

一致偶应力理论下粗糙表面的接触

曹学, 雷东侠, 欧志英*

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年3月5日; 录用日期: 2026年3月19日; 发布日期: 2026年6月4日

摘要

随着现代科技的发展, 材料结构在纳米尺度下的力学性能受到研究者的广泛关注。当接触尺寸由宏观缩小到纳米时, 尺度效应对接触力学行为的影响将变得非常重要。本文通过理论分析的方法, 研究了一致偶应力弹性理论下粗糙表面的接触问题。首先利用数值结果得到了考虑一致偶应力的单个纳米级粗糙度的接触面积和载荷随压痕深度变化的一般关系, 然后基于G-W的接触模型提出了一种考虑一致偶应力的粗糙表面接触模型。揭示了一致偶应力和球形粗糙度对粗糙表面的接触载荷、实际接触面积和平均接触压力的影响。结果表明, 与间距恒定的经典弹性G-W模型相比, 该模型具有更大的法向载荷和更小的实际接触面积。此外, 粗糙表面之间的接触载荷随着一致偶应力的增加而增加, 但实际接触面积减小; 当一致偶应力恒定时, 球形粗糙度越大, 接触载荷和实际接触面积就越大。

关键词

微纳米尺度, 粗糙表面, 接触, 一致偶应力

Contact of Rough Surfaces under the Theory of Consistent Couple Stress

Xue Cao, Dongxia Lei, Zhiying Ou*

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: March 5, 2026; accepted: March 19, 2026; published: June 4, 2026

Abstract

With the development of modern technology, the mechanical properties of material structures at the nanoscale have attracted widespread attention from researchers. When the contact size is reduced from the macroscopic scale to the nanoscale, the scale effect on contact mechanics behavior

*通讯作者。

文章引用: 曹学, 雷东侠, 欧志英. 一致偶应力理论下粗糙表面的接触[J]. 力学研究, 2026, 15(2): 125-135.
DOI: 10.12677/ijm.2026.152013

becomes highly significant. This paper investigates the contact problem of rough surfaces under the consistent couple stress elasticity theory through theoretical analysis. First, numerical results are used to establish a general relationship between the contact area and load of a single nanoscale roughness element considering consistent couple stress, as they vary with indentation depth. Then, based on the Greenwood-Williamson contact model, a rough surface contact model incorporating consistent couple stress is proposed. The study reveals the effects of consistent couple stress and spherical roughness on the contact load, real contact area, and average contact pressure of rough surfaces. The results show that, compared to the classical elastic G-W model with constant spacing, the proposed model predicts a larger normal load and a smaller real contact area. Furthermore, the contact load between rough surfaces increases with increasing consistent couple stress, while the real contact area decreases; when consistent couple stress is held constant, larger spherical roughness leads to greater contact load and real contact area.

Keywords

Micro-Nano Scale, Rough Surface, Contact, Consistent Couple Stress

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

界面接触力学是机械工程、材料科学、摩擦学与微机电系统等诸多方向中的关键课题。经典的赫兹接触理论为理想光滑表面之间的弹性接触问题提供了精确的解析解，从而奠定了接触力学研究的理论基础。然而，所有工程表面在微纳米尺度下均具有粗糙度，这些粗糙度表现为随机分布的微凸峰与凹谷。这种非理想形貌导致两粗糙表面实际接触仅发生于离散的微凸峰顶端，使得真实接触面积远小于表面接触面积，导致了接触应力的高度集中，从而显著改变了接触界面的力学响应、摩擦行为、密封性能与失效机制[1]-[3]。因此，对粗糙表面接触行为进行深入研究具有至关重要的理论意义与工程应用价值。

在粗糙界面接触力学形成明确的研究范畴之前，接触问题的研究主要集中在基于赫兹理论[4]的光滑曲面之间的相互作用。然而，从更广泛的工程实际来看，绝大多数的机械接触并非发生在理想光滑的表面上，而是出现在那些宏观上平整，但微观上具有显著粗糙纹理的真实界面之间。在 1966 年，Greenwood 和 Williamson [5]开创性地用统计方法处理了粗糙面的接触问题。将粗糙表面视为球形凹凸的统计集合，每个微凸体独立接触并遵循赫兹接触过程。在 G-W 模型中，粗糙表面被表述为随机分布的球形粗糙峰，假设这些粗糙峰具有相同的半径，且其高度服从高斯分布。此模型预测了近似线性的载荷 - 面积关系以及一个恒定的平均接触面积。并且这种统计接触模型已被广泛扩展，被用来考虑变化的粗糙峰半径和纳米尺度的效应[6]。1970 年，Whitehouse 和 Archard [7]意识到 G-W 模型的参数在现实中难以直接测量，因此提出了使用统计参数来描述随机粗糙表面，利用其峰顶的统计参数 - 峰顶密度、峰顶曲率半径和高度分布来预测和控制粗糙表面的接触行为，建立了表面形貌学与接触力学之间的桥梁。后来基于 G-W 模型，Nayak [8]将粗糙表面建模为二维各向同性高斯随机过程，在 Nayak 的理论基础上，Bush 等人[9]改进 G-W 模型的几何假设，采用更符合实际的椭圆抛物面来近似微凸体，并提出了一个完整的统计粗糙表面接触模型(BGT)，此模型与 G-W 模型相比，BGT 模型预测的接触行为更准一些。之后，Greenwood [10]通过扩展 Nayak 的随机曲面理论，提出了一个简化模型，该模型与 BGT 模型吻合良好。鉴于 G-W 模型只考虑弹性变形的缺点，Chang 等人[11]改进 G-W 模型在塑性变形方面的不足，提出了

一个精确的弹塑性接触模型(CEB),研究了粗糙体的弹塑性变形[12],发现在塑性变形占主导的情况下,总真实接触面积与总载荷之间仍然近似保持线性关系,这主要是由塑性变形接触贡献的。根据 G-W 模型的先前假设,考虑了粗糙度在大分离的距离下的接触且粗糙度接触之间无相互作用,所以,2023年, Li 等人[13]提出了修正的 G-W 模型并考虑粗糙度之间的相互作用,与没有粗糙度相互作用的 G-W 模型相比,相互作用会引起更大的载荷。

最近研究表明,一致偶应力在纳米级接触中起着至关重要的作用[14]-[17],但所有微观粗糙表面接触模型中都没有考虑到一致偶应力的作用。在 Hadesfandiari 和 Dargush [18]提出的一致偶应力理论中,引入了一个材料长度尺度参数来描述偶应力的影响,当接触区域的大小缩小至纳米时,一致偶应力将显著影响接触面积和压痕深度对外部载荷的依赖性,这明显偏离了赫兹接触模型。然而,迄今为止,很少有研究考虑到一致偶应力对粗糙表面接触整体响应的贡献。因此,本文通过将单个凸体的接触扩展到整个粗糙表面上,研究了一致偶应力下粗糙表面接触问题。首先基于经典 G-W 模型,推导了整个粗糙表面上所有凸体上的接触载荷和面积的统计函数,然后把考虑一致偶应力效应的单凸体接触载荷与实际接触面积关于压痕深度的解析表达式引入到经典的 G-W 统计模型框架中,以更准确地预测纳米级粗糙表面的接触行为,并讨论了偶应力效应对粗糙表面上接触的总载荷、真实接触面积以及平均接触压力的影响。

2. 单凸压头的接触过程

在研究一致偶应力对粗糙表面接触问题的影响之前,我们研究了半径为 R 的刚性球体与弹性半空间的接触问题。

在一致偶应力理论框架下,刚性球体与弹性半空间接触的过程相当于刚性球体对弹性半空间的压痕问题。现在我们考虑由 $z \geq 0$ 定义的弹性半空间,其表面产生半径为 R 的刚性球形压头压痕,如图 1,压头在外载荷 P 的作用下与半空间接触。其接触表面上($z=0$)产生了接触半径为 a 的圆和 δ 的压痕深度。在所研究的问题中,假定接触是光滑无摩擦的。

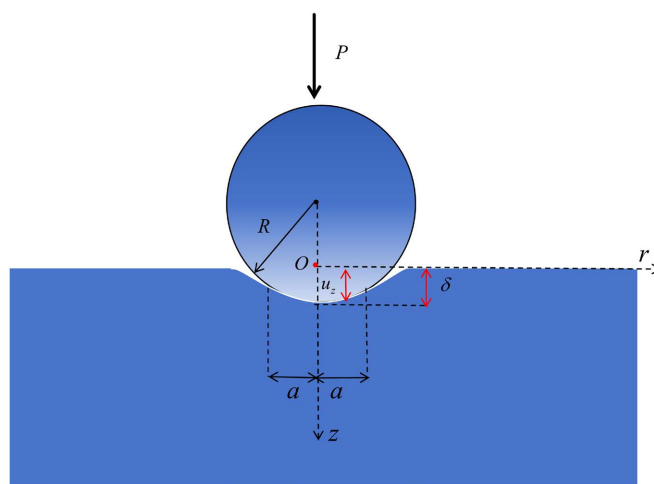


Figure 1. Schematic diagram of a half-space indentation
图 1. 半空间压痕示意图

在偶应力弹性理论下,表面无摩擦和平滑接触的牵引边界条件可以写为

$$\sigma_{zz}(r,0)=0, \text{ in } a < r < \infty \quad (1)$$

$$\sigma_{zr}(r,0)=0, \text{ in } 0 < r < \infty \quad (2)$$

$$m_{z\theta}(r,0)=0, \text{ in } 0 < r < \infty \quad (3)$$

在小变形条件下, 接触区域内的位移边界条件为

$$w(r)=u_z(r,0)=\delta-\frac{r^2}{2R}, \text{ in } 0 < r < a \quad (4)$$

在接触区域内, 法向牵引力等于压头下方的压力

$$\sigma_{zz}(r,0)=-p(r), \text{ in } 0 \leq r < a \quad (5)$$

对如图 1 考虑一致偶应力效应下球形压头与弹性半空间接触模型中, 我们通过 Gourgiotis 等人[19]已经推导了考虑一致偶应力效应轴对称接触问题中表面上的法向位移, 推导了其接触的控制积分方程并结合高斯切比雪夫求积公式, 数值求解了压头下方的压力分布, 并且对压头下方的压力分布进行详细分析并通过归一化后压力分布与材料尺度参数之间的关系, 给出了压力分布的拟合解析表达式, 与数值结果相比较拟合解析表达式对压力分布有个很好的预测。在此基础上, 可以数值计算球形压头与半空间接触时的压入深度 δ 。然后我们可以计算得到单个压头接触时的载荷和接触面积数值解。经典情况下的单个压头的接触载荷 P 和接触面积 A 的计算公式如下

$$P(\delta)=\frac{4}{3}E^*R^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{3}{2}} \quad (6)$$

$$A(\delta)=\pi R\delta \quad (7)$$

其中, E^* 为材料的复合弹性模量。

基于数值结果并按照 $\sqrt{R\delta}/l$ 归一化处理方式, 我们拟合了接触载荷 P 和接触面积 A 与压痕深度 δ 的关系如下

$$P(\delta)=\frac{4}{3}E^*R^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{3}{2}}\left[1+1.1843\left(\frac{\sqrt{R\delta}}{l}\right)^{-0.8527}\right] \quad (8)$$

$$A(\delta)=\pi R\delta\left[\frac{1+0.037\left(\frac{\sqrt{R\delta}}{l}\right)^{-0.613}}{1+1.541\left(\frac{\sqrt{R\delta}}{l}\right)^{-0.633}}\right] \quad (9)$$

其中, l 是表示一致偶应力影响的参数。下面验证了我们得到的解析表达式能够很好地预测单个压头接触的载荷和接触面积。

图 2 和图 3 分别表示通过数值计算获得并由方程(8)和(9)预测的载荷和接触面积。发现方程(8)和(9)对载荷和接触面积都可以给出很好的预测。考虑一致偶应力的相对重要性取决于无量纲比 $\sqrt{R\delta}/l$ 。当一致偶应力的影响可以忽略不计时, 对于方程中, l 是无穷小时, 无量纲比 $\sqrt{R\delta}/l$ 趋于无穷大, 方程退化为经典接触模型预测的载荷和接触面积。从上图可以看出, 当 $\sqrt{R\delta}/l$ 趋于无穷大时, 载荷和接触面积经过归一化后的值趋近于 1。相反, 当偶应力参数 l 影响变得可观时, 载荷和接触面积将明显偏离赫兹预测。

3. 粗糙面的随机过程

准确描述粗糙表面的高度分布与曲率特征, 对于深入理解粗糙界面的接触力学行为具有关键意义。为简化分析, 这里本文采用 G-W 模型的基本假设[5], 对于此模型有如下的假设:

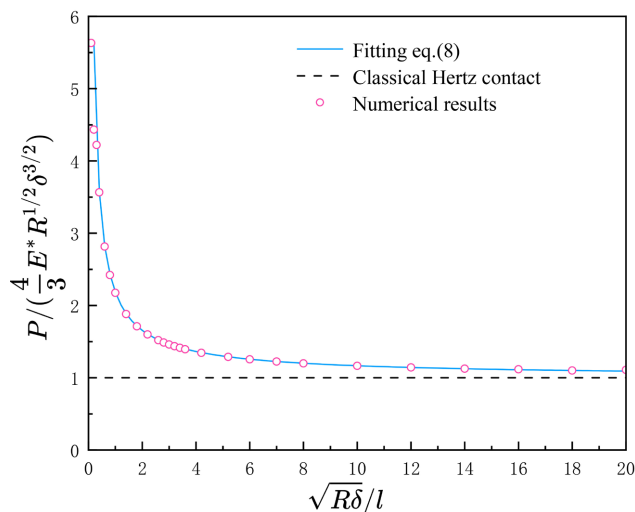


Figure 2. The relationship between external load and dimensionless ratio of $(R\delta)^{\frac{1}{2}}/l$

图 2. 外载荷与无量纲比 $(R\delta)^{\frac{1}{2}}/l$ 的关系

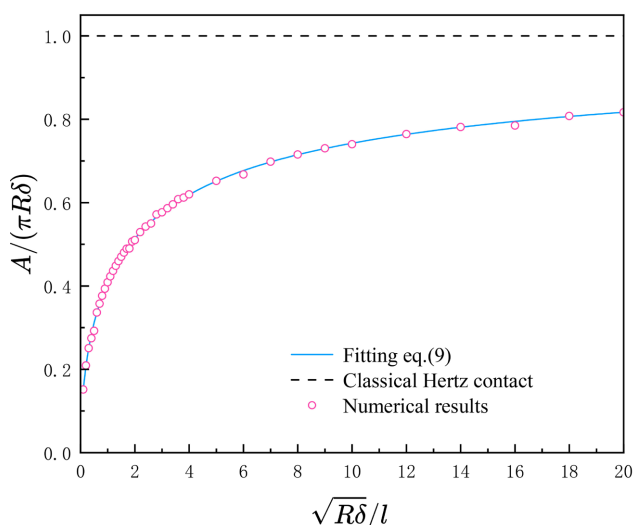


Figure 3. The relationship between contact area and dimensionless ratio of $(R\delta)^{\frac{1}{2}}/l$

图 3. 接触面积与无量纲比 $(R\delta)^{\frac{1}{2}}/l$ 的关系

- (一) 粗糙表面是各向同性材料；
- (二) 粗糙表面由大量相同半径的球凸起组成；
- (三) 粗糙面上微凸体的高度分布服从高斯分布假设；
- (四) 各个粗糙体之间无相互作用和塑性变形，每个凸体接触都遵循赫兹接触。

将两个粗糙表面之间的接触问题，等效为一个刚性平面与一个粗糙表面之间的接触来进行研究。如图 4，显示了等效粗糙表面接触的示意图，选择粗糙面的平均水平作为基准。其中 z_s 是粗糙面顶点的高度， d 是光滑刚性平面和粗糙度平均高度平面之间的间距， P 是施加在粗糙表面上的总载荷。假设 z_s 满足概率密度函数 $\varphi(z_s)$ 它表示 z_s 到 $z_s + dz_s$ 的高度顶点的概率。

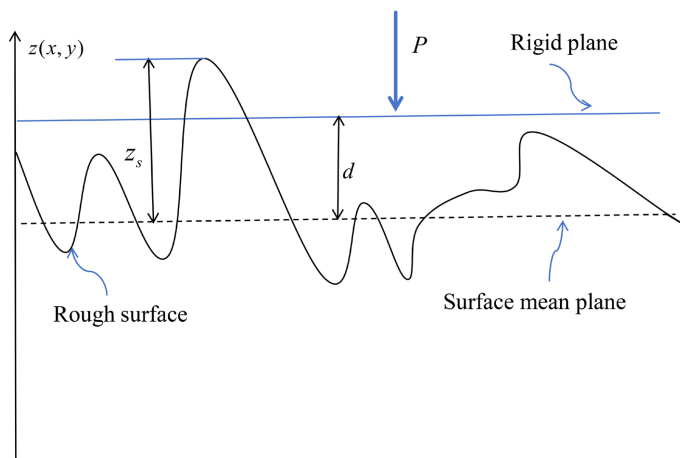


Figure 4. Schematic diagram of contact on a rough surface
图 4. 粗糙表面的接触示意图

G-W 模型假设在粗糙表面区域 A_0 上分布着 N_0 个具有相同曲率 $1/R$ 的球形粗糙凸体, 如图 4 所示。现在考虑一个理想的平坦刚性平面, 该平面压缩粗糙表面, 与粗糙表面的平均平面相距 d 。在这种分离下, 接触的粗糙度数量 n 将为

$$n = N_0 \int_d^{\infty} \varphi(z_s) dz_s \quad (10)$$

在 G-W 模型中忽略粗糙度之间的相互作用, 并假设每个粗糙度都遵循赫兹接触。如果第 i 个粗糙度的高度超过间距 d , 则它将被压缩为 $\delta_i = z_s - d$, 其接触面积 A_i 可以写为

$$A_i = \pi \delta_i R = \pi a_i^2 \quad (11)$$

其中, a_i 是第 i 个粗糙度的接触半径。相应的第 i 个被压缩的总载荷为

$$P_i = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta_i^{3/2} \quad (12)$$

其中, $E^* = E/(1-\nu^2)$ 是复合弹性模量, E 和 ν 是杨氏模量和泊松比。

假设概率密度函数 $\varphi(z_s)$ 服从高斯分布

$$\varphi(z_s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z_s^2}{2\sigma_s^2}\right) \quad (13)$$

这里, σ_s 表示粗糙度分布的标准偏差。因此, 接触的粗糙度数量为

$$n = \frac{N_0}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_d^{\infty} \exp\left(-\frac{z_s^2}{2\sigma_s^2}\right) dz_s \quad (14)$$

4. 粗糙表面接触

考虑两个粗糙表面的接触相当于刚性平面对粗糙表面的压缩。为了方便起见, 我们考虑在外部载荷 P 下刚性平面和各向同性高斯粗糙表面之间的接触, 如图 4 所示。用 d 表示粗糙表面的平面和平均平面之间的间距, 那么高度 z_s 大于间距 d 的顶点将被压痕深度 $\delta = z_s - d$ 压缩。通过将压痕深度 δ 代入拟合方程(8)、(9), 我们可以得到一致偶应力对局部接触面积和该接触点对应的载荷的影响。然后, 对于特定的间距 d , 总载荷 P (单位表面积)和实际接触面积(单位表面积)可以通过在整个表面上高度 $z_s > d$ 的所有顶点上的载荷和接触面积的总和来获得, 即

$$A_c(d) = N_0 \pi R \int_d^\infty (z_s - d) \varphi(z_s) dz_s \quad (15)$$

$$P(d) = \frac{4}{3} N_0 E^* \sqrt{R} \int_d^\infty (z_s - d)^{3/2} \varphi(z_s) dz_s \quad (16)$$

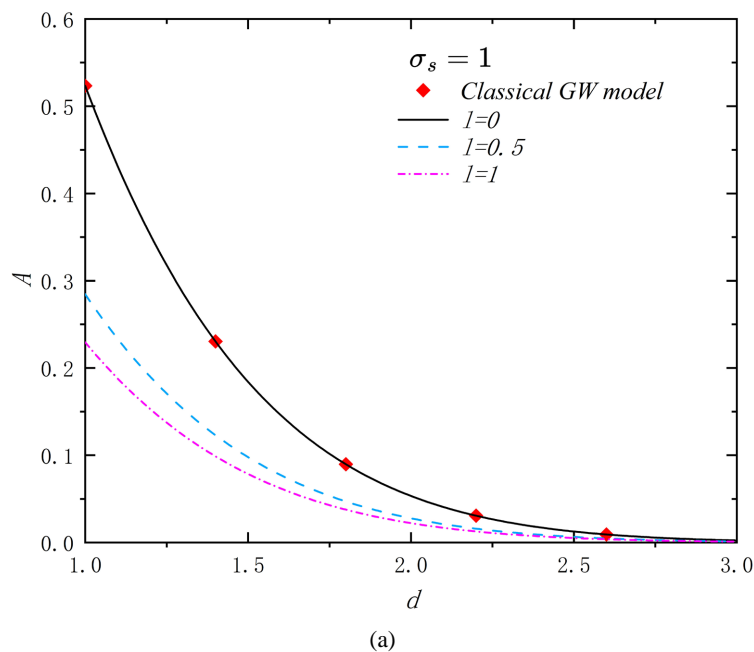
将概率密度函数 $\varphi(z_s)$ 、局部接触的载荷 $P(d)$ 和局部接触面积 $A(d)$ 分别代入上述方程(15)、(16)中，可以得到

$$A_c = \frac{N_0 \pi R}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_d^\infty (z_s - d) \left(\frac{1 + 0.037 \left(\frac{\sqrt{R(z_s - d)}}{l} \right)^{-0.613}}{1 + 1.541 \left(\frac{\sqrt{R(z_s - d)}}{l} \right)^{-0.633}} \right) \exp\left(-\frac{z_s^2}{2\sigma_s^2}\right) dz_s \quad (17)$$

$$P = \frac{4N_0 E^* \sqrt{R}}{3\sigma_s \sqrt{2\pi}} \int_d^\infty (z_s - d)^{3/2} \left(1 + 1.1843 \left(\frac{\sqrt{R(z_s - d)}}{l} \right)^{-0.8527} \right) \exp\left(-\frac{z_s^2}{2\sigma_s^2}\right) dz_s \quad (18)$$

根据方程式，一致偶应力的影响作用由参数 l 决定，粗糙表面的粗糙度与粗糙度分布的标准偏差 σ_s 有关。为了说明一致偶应力的影响，这里我们分别选取了参数 $l=0, 0.5, 1$ 。并且讨论了不同粗糙度分布标准偏差 $\sigma_s=1, 1.5$ 下的影响情况。

在图 5 中，讨论了 $l=0, 0.5, 1$ 三个值下的实际接触面积与分离距离之间的关系。研究发现，在 $l=0$ 的情况下，实际接触面积随间距的变化与经典弹性解非常吻合，这验证了我们结果的正确性。从图中发现实际接触面积随着间距的减小而增加。同时，当间距恒定时，随着 l 的增加实际接触面积减小。这表明，与经典弹性下的结果相比，考虑一致偶应力的实际接触面积更低。这可以归因于一致偶应力阻止了与粗糙表面的接触，从而导致实际接触面积减小。最后，在 l 和间距 d 恒定时，不同粗糙度分布标准偏差 $\sigma_s=1, 1.5$ 结果相比较， σ_s 越大对应的实际接触面积越大，这是因为 σ_s 越大，表面更加粗糙，在 l 和间距 d 恒定时表面接触凸起的数量更多导致实际接触面积增加。



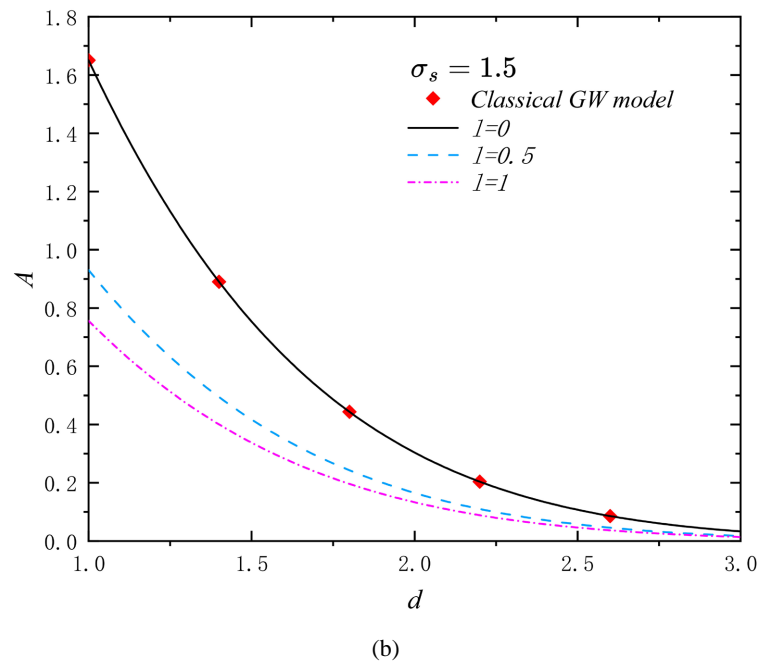
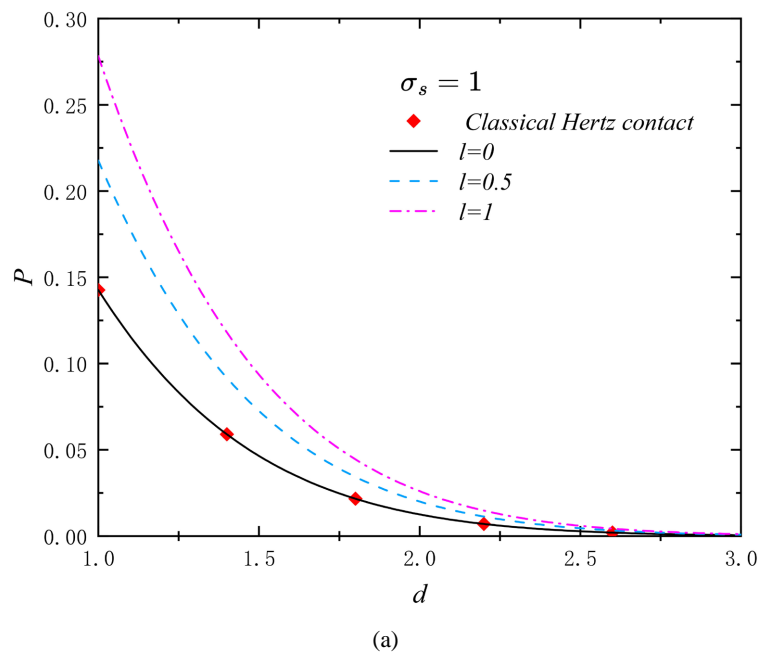


Figure 5. Variation of actual contact area with spacing under different couple stress values
图 5. 不同偶应力值下实际接触面积随间距的变化

在图 6 中, 讨论了 $l=0, 0.5, 1$ 三个值下的接触载荷与分离距离之间的关系。研究发现, 在 $l=0$ 的情况下, 接触载荷随间距的变化与经典弹性解非常吻合, 这验证了我们结果的正确性。从图中发现接触载荷随着间距的减小而增加。同时, 当间距恒定时, 随着 l 的增加接触载荷也增加。与经典弹性模型结果相比, 考虑一致偶应力具有更大的接触载荷。最后, 在 l 和间距 d 恒定时, 与不同粗糙度分布偏差 $\sigma_s=1, 1.5$ 结果相比较, σ_s 越大对应的实际接触面积越大, 这是因为 σ_s 越大, 表面更加粗糙, 在 l 和 d 恒定时表面接触凸起的数量更多导致接触载荷增加。



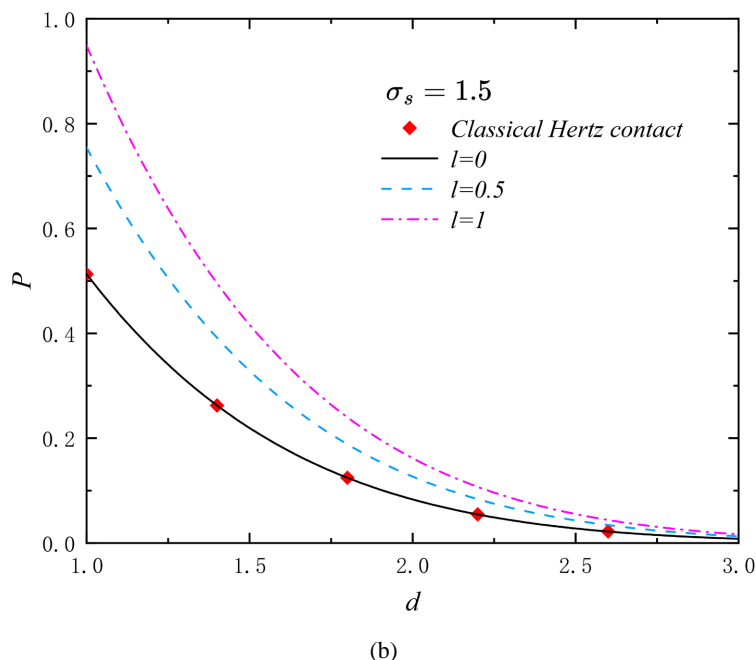


Figure 6. Variation of contact load with spacing under different couple stress values
图 6. 不同偶应力值下接触载荷随间距的变化

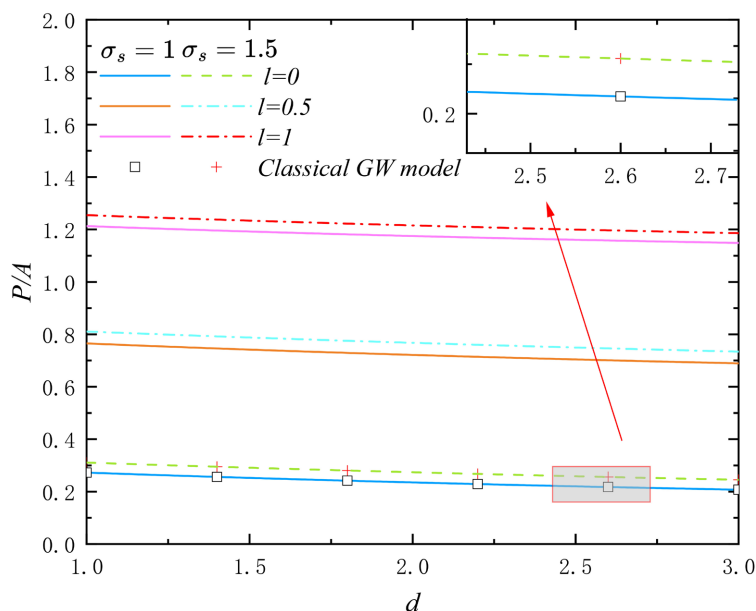


Figure 7. Variation of average contact pressure with spacing under different couple stress values
图 7. 不同偶应力值下平均接触压力随间距的变化

平均接触压力，定义为总载荷与实际接触面积的比值，与粗糙表面的接触有关。在图 7 中，我们讨论了 $l=0, 0.5, 1$ 三个值下的平均接触压力相对于分离距离的变化。同样，在 $l=0$ 的情况下与经典弹性下的解一致。对于给定的分离距离，平均接触压力随着一致偶应力的增加而明显增加，这是由于与传统模型相比，偶应力的引入不仅增加了有效载荷，同时减小了接触面积，如图 5 和图 6 所示。最后，在 l 和粗糙度分布偏差 σ_s 恒定时，平均接触压力随着分离间距的增加而减小。

本文基于 G-W 模型引入了一致偶应力效应, 考虑了在一致偶应力理论框架下粗糙表面的接触, 但由于 G-W 模型特定的简化假设, 对于此模型预测微米级下两粗糙面接触中的载荷 - 面积关系时有一定局限。两粗糙面的接触等价为一个刚性平面与弹性平面接触的过程, 且接触发生在凸体之间大间距的分离下, 保证了凸体之间无相互作用和塑性变形。因此对于考虑凸体接触时相互作用和凸体的塑性变形时, 此模型预测的接触载荷与接触面积之间的关系有误差, 需要对此模型进一步修正和改进。

5. 结论

一致偶应力对粗糙表面接触的影响不应该被忽视, 因为两个粗糙表面之间的接触发生在一些离散的微/纳米级的凸点上, 将导致实际接触面积与载荷发生变化。在本文中, 将单个凸体的接触扩展到整个粗糙表面上, 然后通过 G-W 模型, 建立了考虑一致偶应力下的粗糙表面接触模型。根据研究结果, 对于某一特定的分离距离值, 与经典情况下的 G-W 模型相比, 此模型具有更大的接触载荷和更小的实际接触面积。这两种变化导致更高的平均接触压力。当一致偶应力固定时, 粗糙度越大, 接触载荷和实际接触面积就越大。

基金项目

甘肃省自然科学基金重点项目(25JRRA802)。

参考文献

- [1] Rubinstein, S.M., Cohen, G. and Fineberg, J. (2006) Contact Area Measurements Reveal Loading-History Dependence of Static Friction. *Physical Review Letters*, **96**, Article ID: 256103. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.96.256103>
- [2] Popov, V.L. and Pohrt, R. (2018) Adhesive Wear and Particle Emission: Numerical Approach Based on Asperity-Free Formulation of Rabinowicz Criterion. *Friction*, **6**, 260-273. <https://doi.org/10.1007/s40544-018-0236-4>
- [3] Pérez-Ràfols, F., Larsson, R. and Almqvist, A. (2016) Modelling of Leakage on Metal-To-Metal Seals. *Tribology International*, **94**, 421-427. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2015.10.003>
- [4] Hertz, H. (1881) On the Contact of Elastic Solids. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, **92**, 156-171.
- [5] Greenwood, J.A. and Williamson, J.B.P. (1966) Contact of Nominally Flat Surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, **295**, 300-319. <https://doi.org/10.1098/rspa.1966.0242>
- [6] Persson, B.N.J. (2001) Theory of Rubber Friction and Contact Mechanics. *The Journal of Chemical Physics*, **115**, 3840-3861. <https://doi.org/10.1063/1.1388626>
- [7] Whitehouse, D.J. and Archard, J.F. (1970) The Properties of Random Surfaces of Significance in Their Contact. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, **316**, 97-121. <https://doi.org/10.1098/rspa.1970.0068>
- [8] Nayak, P.R. (1971) Random Process Model of Rough Surfaces. *Journal of Lubrication Technology*, **93**, 398-407. <https://doi.org/10.1115/1.3451608>
- [9] Bush, A.W., Gibson, R.D. and Thomas, T.R. (1975) The Elastic Contact of a Rough Surface. *Wear*, **35**, 87-111. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(75\)90145-3](https://doi.org/10.1016/0043-1648(75)90145-3)
- [10] Greenwood, J.A. (2007) A Note on Nayak's Third Paper. *Wear*, **262**, 225-227. <https://doi.org/10.1016/j.wear.2006.04.011>
- [11] Chang, W.R., Etsion, I. and Bogy, D.B. (1987) An Elastic-Plastic Model for the Contact of Rough Surfaces. *Journal of Tribology*, **109**, 257-263. <https://doi.org/10.1115/1.3261348>
- [12] Majumdar, A. and Bhushan, B. (1991) Fractal Model of Elastic-Plastic Contact between Rough Surfaces. *Journal of Tribology*, **113**, 1-11. <https://doi.org/10.1115/1.2920588>
- [13] Li, C. and Wang, G. (2023) A Modified Greenwood-Williamson Contact Model with Asperity Interactions. *Acta Mechanica*, **234**, 2859-2868. <https://doi.org/10.1007/s00707-023-03538-x>
- [14] Gerberich, W.W., Tymiak, N.I., Grunlan, J.C., Horstemeyer, M.F. and Baskes, M.I. (2002) Interpretations of Indentation Size Effects. *Journal of Applied Mechanics*, **69**, 433-442. <https://doi.org/10.1115/1.1469004>
- [15] Lim, C.W., Li, Z.R. and He, L.H. (2006) Size Dependent, Non-Uniform Elastic Field Inside a Nano-Scale Spherical

-
- Inclusion Due to Interface Stress. *International Journal of Solids and Structures*, **43**, 5055-5065.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.08.007>
- [16] Huang, Z.P. and Sun, L. (2007) Size-Dependent Effective Properties of a Heterogeneous Material with Interface Energy Effect: From Finite Deformation Theory to Infinitesimal Strain Analysis. *Acta Mechanica*, **190**, 151-163.
<https://doi.org/10.1007/s00707-006-0381-0>
- [17] Ru, C.Q. (2009) Size Effect of Dissipative Surface Stress on Quality Factor of Microbeams. *Applied Physics Letters*, **94**, Article ID: 051905. <https://doi.org/10.1063/1.3078816>
- [18] Hadjesfandiari, A.R. and Dargush, G.F. (2011) Couple Stress Theory for Solids. *International Journal of Engineering Science*, **49**, 1317-1324.
- [19] Gourgiotis, P.A., Zisis, T., Giannakopoulos, A.E. and Georgiadis, H.G. (2019) The Hertz Contact Problem in Couple-Stress Elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, **168**, 228-237.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.03.032>