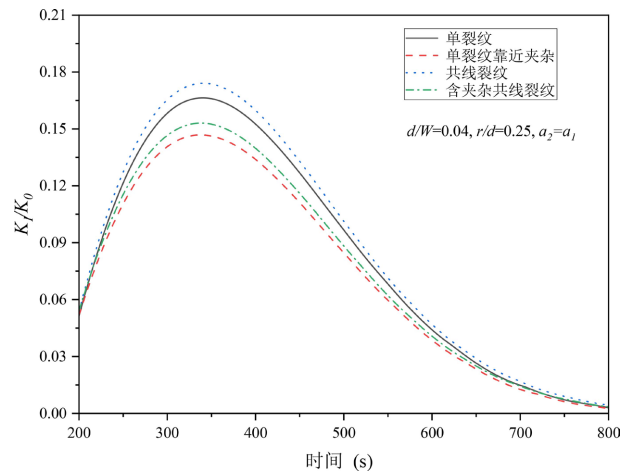


Figure 10. Temporal variation of crack-tip stress intensity factor

图 10. 裂纹尖端应力强度因子随时间变化

假设夹杂为弹性夹杂, 图 11 为单裂纹、单裂纹靠近夹杂、共线裂纹和含夹杂的共线裂纹的应力强度因子 K_I/K_0 的对比。从图 11 中可以看出, 靠近夹杂的单裂纹的 K_I/K_0 要大于共线裂纹。可以得到弹性夹杂对裂纹扩展的促进效应显著强于共线裂纹间的相互作用, 而且会进一步放大共线裂纹间的相互影响, 该结果与刚性夹杂条件形成鲜明对比, 完整揭示了夹杂性质对裂纹相互作用的关键调控作用。弹性夹杂因模量低于基体, 在热应力作用下更易发生形变, 导致裂纹尖端应力场重新分布。具体表现为: 弹性夹杂的柔顺性使其无法有效承载外部应力, 反而将更多应力传递至裂纹尖端, 加剧应力集中效应。刚性夹杂则因模量高于基体, 能通过局部硬化效应分散裂纹尖端应力。其高刚度特性抑制了基体与夹杂界面处的应变失配, 降低了裂纹尖端的能量释放率。研究表明应力强度因子的动态演变规律显著依赖于夹杂属性。在弹性夹杂条件下, 由于界面柔顺性导致的应力重分布, 应力强度因子呈现快速上升趋势, 对应裂纹的加速扩展阶段(图 10)。与之相反, 刚性夹杂通过局部硬化效应有效抑制了裂纹尖端的能量释放率, 显著延长了裂纹的萌生周期, 裂纹扩展路径倾向于沿夹杂 - 基体界面或垂直于最大主应力方向, 这主要

由于界面失配应力与主应力场的协同作用。

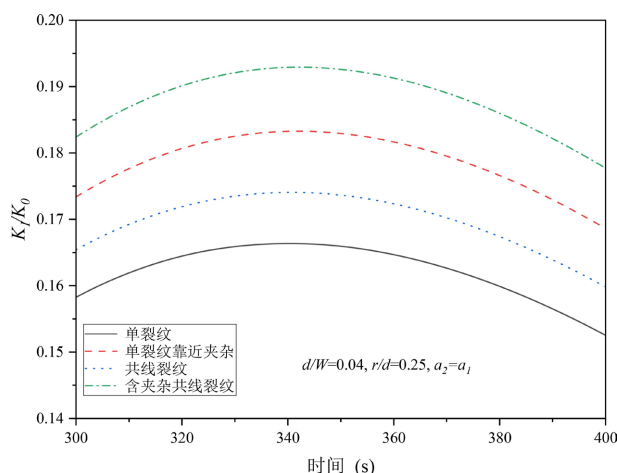


Figure 11. Comparative analysis of cases with elastic inclusions
图 11. 含弹性夹杂的几种情况对比

3. 结论

本文采用梯度有限元方法，系统分析了非均匀超导块体在冷却过程中热应力分布及其对含夹杂共线裂纹体系的影响机制。结果表明，当两个共线裂纹相互靠近时，会促进裂纹的扩展。共线裂纹的相互作用强度与裂纹间距成反比关系，当间距减小或长度比值增大时，裂纹扩展显著增强；同时，夹杂物的力学性质对裂纹行为具有关键调控作用，低杨氏模量的弹性夹杂会促进裂纹扩展并增强裂纹间相互作用，而高模量的刚性夹杂则能有效抑制裂纹扩展并削弱裂纹间耦合效应。本文通过比较了单裂纹、靠近夹杂的单裂纹、共线裂纹和含夹杂的共线裂纹尖端的应力强度因子的值，发现夹杂对裂纹的影响要强于共线裂纹之间的相互作用，刚性夹杂能削弱共线裂纹之间的相互作用，而弹性夹杂则增强了共线裂纹之间的相互作用。本研究不仅揭示参数影响规律，更通过机制分析与应用探讨，为超导材料的缺陷工程提供新思路：通过引入高模量刚性夹杂可有效抑制裂纹扩展，提升超导块体的断裂韧性；避免使用低模量弹性夹杂(如聚合物)以减少应力集中风险。超导块体的制造过程中需严格限制共线裂纹的间距和长度比，以削弱裂纹间相互作用。在液氮冷却系统中优化热边界条件可降低热应力梯度，避免裂纹萌生于夹杂附近区域。

参考文献

- [1] Ikuta, H., Hirota, N., Nakayama, Y., Kishio, K. and Kitazawa, K. (1993) Giant Magnetostriction in $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ Single Crystal in the Superconducting State and Its Mechanism. *Physical Review Letters*, **70**, 2166-2169. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.70.2166>
- [2] Ikuta, H., Kishio, K. and Kitazawa, K. (1994) Critical State Models for Flux-Pinning-Induced Magnetostriction in Type-II Superconductors. *Journal of Applied Physics*, **76**, 4776-4786. <https://doi.org/10.1063/1.357249>
- [3] Johansen, T.H. (1999) Flux-Pinning-Induced Stress and Strain in Superconductors: Long Rectangular Slab. *Physical Review B*, **59**, 11187-11190. <https://doi.org/10.1103/physrevb.59.11187>
- [4] Johansen, T.H. (2000) Pinning-induced Stress during Activation of Bulk HTSS as Trapped-Field Magnets. *Superconductor Science and Technology*, **13**, 830-835. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/13/6/342>
- [5] Johansen, T.H. (1999) Flux-Pinning-Induced Stress and Strain in Superconductors: Case of a Long Circular Cylinder. *Physical Review B*, **60**, 9690-9703. <https://doi.org/10.1103/physrevb.60.9690>
- [6] Johansen, T.H. (2000) Flux-Pinning-Induced Stress and Magnetostriction in Bulk Superconductors. *Superconductor*

- Science and Technology*, **13**, R121-R137. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/13/10/201>
- [7] Yong, H. and Zhou, Y. (2008) Kim Model of Stress Induced by Flux Pinning in Type-II Superconductors. *Journal of Applied Physics*, **103**, Article ID: 113903. <https://doi.org/10.1063/1.2936314>
 - [8] Yong, H. and Zhou, Y. (2013) Flux Pinning Induced Stress and Magnetostriction in a Long Elliptic Cylindrical Superconductor. *Journal of Applied Physics*, **114**, Article ID: 023902. <https://doi.org/10.1063/1.4811531>
 - [9] Yang, Y., Xiao, L. and Li, X. (2010) Impact of Viscous Flux Flow on the Stress in Long Rectangular Slab Superconductors. *Journal of Applied Physics*, **107**, Article ID: 033925. <https://doi.org/10.1063/1.3284080>
 - [10] Yang, Y., Zhang, G.M., Wang, L., Hua, Z.Q. and Li, T. (2011) Impact of Viscous Flux Flow on the Stresses in Long Cylindrical Superconductors. *Superconductor Science and Technology*, **24**, Article ID: 095003. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/24/9/095003>
 - [11] Takahashi, K., Fujishiro, H., Naito, T., Yanagi, Y., Itoh, Y. and Nakamura, T. (2017) Fracture Behavior Analysis of Eubacuo Superconducting Ring Bulk Reinforced by a Stainless Steel Ring during Field-Cooled Magnetization. *Superconductor Science and Technology*, **30**, Article ID: 115006. <https://doi.org/10.1088/1361-6668/aa8827>
 - [12] 杨小斌. 高温超导磁通跳跃过程中的磁致伸缩效应[J]. 低温与超导, 2011, 39(7): 36-41.
 - [13] 杨小斌, 李秀红, 王晓军. 脉冲磁场作用下超导圆柱应力分析[J]. 应用力学学报, 2017, 34(5): 969-974, 1019.
 - [14] Yang, X., Li, X., He, Y., Wang, X. and Xu, B. (2017) Investigation on Stresses of Superconductors under Pulsed Magnetic Fields Based on Multiphysics Model. *Physica C: Superconductivity and Its Applications*, **535**, 1-8. <https://doi.org/10.1016/j.physc.2017.02.003>
 - [15] Wu, H., Yong, H. and Zhou, Y. (2018) Stress Analysis in High-Temperature Superconductors under Pulsed Field Magnetization. *Superconductor Science and Technology*, **31**, Article ID: 045008. <https://doi.org/10.1088/1361-6668/aaafaa>
 - [16] Zhou, Y. and Yong, H. (2007) Crack Problem for a Long Rectangular Slab of Superconductor under an Electromagnetic Force. *Physical Review B*, **76**, Article ID: 094523. <https://doi.org/10.1103/physrevb.76.094523>
 - [17] Xue, F. and Zhou, Y. (2010) An Analytical Investigation on Singularity of Current Distribution around a Crack in a Long Cylindrical Superconductor. *Journal of Applied Physics*, **107**, Article ID: 113927. <https://doi.org/10.1063/1.3399508>
 - [18] Gao, Z., Lee, K.Y. and Zhou, Y. (2012) Crack Tip Shielding and Anti-Shielding Effects of Parallel Cracks for a Superconductor Slab under an Electromagnetic Force. *Journal of Mechanical Science and Technology*, **26**, 353-357. <https://doi.org/10.1007/s12206-011-1254-6>
 - [19] Seidov, S.S., Kesharpu, K.K., Karpov, P.I. and Grigoriev, P.D. (2018) Conductivity of Anisotropic Inhomogeneous Superconductors above the Critical Temperature. *Physical Review B*, **98**, Article ID: 014515. <https://doi.org/10.1103/physrevb.98.014515>
 - [20] Zhang, Y., Peterson, J. and Gunzburger, M. (2011) Maximizing Critical Currents in Superconductors by Optimization of Normal Inclusion Properties. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **240**, 1701-1713. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.06.024>
 - [21] Zhao, Y. and Shi, B. (2020) Influence of Non-Superconducting Inclusions on Magnetostriction of Bulk Superconductors with Viscous Flux Flow under Zero-Field Cooling Process. *Journal of Low Temperature Physics*, **198**, 269-279. <https://doi.org/10.1007/s10909-020-02354-0>
 - [22] Gao, Z., Zhou, Y. and Lee, K.Y. (2010) Graded Finite Element Simulation of Thermal Stress in Inhomogeneous High-Tc Superconductor. *Physica C: Superconductivity*, **470**, 2010-2015. <https://doi.org/10.1016/j.physc.2010.09.005>