

两个基本屈服准则几何轨迹建立的探索

宋广胜

沈阳航空航天大学材料科学与工程学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2025年5月9日; 录用日期: 2025年6月16日; 发布日期: 2025年9月8日

摘 要

Mises屈服准则和Tresca屈服准则是力学领域两个基本的屈服准则, 在不同的应力状态下, 两个屈服准则对应的几何轨迹在相关的力学教材中都有介绍, 但对于三向应力状态下Tresca屈服准则几何轨迹——正六棱柱面的建立过程, 在相关教材中没有具体的描述。本文首先利用平面坐标旋转公式建立平面应力状态下Mises屈服准则的几何轨迹, 再通过严格的数学分析建立了三向应力状态下Tresca屈服准则的几何轨迹——内接于Mises圆柱面的正六棱柱面。

关键词

屈服准则, 应力状态, 主应力, 几何轨迹

Exploration on Establishing Geometric Trajectories of Two Fundamental Yield Criteria

Guangsheng Song

School of Materials Science and Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning

Received: May 9th, 2025; accepted: Jun. 16th, 2025; published: Sep. 8th, 2025

Abstract

Mises and Tresca yield criteria are two fundamental yield criteria in the field of mechanics. The geometric trajectories corresponding to the two yielding criteria under different stress states are introduced in related mechanical textbooks. However, the process of establishing the geometric trajectory of the Tresca yield criterion in three-dimensional stress state—the regular hexagonal prism surface is not detailly described in relevant textbooks. In this paper, the geometric trajectory of Mises yield criterion under plane stress state was first established by the formula of plane coordinate

rotation. Then, through rigorous mathematical analysis, the geometric trajectory of Tresca yield criterion under triaxial stress state—the regular hexagonal cylindrical surface inscribed on Mises cylinder surface—was established.

Keywords

Yield Criterion, Stress State, Principal Stress, Geometric Trajectory

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

屈服准则是受力物体内质点是否进入塑性变形状态的判据，建立精确描述物体变形状态的屈服准则一直是力学领域研究的重要方向。在力学发展进程中，著名的屈服准则有描述各向同性金属材料的 Tresca 准则(1864 年)和 Mises 准则(1913 年)，描述各向异性金属材料的 Hill48 准则、Hosford66 准则和 Barlat89 准则[1]-[5]，描述岩土材料变形稳定性的 Drucker-Prager 准则、Mohr-Coulomb 准则和 Hoek-Brown 准则[6]-[9]。

Tresca 准则和 Mises 准则是经典力学中两个最基本的屈服准则，具有表述简单易于应用的优点，至今仍在金属和非金属材料变形力学分析领域得到应用[10]-[13]。在以应力为坐标轴的坐标系中，屈服准则对应的几何轨迹是屈服准则一种直观的表述形式，通常称之为屈服轨迹，对于 Tresca 准则和 Mises 准则的屈服轨迹在塑性力学相关教材中都有介绍，但对于其建立过程通常缺乏详细的描述。

本文利用等式变换和平面坐标旋转公式，对平面应力状态下 Mises 准则的几何轨迹——椭圆的建立过程进行了分析，对 Tresca 准则在主应力空间中几何轨迹——六棱柱面的建立过程进行了详细的分析，便于读者更好地理解上述屈服轨迹的形成原理。

2. 平面应力状态下 Mises 屈服准则的几何轨迹

平面应力状态是三维应力状态的一种简化形式，但通常能够满足受力分析的精度要求，它定义为应力只存在于平行于平面方向，而与平面垂直的法线方向的应力分量为零。对于弯曲梁的纵截面、薄壁管扭转时平行于轴线的管壁面、薄板冲压时平行于冲压方向薄壁面等面上质点的应力分析都可以按照平面应力状态进行处理。

在平面应力状态下，假设主应力分量 σ_3 与平面法线方向一致，则将 $\sigma_3 = 0$ 代入 Von Mises 屈服准则表达式

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\sigma_s^2 \quad (1)$$

得

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_s^2 \quad (2)$$

方程(2)对应的几何轨迹为坐标系 (σ_1, σ_2) 内一椭圆[14][15]，该椭圆的对称中心与坐标原点重合，长、短半轴与坐标轴的夹角为 $\pi/4$ ，文献[16]利用平面坐标旋转公式把方程(2)变为一标准椭圆方程，证明方程(2)对应的几何轨迹为标准椭圆逆时针旋转 $\pi/4$ 而形成。不同于文献[16]中采用直接带入坐标旋转公式的方法，本文首先通过对式(2)进行系列变换而将其转换为一标准椭圆方程，再根据变换前后的坐标系间的

对应关系，并依据平面坐标旋转公式，确定方程(2)对应的轨迹为标准椭圆逆时针旋转 $\pi/4$ 而成。具体过程如下：

对(2)式进行变换得

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2 \\ &= \frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2] + \frac{1}{2}[(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2]\end{aligned}$$

则

$$[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2] + [(\sigma_1 + \sigma_2)^2 - \sigma_1\sigma_2] = 2\sigma_s^2$$

即

$$(\sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) + (\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) = 2\sigma_s^2 \quad (3)$$

(3) 式等价于

$$\left(\frac{3}{2}\sigma_1^2 - 3\sigma_1\sigma_2 + \frac{3}{2}\sigma_2^2\right) + \left(\frac{1}{2}\sigma_1^2 + \sigma_1\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_2^2\right) = 2\sigma_s^2 \quad (4)$$

(4) 式可化为

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\right)^2 = 2\sigma_s^2$$

则

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\right)^2}{(\sqrt{2}\sigma_s)^2} + \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s\right)^2} = 1 \quad (5)$$

令 $\sigma'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2$, $\sigma'_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_2$, 即

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

则式(5)转变为

$$\frac{\sigma_1'^2}{(\sqrt{2}\sigma_s)^2} + \frac{\sigma_2'^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s\right)^2} = 1 \quad (7)$$

方程(7)对应的几何轨迹为坐标系 $(\sigma'_1\sigma'_2)$ 中一椭圆(称之为 Mises 椭圆)。由平面坐标旋转公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (8)$$

式中, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 分别为坐标系旋转前后的点坐标, φ 为逆时针方向的旋转角。

则式(6)为

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

则坐标 $\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \end{pmatrix}$ 是由 $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$ 坐标逆时针旋转 $\pi/4$ 角所成, 于是方程(7)对应的椭圆轨迹可以看成由轨迹方程为

$$\frac{\sigma_1^2}{(\sqrt{2}\sigma_s)^2} + \frac{\sigma_2^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s\right)^2} = 1 \quad (10)$$

的椭圆(称之为标准椭圆——standard eclipse)旋转 $\pi/4$ 角而形成, 即在坐标系 $(o\sigma_1\sigma_2)$ 中对应的椭圆旋转 $\pi/4$ 角而成, 坐标旋转并不改变图形的形状特征, 则方程(7)与(10)对应的轨迹如图1所示, 图中的实线椭圆为方程(1)对应的轨迹, 即平面应力状态下 Mises 屈服准则对应的几何轨迹。

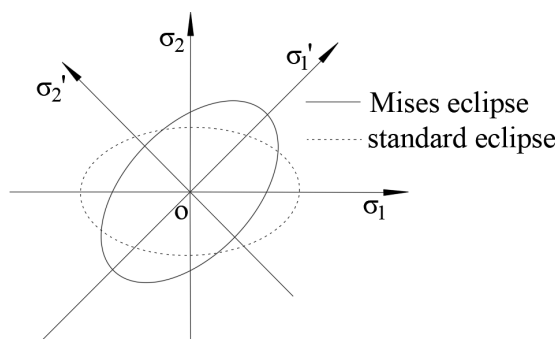


Figure 1. Geometric trajectory of Mises yield criterion under plane stress state
图 1. 平面应力状态下 Mises 准则的几何轨迹

3. 主应力空间中 Tresca 屈服准则的几何轨迹

Tresca 屈服准则的表达式对应着自变量为主应力 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 的函数, 而 Mises 屈服准则的表达式如果采用上述主应力为自变量的函数, 其表达式比采用直角坐标系中的 9 个应力分量为自变量的函数要简化明显, 所以对于一般的应力状态, 上述屈服准则的几何轨迹通常在坐标系 $(o\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$ 所建立的主应力空间中进行分析。在主应力空间中, Mises 屈服准则对应的轨迹为轴线为第一象限等倾线半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ 的圆柱面, 该圆柱面的建立过程在塑性力学相关文献中都有具体的描述[14][15][17][18]。对于 Tresca 屈服准则在主应力空间中屈服轨迹则为与上述圆柱面同一轴线, 并且位于圆柱面内的正六棱柱面, 对于该六棱柱面的建立过程, 相关文献通常以“显而易见, ……”、“同理, ……”等语言一笔带过, 缺乏具体的描述。本文通过严格的数学分析, 对上述六棱柱面的建立过程进行了详细描述, 具体过程如下文。

如图2所示, 在坐标系 $(o\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$ 所建立的主应力空间中, 矢量 op 表示任一应力张量, 矢量 on 为第一象限的等倾线(与各坐标轴的夹角相等), 矢量 om 和 mp 分别对应着任一应力张量的应力球张量和应力偏张量, 在该主应力空间中, Mises 屈服准则对应的几何轨迹为轴线为 on 半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ 的圆柱面, 简称为 Mises 圆柱面。

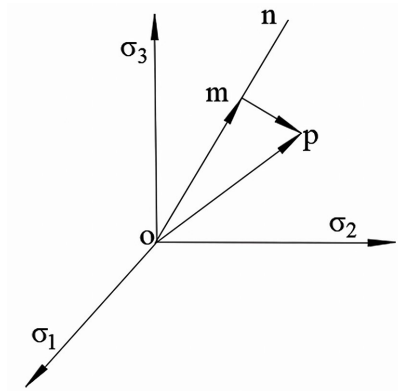


Figure 2. Stress tensor and its components in principal stress space
图 2. 主应力空间中的应力张量及其分量

设主应力各分量之间的关系为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，即主应力 σ_1 和 σ_3 分别为质点的最大和最小正应力，则 Tresca 屈服准则对应的表达式为

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s \quad (11)$$

令

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{n}{m} \sigma_s \quad (n \leq m) \quad (12)$$

式中， m 为正整数， n 为自然数。

则

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 = \left[\left(\frac{n}{m} \right)^2 + \left(1 - \frac{n}{m} \right)^2 \right] \sigma_s^2$$

很容易证明

$$\left[\left(\frac{n}{m} \right)^2 + \left(1 - \frac{n}{m} \right)^2 \right] \leq 1$$

则

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \leq \sigma_s^2$$

在主应力空间中，代入应力偏张量对应的矢量模长的表达式

$$\begin{aligned} |mp| &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \end{aligned}$$

得到 Tresca 屈服准则在主应力空间的轨迹应满足

$$|mp| \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s \quad (13)$$

式(13)表明方程(11)对应的屈服轨迹应位于轴线为等倾线 on ，半径为 $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s$ 的圆柱内，即位于 Mises 圆

柱面上或其内部。

在主应力空间中, 如果不考虑式(13)的约束条件, 则方程(11)对应的轨迹为一族平面, 如图 3 所示, 该族平面的数量可以无限多, 其中每一个平面与坐标平面($o\sigma_1\sigma_3$)的交线对应着方程(10), 即与 $o\sigma_1$ 轴和 $o\sigma_3$ 轴的交点分别为 $(\sigma_s, 0, 0)$ 和 $(0, 0, -\sigma_s)$ 的直线。

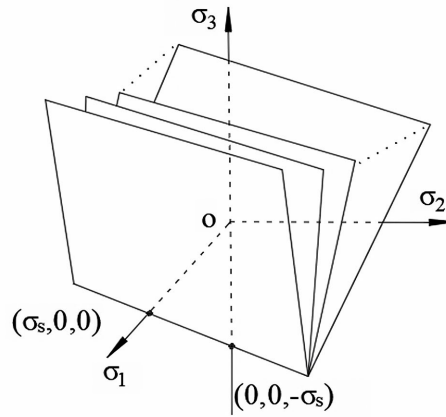


Figure 3. The plane family corresponding to the equation $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$

图 3. 方程 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ 对应的平面族

在图 3 所示的平面族内, 只有其中一个与等倾线 on 平行并且位于 Mises 圆柱面内的平面才能满足式(12), 该平面与 Mises 圆柱面的方位关系如图 4 所示, 图中的红色平面即为该平面。

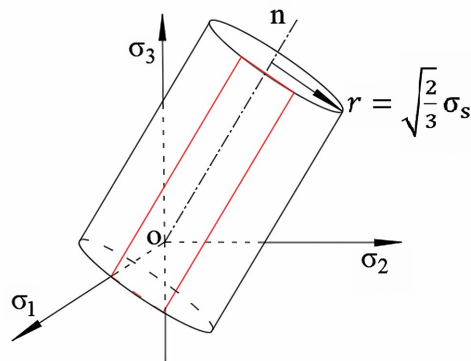


Figure 4. The $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ plane meeting the Tresca yield criterion (marked in red) and Mises cylinder surface

图 4. 满足 Tresca 屈服准则的 $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$ 平面(标记为红色)及 Mises 圆柱面

在主应力分量 σ_1 、 σ_2 和 σ_3 之间的大小关系未定的情况下, Tresca 屈服准则的表达式为

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_s; \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \sigma_s; \quad |\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_s \quad (14)$$

基于上述分析结果, 方程(14)对应着满足式(13)的主应力空间中 6 个平面, 其中的一个平面为图 4 中所示的平面, 由上述分析, 该 6 个平面只有都平行于等倾线 on 并且位于 Mises 圆柱面内才能满足式(13), 方程(14)对应的 6 个平面分别与 $o\sigma_1\sigma_2$ 、 $o\sigma_2\sigma_3$ 和 $o\sigma_1\sigma_3$ 坐标面的交线方程依次为

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \pm \sigma_s; \quad \sigma_2 - \sigma_3 = \pm \sigma_s; \quad \sigma_1 - \sigma_3 = \pm \sigma_s \quad (15)$$

如图 5 所示, 上述 6 个位于 Mises 圆柱面内的 6 个平面组成一个正六棱柱面(标记为红色), 称为 Tresca

六棱柱面，即为主应力空间中的 Tresca 屈服准则对应的几何轨迹。

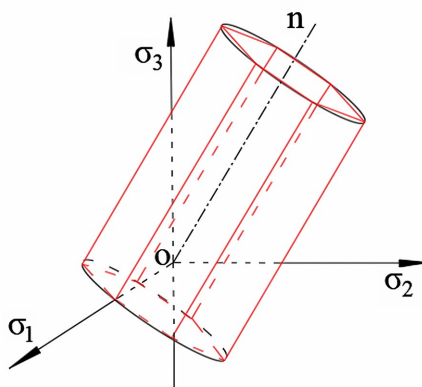


Figure 5. Yield trajectories in principal stress space
图 5. 主应力空间中的屈服轨迹

4. 结论

基于对平面应力状态下 Mises 屈服准则表达式的数学变换，利用平面坐标旋转公式，把标准椭圆旋转 $\pi/4$ 角，得到平面应力状态下 Mises 屈服准则的椭圆方程，从而得到平面应力状态下的 Mises 屈服准则的几何轨迹。基于 Tresca 屈服准则的几何轨迹到主应力空间中的等倾线的距离应满足小于或等于 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ 的条件，得到 Tresca 屈服准则的几何轨迹——平行于等倾线并且内接于 Mises 圆柱面的正六棱柱面。

基金项目

沈阳航空航天大学本科教学改革研究项目(JG251103A4)。

参考文献

- [1] 张飞飞, 陈劼实, 陈军等. 各向异性屈服准则的发展及实验验证综述[J]. 力学进展, 2012, 42(1): 68-80.
- [2] 吴向东, 万敏, 周贤斌. 各向异性板料屈服轨迹的研究[J]. 材料科学与工艺, 2004, 12(4): 391-397.
- [3] 周兵营, 崔学习, 关铂镔等. 基于塑性演化的非关联 Hill48 屈服准则及其在超高强 DP 钢板中的应用[J]. 锻压技术, 2024, 49(7): 217-225.
- [4] 张贵杰, 夏亮亮, 杨莉英等. 屈服准则研究的新进展[J]. 铸造技术, 38(1): 20-23.
- [5] 赵辉, 彭艳, 石宝东. 金属材料各向异性本构模型研究进展[J]. 塑性工程学报, 2022, 29(10): 32-42.
- [6] 杨强, 陈新, 周维垣. 基于二阶组构张量的各向异性屈服准则[J]. 工程力学, 2005, 22(6): 15-20.
- [7] 孙锐, 阳军生, 李雨哲等. 基于广义 Hoek-Brown 屈服准则的极限分析下限有限元法[J]. 岩土力学, 2021, 42(6): 1733-1742.
- [8] 王红才, 赵卫华, 孙东生等. 岩石塑性变形条件下的 Mohr-Coulomb 屈服准则[J]. 地球物理学报, 2012, 55(12): 4231-4238.
- [9] 郑燕妮, 张强, 张升等. 基于 Hoek-Brown 的岩石横观各向同性屈服准则研究[J]. 岩土力学, 2022, 43(1): 139-151.
- [10] 肖忠, 章嘉晨. 圆矩形吸力式深水防波堤的循环承载力的高效计算方法[J]. 力学与实践, 2022, 44(5): 1081-1092.
- [11] 徐平. 基于 Tresca 屈服准则的瓦斯抽采孔的弹塑性解答[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(S2): 16-20.
- [12] 杨锋平, 孙秦. 屈服准则及切线模量修正的弹塑性计算模型[J]. 力学学报, 2010, 42(4): 804-810.
- [13] 罗文波, 罗中华, 彭炎荣. Mises 准则的圆形屈服轨迹及其在板料成形中的应用[J]. 锻压技术, 1999(6): 23-27.
- [14] 汪大年. 金属塑性成形原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986.

- [15] 俞汉卿, 陈金德. 金属塑性成形原理[M]. 北京: 机械工业出版社, 1999.
- [16] 梅瑞斌, 包立, 刘相华. 塑性力学教学中 Mises 屈服准则几何轨迹证明[J]. 力学与实践, 2022, 44(4): 955-959.
- [17] 陆严清. 塑性变形理论及应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 1988.
- [18] 尚福林. 塑性力学基础[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2018.