

粘弹性多孔功能梯度纳米梁的非线性振动

贺彦清, 雷东侠, 欧志英*

兰州理工大学理学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2026年4月7日; 录用日期: 2026年4月21日; 发布日期: 2026年6月24日

摘要

针对经典连续介质力学及标准整数阶模型通常忽略的关键尺寸效应和复杂能量耗散机制, 本文提出了一种综合考虑尺寸依赖性的非线性动力学模型。利用该模型研究了热-力耦合作用下功能梯度多孔纳米梁的非线性振动行为, 其中融合了非局部弹性理论和分数阶粘弹性地基模型。基于Hamilton原理推导了粘弹性多孔功能梯度纳米梁的分数阶控制方程, 采用多尺度法解析得到了系统的稳态幅频响应, 并讨论了各参数对纳米梁振动特性的影响。结果表明: 分数阶导数阶次会非单调地调节结构刚度, 在某一特定阶次处振动频率达到最大。此外, 升高的温度和非局部效应会导致结构软化, 从而放大振动幅值, 而非线性地基刚度则提供了强劲的恢复力。

关键词

多孔梯度材料, 粘弹性, 非局部理论, 分数阶Kelvin-Voigt模型

Nonlinear Vibration of Viscoelastic Porous Functionally Graded Nanobeams

Yanqing He, Dongxia Lei, Zhiying Ou*

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu

Received: April 7, 2026; accepted: April 21, 2026; published: June 24, 2026

Abstract

Aiming at the critical size effects and complex energy dissipation mechanisms often ignored by classical continuum mechanics and standard integer-order models, this paper proposes a nonlinear dynamic model that comprehensively considers size-dependent behavior. Using this model, the nonlinear vibration of functionally graded porous nanobeams under thermo-mechanical coupling is investigated, incorporating nonlocal elasticity theory and a fractional-order viscoelastic foundation

*通讯作者。

model. The fractional governing equation of the viscoelastic porous functionally graded nanobeam is derived based on Hamilton's principle. The steady-state amplitude-frequency response of the system is analytically obtained using the method of multiple scales, and the effects of various parameters on the vibration characteristics of the nanobeam are discussed. The results show that the fractional derivative order non-monotonically modulates the structural stiffness, and the vibration frequency reaches a maximum at a specific order. Furthermore, elevated temperature and nonlocal effects induce structural softening, thereby amplifying the vibration amplitude, while the nonlinear foundation stiffness provides a strong restoring force.

Keywords

Porous Functionally Graded Materials, Viscoelasticity, Nonlocal Theory, Fractional Viscoelastic Kelvin-Voigt Model

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,微/纳机电系统(MEMS/NEMS)凭借其超轻质、结构紧凑、高灵敏度以及低能耗等优势,已成为先进工程领域的关键组成部分。在优异的热-力学性能驱动下,纳米结构日益集成于航空航天、精密纳米技术等前沿领域[1]。其中,功能梯度(FG)纳米梁展现出前所未有的设计灵活性:通过呈现空间定制的材料分布,FG纳米梁能够有效缓解界面应力集中,并能耐受严苛的热学与小尺度效应[2]。尽管已有研究广泛探讨了对称与非对称等多种FG材料分布模式[3],但制造过程中引入的孔隙以及恶劣的热运行环境常常损害这些纳米尺度器件的结构完整性。因此,在复杂热-力耦合作用下准确预测其非线性动力学行为,是实现高性能NEMS可靠设计与优化的必要前提。此外,多孔FG复合结构的静动力学行为日益受到关注[4]。对孔隙分布及周围介质影响进行严谨分析,对于开发满足现代工程复杂需求的新型FG材料至关重要[5][6]。Ghazwani等人[7]研究了FGM参数(尤其是幂律指数与孔隙率参数)对非线性共振响应及幅值相关损耗因子的影响。Cui等人[8]探讨了孔隙分布模式、幂律指数、边界条件、分数阶阶次及粘弹性系数对多孔功能梯度(PFG)梁振动特性的影响。

分数阶微积分的引入为刻画先进材料和地基中复杂的粘弹性行为提供了一个更为严谨的数学框架。与经典整数阶模型相比,分数阶模型能够自然地考虑应力和应变的全历程,从而精确表征记忆依赖的力学特性。在粘弹性介质中,应力-应变关系本质上是时间依赖的:应力不仅受当前应变的影响,也取决于过去应变历史的影响。Ansari和Oskouie[9][10]研究了分数阶粘弹性纳米梁的线性和非线性振动,基于Euler-Bernoulli和Timoshenko梁理论,展示了分数阶阶次与粘弹性系数如何控制时域动态响应。Chong等人[11]建立了电-热耦合下的分数阶非局部压电梁模型,揭示了分数阶控制的阻尼机制和非局部参数对系统动态特性的决定作用。Qiu等人[12]提出了融合非局部、偶应力和表面能效应的分数阶粘弹性纳米梁模型,表明分数阶阶次对阻尼及非线性振动响应具有显著影响。

为了在微观/纳米尺度上精确捕捉带或不带孔隙的FG结构的尺寸依赖力学行为,研究人员广泛采用了多种非经典连续介质理论。其中,Eringen的非局部弹性理论(NET)[13]一直是将小尺度效应纳入纳米材料建模的基石。Ke和Wang[14]讨论了非局部理论对压电纳米梁非线性振动特性的影响,分析了非局部参数、温度变化对压电纳米梁尺寸相关非线性振动特性的影响。Zenkour等人[15]基于非局部板理论讨

论了压电型 Kelvin-Voigt 粘弹性纳米片在粘性 Pasternak 介质中的振动特性，分析了不同边界条件下粘弹性压电纳米板的长径比、边厚比、温度变化及湿度浓度对其特征频率的影响。Wang 等人[16]研究了考虑表面弹性理论和非局部理论的分数阶粘弹性压电纳米梁的非线性振动行为，发现：发现当杨氏模量较小时表面效应显著，而增大梁长或施加负电压可提高非线性频率。Gahidiri 等人[17]结合非局部理论，深入研究了热效应与表面效应对旋转 Timoshenko 纳米梁以及置于粘弹性地基上受迫振动纳米梁的影响规律，发现温度变化与残余表面应力会显著推迟非线性跳跃现象的发生。

2. 基础知识

2.1. 分数阶微积分的定义

对于定义在区间 $[a, t]$ 上的连续函数 $f(t)$ ，其 α 阶 ($\alpha > 0$) R-L 分数阶积分定义为：

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1)$$

其中，伽马函数 $\Gamma(z)$ 的基本定义式为：

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, (\text{Re}(z) > 0) \quad (2)$$

目标函数 $f(t)$ 的 R-L 分数阶导数标准定义：

$${}^R D_t^\alpha f(t) = \frac{d^n}{dt^n} [{}_a I_t^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (3)$$

2.2. 功能梯度多孔材料(PFG)分布模型

功能梯度材料(FGMs)通常由两种或两种以上物理性质差异显著的材料(如陶瓷与金属)通过特定的制备工艺复合而成，其内部材料组分沿厚度方向呈现连续的梯度分布。对于多孔 FGM 纳米梁，其在厚度坐标 z 处的等效物理性能 $P(z)$ (包括杨氏弹性模量 E 、质量密度 ρ 、热膨胀系数 α_T 等)可统一表示为完美 FGM 属性与孔隙折减因子的乘积：

$$P(z) = [(P_c - P_m)V_c(z) + P_m](1 - \Psi(z)) \quad (4)$$

式中， P_c 和 P_m 分别代表纯陶瓷和纯金属的对应物理属性常数；对应纯陶瓷相与纯金属相的基准物理常数，方括号内的部分代表理想无孔隙 FG 材料的有效属性； $\Psi(z)$ 则为孔隙率分布函数，满足 $0 \leq \Psi(z) < 1$ ，用以刻画孔隙沿厚度方向的分布特征。给定具体的孔隙分布模式 $\Psi(z)$ 与材料梯度指数 p 代入上式即可得到等效参数 $E(z)$ 、 $\rho(z)$ 和 $\alpha_T(z)$ 的显式表达式。

2.3. 复杂热环境下的温升分布模型

温度的变化会引起材料的自由膨胀或收缩，进而与系统的非局部与表面效应及多孔梯度本构发生显著的热 - 力耦合。设系统的初始环境温度为 T_0 ，为全面研究热载荷对系统非线性动力学行为的调制作用，本文在理论框架中引入了以下三种典型的温升分布模型：

(1) 均匀温升是现有文献中最常采用的理想化热载荷模型。该模型假设纳米梁处于一个处于热平衡的恒温环境中，结构内部的温度梯度为零。此时，沿厚度方向的温升为一个与空间坐标 z 无关的常数：

$$T(z) = T_0 + \Delta T \quad (5)$$

(2) 假设材料的等效热导率(Thermal conductivity)为常数，当纳米梁的顶面(T_c)与底面(T_m)维持稳定

的温度差时，根据一维稳态热传导理论，梁内将形成均匀的温度梯度。此时，温升分布表现为厚度坐标 z 的线性函数：

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right) \quad (6)$$

(3) 更符合工程实际的是，功能梯度多孔材料(PFG)的热导率 $\kappa(z)$ 并非均匀常数，而是沿厚度方向呈现极其复杂的梯度分布。在无内部热源的假设下，结合上下表面的温度边界条件 $T(-h/2) = T_m$ 和 $T(h/2) = T_c$ ，对应的非线性温升模型可精确表达为：

$$T(z) = T_m + (T_c - T_m) \frac{\int_{-h/2}^z \frac{1}{\kappa(\zeta)} d\zeta}{\int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{\kappa(\zeta)} d\zeta} \quad (7)$$

3. 模型的建立和控制方程

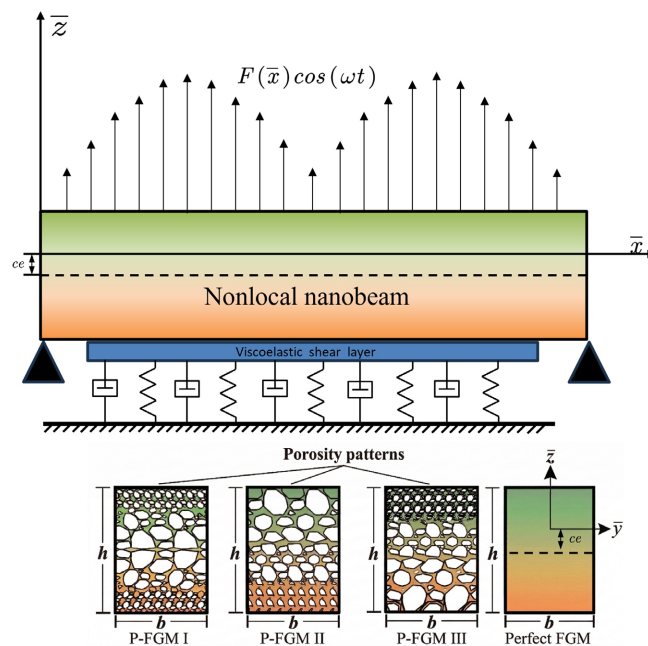


Figure 1. Schematic diagram of viscoelastic PFG nanobeam
图 1. 分数阶粘弹性 PFG 纳米梁的示意图

如图 1 所示，本文考虑一个长度为 L 、厚度为 h 、宽度 b 为的 PFG 纳米梁。假设该纳米梁由陶瓷与金属两种不同组分材料混合而成，设定梁的上表面为纯陶瓷相(如氮化硅 Si_3N_4)，下表面为纯金属相(如不锈钢 SUS304)。各组分体积分数沿厚度方向呈连续的非均匀梯度变化。采用标准幂律分布模型描述材料的空间非均匀性，并考虑到温度相关的材料特性和内部孔隙的存在，FG 纳米梁的等效力学与物理性能被进一步修正如下[18]：

$$\mathcal{P}(\bar{z}_m, T) = (\mathcal{P}_c(T) - \mathcal{P}_m(T)) \frac{\bar{z}_m}{h} + 0.5^p + \mathcal{P}_m(T) [1 - \Psi(\bar{z}_m)], \quad (8)$$

其中， $\mathcal{P}_c(T)$ 和 $\mathcal{P}_m(T)$ 分别为与温度 T 相关的纯陶瓷相(富陶瓷顶层)与纯金属相(富金属底层)的材料物理属性参数。 $p \geq 0$ 为材料梯度指数(Gradient index)，决定了梁厚度方向上陶瓷与金属体积分数的空间演化

剖面。Ψ 沿横向的孔隙率分布模式。为了全面评估内部孔隙缺陷对结构动力学特性的影响，本研究考虑了三种不同的孔隙率分布模式：

$$\begin{aligned}
 \text{Type 1: } \Psi(\bar{z}_m) &= \xi \cos\left(\pi\left(\frac{\bar{z}_m}{h}\right)\right), \\
 \text{Type 2: } \Psi(\bar{z}_m) &= \xi \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\bar{z}_m}{h} - \frac{1}{2}\right)\right), \\
 \text{Type 3: } \Psi(\bar{z}_m) &= \xi \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{\bar{z}_m}{h} + \frac{1}{2}\right)\right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

其中，ξ 表示最大孔隙体积分数。值得注意的是，前面的有效材料属性以几何中心(z_m)作为参考。然而，由于功能梯度材料沿厚度方向的非对称梯度分布，结构的几何中面不再与其真实的物理中性轴重合，因此需引入弹性中心。弹性中心与几何中心的关系可表示为[19]：

$$\bar{z} = \bar{z}_m + ce, ce = \frac{\int_{-h/2}^{h/2} \bar{z}_m E(\bar{z}_m, T) d\bar{z}_m}{\int_{-h/2}^{h/2} E(\bar{z}_m, T) d\bar{z}_m}, \tag{10}$$

其中，ce 为弹性中心相对于几何中心的偏移量。为了准确描述组分材料物性的温度依赖特征，本章采用如下非线性热弹性多项式模型[20]表征给定环境温度 T 下的有效物理属性：

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \left(\mathcal{P}_{-1} T^{-1} + \mathcal{P}_1 T + \mathcal{P}_2 T^2 + \mathcal{P}_3 T^3 + 1 \right), \tag{11}$$

其中，P₀ 代表材料在室温下的初始参考物理属性；而 P₋₁，P₁，P₂ 和 P₃ 是特定的温度相关经验系数。本章所选用的陶瓷相(Si₃N₄)和金属相(SUS304)所对应的经验系数取值详见表 1。

Table 1. Temperature-dependent coefficients of constituent materials Si₃N₄ and SUS304 [20]

表 1. 组分材料 Si₃N₄ 与 SUS304 的温度依赖系数[20]

材料	属性	P ₀	P ₋₁	P ₁	P ₂	P ₃
Si ₃ N ₄	E(Pa)	3.4843e11	0	-3.070e-4	2.160e-7	-8.946e-11
	α _T (K ⁻¹)	5.8723e-6	0	9.095e-4	0	0
	ρ(kg/m ³)	2370	0	0	0	0
SUS 304	E(Pa)	2.0104e11	0	3.079e-4	-6.534e-7	0
	α _T (K ⁻¹)	1.233e-7	0	8.086e-4	0	0
	ρ(kg/m ³)	8166	0	0	0	0

3.1. 控制方程的推导

基于 Euler-Bernoulli 梁理论，考虑大振幅振动下的 von Kármán 几何非线性，应变与位移的关系可以表示为[12]：

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial \bar{x}} \right)^2 = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \bar{z} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2, \\
 \varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

其中，ε_{xx} 为轴向正应变，ū 为中性面的轴向位移，w̄ 为横向挠度。在分数阶 Kelvin-Voigt 粘弹性本构框架[11]下，可以得到：

$$\sigma_{xx} = E(z, T) \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha} \right) \varepsilon_{xx}, \quad (13)$$

$$N_{xx} = \int_A \sigma_{xx} dA = E_{11} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha} \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right)^2 \right), \quad (14)$$

$$M_{xx} = \int_A z \sigma_{xx} dA = -E_{33} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha} \right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \quad (15)$$

其中, 截面刚度系数 $\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$ 由以下积分定义:

$$\{E_{11}, E_{22}, E_{33}\} = b \int_{\frac{h}{2} - ce}^{\frac{h}{2} + ce} E(z, T) \{1, z, z^2\} dz. \quad (16)$$

3.2. 控制方程

考虑孔隙率和热力耦合效应, 分数阶粘弹性 PFG 纳米梁的应变能的一阶变分为:

$$\delta U = \int_0^L N_{xx} \left[\frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \right] - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} d\bar{x}. \quad (17)$$

忽略高阶旋转惯性项后, 动能的变分可简化为:

$$\delta K = \int_0^L m_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \delta \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{t}} \right) d\bar{x}. \quad (18)$$

其中

$$m_0 = b \int_{\frac{h}{2} - ce}^{\frac{h}{2} + ce} \rho(z, T) dz$$

在外部施加的横向简谐分布力与非均匀热载荷的共同作用下, 嵌入非线性 Winkler-Pasternak 弹性地基中的 PFG 纳米梁(见图 1)的外部虚功变分可表示为:

$$\delta W^{ext} = \int_0^L \bar{q} \delta \bar{w} + \bar{N}_t \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) \left(\frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + F(\bar{x}) \cos(\omega \bar{t}) \delta \bar{w} d\bar{x}. \quad (19)$$

其中, \bar{q} 为非线性弹性地基的反作用力, \bar{N}_t 为由温度变化引起的感应热轴向力[18], 其具体表达式分别为:

$$\bar{q} = - \left(\bar{K}_w \bar{w} - \bar{K}_p \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_{nl} \bar{w}^3 \right), \quad (20)$$

$$\bar{N}_t = b \int_{\frac{h}{2} - ce}^{\frac{h}{2} + ce} E(z, T) \alpha(z, T) \Delta T dz, \quad (21)$$

利用哈密顿原理推导分数阶粘弹性纳米梁的控制微分方程:

$$\int_0^{\bar{t}} (\delta K - \delta U + \delta W^{ext}) d\bar{t} = 0. \quad (22)$$

因此可得 PFG 纳米梁在热 - 力耦合环境下的非线性运动方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} N_{xx} - m_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{t}^2} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(N_{xx} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{q} - \bar{N}_t \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + F(\bar{x}) \cos(\omega \bar{t}) - m_0 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

为了捕捉微纳结构中的长程相互作用与小尺度效应，引入 Eringen 非局部弹性理论(NET)的微分等效模型[13]。结合前文的粘弹性设定，非局部 - 分数阶粘弹性本构关系可统一表示为：

$$\left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \sigma_{xx} = E(\bar{z}, T) \varepsilon_{xx}, \tag{24}$$

其中， $e_0 a$ 为非局部参数。将上述非局部本构关系沿横截面面积积分，可得非局部应力与局部应力之间的关系如下：

$$N_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial \bar{x}^2} = E_{11} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha}\right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2\right), \tag{25}$$

$$M_{xx} - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial \bar{x}^2} = -E_{33} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}. \tag{26}$$

忽略轴向惯性后，推导出置于非线性 Winkler-Pasternak 地基上的 PFG 纳米梁在热 - 力耦合环境下的非线性偏微分控制方程：

$$\begin{aligned} & m_0 \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{K}_w \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \bar{w} \\ & - \bar{K}_p \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \bar{K}_{nl} \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \bar{w}^3 \\ & + \bar{N}_t \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + E_{33} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha}\right) \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} \\ & - \frac{E_{11}}{2L} \left(1 + \bar{g} \frac{\partial^\alpha}{\partial \bar{t}^\alpha}\right) \int_0^L \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\right)^2 d\bar{x} \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \\ & = \left(1 - (e_0 a)^2 \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2}\right) F(\bar{x}) \cos(\omega \bar{t}). \end{aligned} \tag{27}$$

为便于参数分析，引入以下无量纲量：

$$\begin{aligned} x &= \frac{\bar{x}}{L}, w = \frac{\bar{w}}{r}, r = \sqrt{\frac{I}{A}}, I = \frac{bh^3}{12}, \gamma = \frac{e_0 a}{L}, K_w = \frac{\bar{K}_w L^4}{E_c I}, K_p = \frac{\bar{K}_p L^2}{E_c I}, \\ K_{nl} &= \frac{\bar{K}_{nl} L^4}{E_c A}, \bar{F}(x) = \frac{F(\bar{x}) L^4}{E_c I r}, Q = \frac{E_{33}}{E_c I}, P = \frac{E_{11}}{2E_c A}, N_t = \frac{\bar{N}_t L^2}{E_c I}, \\ O &= L^2 \sqrt{\frac{m_0}{E_c I}}, t = \frac{\bar{t}}{O}, g = \frac{\bar{g}}{O^\alpha}, \Omega = \omega O. \end{aligned}$$

将上述无量纲参数代入控制方程，可得最终的无量纲非线性控制方程：

$$\begin{aligned} & Q \left(1 + g \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_w \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w \\ & - K_p \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{nl} \left[w^3 - \gamma^2 \left(6w \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 3w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \right] \\ & + N_t \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P \left(1 + g \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}\right) \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & = \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \bar{F} \cos(\Omega t). \end{aligned} \tag{28}$$

3.3. 问题求解

为了推导系统的近似解析解并获取主共振状态下的稳态幅频响应，在无量纲控制方程中引入了外部简谐激励与速度比例阻尼项，建立能够表征非线性共振区内幅频跳跃与调制现象的理论框架。计入阻尼后的系统控制方程改写为：

$$\begin{aligned}
 & Q \left(1 + g \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + K_w \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w \\
 & - K_p \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_{nl} \left[w^3 - \gamma^2 \left(6w \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 3w^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] \\
 & + N_t \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - P \left(1 + g \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \right) \int_0^1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & = \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \bar{F} \cos(\Omega t) - 2\bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial t}.
 \end{aligned} \tag{29}$$

多尺度法将非线性偏微分方程系统性地转化为一系列可递推求解的线性边值问题。具体而言，采用 Nayfeh 的渐近展开框架[21]来求解控制方程，并引入如下尺度参数：

$$\bar{\mu} = \epsilon\mu, \bar{F} = \epsilon^{3/2}F, \tag{30}$$

其中 ϵ 为无量纲小参数，物理上表征特征挠度与纳米梁厚度之比，在摄动展开中作为记账参数。将系统的横向位移场按一阶近似展开：

$$w(x, t; \epsilon) = \sqrt{\epsilon}w_0(x, T_0, T_1) + \epsilon\sqrt{\epsilon}w_1(x, T_0, T_1), \tag{31}$$

为准确追踪系统动态响应中的快慢演化特征，定义独立的时间尺度[22]：

$$T_0 = t, T_1 = \epsilon t, \tag{32}$$

其中 $T_n = \epsilon^n t (n = 0, 1)$ 代表不同的时间尺度。相应地，时间微分算子展开为[22]：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} = D_0 + \epsilon D_1, \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= (D_0 + \epsilon D_1)^2 = D_0^2 + 2\epsilon D_0 D_1 + \epsilon^2 D_1^2, \\
 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} &= (D_0 + \epsilon D_1)^\alpha = D_+^\alpha + \epsilon \alpha D_+^{\alpha-1} D_1 + O(\epsilon^2),
 \end{aligned} \tag{33}$$

其中， $D_n = \partial/\partial T_n, n = 0, 1, 2, \dots$ 表示定义在不同时间尺度上的偏微分算子。

将渐近展开式(31)和时间微分算子(33)代入计入阻尼后的无量纲控制方程(29)，并按 ϵ 的同次幂分离方程，可推导出各阶摄动方程如下：

零阶方程 (ϵ^0 阶)：

$$\begin{aligned}
 & Q(1 + gD_+^\alpha) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + K_w \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) w_0 - K_p \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 & + \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) D_0^2 w_0 + N_t \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0,
 \end{aligned} \tag{34}$$

一阶方程 (ϵ^1 阶)：

$$\begin{aligned}
 & Q(1+gD_+^\alpha)\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + Q\alpha gD_+^{\alpha-1}D_1\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + K_w\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_1 \\
 & - K_p\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + K_{nl}\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)w_0^3 + \left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D_0^2w_1 \\
 & + 2\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D_0D_1w_0 - P(1+gD_+^\alpha)\int_0^l\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 dx\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 & + N_t\left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \left(1-\gamma^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)F\cos(\Omega t) - 2\mu D_0w_0.
 \end{aligned} \tag{35}$$

3.3.1. 线性问题

零阶方程描述了系统的线性动态响应。基于标准波动力学解析方法，假设零阶方程的线性波传播解形式为：

$$w_0 = A(T_1)e^{i(\omega T_0 - kx)}, \tag{36}$$

其中 ω 表示系统的线性固有频率； k 为空间波数； $A(T_1)$ 表示受慢时间尺度 T_1 调制的复振幅。将该解析解代入线性控制方程式(34)中，即可提取出系统的特征色散关系：

$$\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)k^4 + \left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right)k^2 + K_w - \omega^2 = 0, \tag{37}$$

式中， $K_1 = (Q + K_p\gamma^2 - N_t\gamma^2)$ ， $K_2 = (\gamma^2K_w + K_p - N_t)$ 。方程(34)关于波数 k 的四个特征根可精确表示为 $k = \pm k_f$ 与 $k = \pm ik_e$ ，其中

$$\begin{aligned}
 k_f &= \sqrt{\frac{-\left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right) + \sqrt{\left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right)^2 - 4\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)\left(K_w - \omega^2\right)}}{2\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)}} \\
 k_e &= \sqrt{\frac{\left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right) + \sqrt{\left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right)^2 - 4\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)\left(K_w - \omega^2\right)}}{2\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)}}
 \end{aligned} \tag{38}$$

因此，完整的波动解可以写成：

$$w_0 = Y(x)e^{-i\omega t} \tag{39}$$

其中空间振型函数表示为如下叠加形式：

$$Y(x) = C_1e^{-ik_f x} + C_2e^{ik_f x} + C_3e^{-k_e x} + C_4e^{k_e x} \tag{40}$$

施加简支边界条件可得到，可得系统的离散频率谱方程：

$$\left(Qg(i\omega)^\alpha + K_1\right)(n\pi)^4 + \left(K_2 - \gamma^2\omega^2\right)(n\pi)^2 + K_w - \omega^2 = 0 \tag{41}$$

3.3.2. 非线性问题

为了求解一阶控制方程(35)，假设其具有如下复数形式的未扰动试探解：

$$w_0 = Y(x)\left[A(T_1)e^{i\omega T_0} + \bar{A}(T_1)e^{-i\omega T_0}\right] \tag{42}$$

式中， $A(T_1)$ 表示受慢时间尺度 T_1 调制的未知复振幅函数， $\bar{A}(T_1)$ 为其复共轭。本文专门针对主共振工况展开分析，即外部简谐激励频率 Ω 接近系统线性基频 ω 时所激发的非线性共振响应。为量化频率接近程

度，引入无量纲失谐参数 σ ：

$$\Omega = \omega + \epsilon\sigma \tag{43}$$

其中， $\epsilon\sigma$ 表征激励频率与固有频率之间的微小失配。为了建立消除久期项的可解性条件，将一阶修正项设为如下形式，以显式分离导致响应发散的久期分量与非久期分量[14]：

$$w_1(x, T_0, T_1) = \phi(x, T_1)e^{i\omega T_0} + cc + W(x, T_0, T_1) \tag{44}$$

其中 cc 代表前项的复共轭， $W(x, T_0, T_1)$ 表示非久期项相关的特解。将零阶解(42)、失谐关系(43)与一阶修正形式(44)代入(35)，可得关于空间修正函数 ϕ 的控制方程：

$$\begin{aligned} & \left(K_1 + Qg(i\omega)^\alpha \right) \phi^{(4)} + (\gamma^2 \omega^2 - K_2) \phi'' + (K_w - \omega^2) \phi \\ & = -Qg\alpha Y^{(4)}(i\omega)^{\alpha-1} D_1 A - K_{nl} \left[3A^2 \bar{A} Y^3 - 18\gamma^2 A^2 \bar{A} Y (Y')^2 - 9\gamma^2 A^2 \bar{A} Y^2 Y'' \right] \\ & \quad - 2(Y - \gamma^2 Y'')(i\omega) D_1 A + 3P \left(\int_0^1 (Y')^2 dx \right) (Y'' - \gamma^2 Y^{(4)}) (1 + g(i\omega)^\alpha) A^2 \bar{A} \\ & \quad + \left(1 - \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{F}{2} e^{i\sigma T_1} - 2\mu(i\omega) AY \end{aligned} \tag{45}$$

其中 $D_1 A$ 表示复振幅 A 对变量 T_1 的慢时间导数。将方程右侧乘以模态函数 $Y(x)$ ，并在无量纲区间 $[0,1]$ 上积分，可得系统幅频演化的久期方程：

$$\begin{aligned} & Qg\alpha z_2 (i\omega)^{\alpha-1} D_1 A + 2(1 + r^2 z_1)(i\omega) D_1 A + 3K_{nl} z_3 A^2 \bar{A} \\ & + 3Pz_1 (z_1 + \gamma^2 z_2) (1 + g(i\omega)^\alpha) A^2 \bar{A} - \frac{f}{2} e^{i\sigma T_1} + 2\mu(i\omega) A = 0 \end{aligned} \tag{46}$$

其中积分常数定义如下：

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y^2 dx &= 1, \int_0^1 Y'^2 dx = z_1, \int_0^1 Y''^2 dx = z_2, F \int_0^1 Y - \gamma^2 Y'' dx = f, \\ \int_0^1 Y^4 dx - 6\gamma^2 \int_0^1 Y^2 Y'^2 dx - 3\gamma^2 \int_0^1 Y^3 Y'' dx &= z_3 \end{aligned}$$

复振幅 A 可采用极坐标形式表示为实值振幅与相位调制函数的组合：

$$A = \frac{1}{2} a(T_1) e^{i\lambda(T_1)} = \frac{1}{2} a(T_1) (\cos \lambda(T_1) + i \sin \lambda(T_1)) \tag{47}$$

其中 $a(T_1)$ 为慢变振幅， $\lambda(T_1)$ 表示由非线性效应引起的相位漂移。将极坐标分解代入久期方程(46)，并分离实部和虚部，可得描述振幅 - 相位演化的两个耦合方程：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} Qg\alpha z_2 \omega^{\alpha-1} a' \left(\cos \lambda \sin \frac{\alpha\pi}{2} + \sin \lambda \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} Qg\alpha z_2 \omega^{\alpha-1} a \lambda' \left(\cos \frac{\alpha\pi}{2} \cos \lambda - \sin \lambda \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\ & + \frac{3}{8} K_{nl} z_3 \cos \lambda a^3 + \frac{3}{8} P a^3 (z_1^2 + \gamma^2 z_1 z_2) \cos \lambda \\ & + \frac{3}{8} P a^3 (z_1^2 + \gamma^2 z_1 z_2) \left[g \omega^\alpha \left(\cos \lambda \cos \frac{\alpha\pi}{2} - \sin \frac{\alpha\pi}{2} \sin \lambda \right) \right] \\ & - (1 + \gamma^2 z_1) \omega (a' \sin \lambda + a \lambda' \cos \lambda) - \frac{f}{2} \cos \sigma T_1 - \mu \omega a \sin \lambda = 0 \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1}a' \left(\sin \lambda \sin \frac{\alpha\pi}{2} - \cos \lambda \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) \\
 & + \frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1}a\lambda' \left(\sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \lambda + \sin \lambda \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right) + \frac{3}{8}K_{nl}z_3 \sin \lambda a^3 \\
 & + \frac{3}{8}Pa^3(z_1^2 + \gamma^2 z_1 z_2) \left[\sin \lambda + g\omega^\alpha \left(\sin \lambda \cos \frac{\alpha\pi}{2} + \sin \frac{\alpha\pi}{2} \cos \lambda \right) \right] \\
 & + Q(1 + \gamma^2 z_1)\omega(a' \cos \lambda - a\lambda' \sin \lambda) - \frac{f}{2} \sin \sigma T_1 + \mu\omega a \cos \lambda = 0
 \end{aligned} \tag{49}$$

为消除相位依赖性并导出幅频关系，经过一些简单的代数变换可得到：

$$A_1 a' + B_1 a \lambda' + C_1 a^3 + \mu\omega a = D \sin(\sigma T_1 - \lambda) \tag{50}$$

$$A_2 a' + B_2 a \lambda' + C_2 a^3 = D \cos(\sigma T_1 - \lambda), \tag{51}$$

其中

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \left[(1 + \gamma^2 z_1)\omega - \frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} \right], B_1 = \left[\frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2} \right], \\
 C_1 &= \frac{3}{8}P(z_1^2 + \gamma^2 z_1 z_2)g\omega^\alpha \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right), D = \frac{f}{2} \\
 A_2 &= \frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1} \sin \frac{\alpha\pi}{2}, B_2 = \frac{1}{2}Qg\alpha z_2\omega^{\alpha-1} \cos \frac{\alpha\pi}{2} - (1 + \gamma^2 z_1)\omega, \\
 C_2 &= \frac{3}{8}K_{nl}z_3 + \frac{3}{8}P(z_1^2 + \gamma^2 z_1 z_2) \left(1 + g\omega^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

上述方程中包含一个相位角，该相位角通过以下关系定义： $\lambda = \sigma T_1 - \theta$ 。其中 σ 表示频率失谐参数， θ 对应系统动力学引起的静态相位偏移。为求稳态周期响应，令 $a' = 0$ 和 $\theta' = 0$ ，消去 θ 后，即得频率响应方程：

$$(B_1 a \sigma + C_1 a^3 + \mu\omega a)^2 + (B_2 a \sigma + C_2 a^3)^2 = D^2 \tag{52}$$

4. 数值模拟

本节对分数阶粘弹性 PFG 纳米梁的非线性动力学特性进行系统的参数化数值研究。该复合纳米梁由氮化硅(Si₃N₄)陶瓷相和不锈钢(SUS304)金属相组成。材料的温度相关属性采用表 1 中列出的多项式经验系数进行评估。

图 2 展示了由 SUS304 和 Si₃N₄ 组成的多孔功能梯度纳米梁沿厚度方向(E/E_c)的无量纲有效杨氏模量(\bar{z}_m/h)的变化。其中，图 2(a)~(c)分别对应于三种截然不同的孔隙率分布模式：Type 1、Type 2 和 Type 3。图中详细绘制了在不同材料梯度指数($p = 1, 2, 10$)和孔隙体积分数($\xi = 0, 0.5$)下的模量变化曲线。如图所示，梯度指数的增加使有效性能向金属相的性能偏移。更重要的是，与理想的功能梯度梁($\xi = 0$ ，实线)相比，内部微孔隙的引入($\xi = 0.5$ ，虚线)显著降低了整个厚度方向上的有效杨氏模量。

图 3 展示了不同热环境(即 $\Delta T = 0 \text{ K}, 100 \text{ K}, 200 \text{ K}$)以及不同温度演化模式(UTR, LTR, NLTR)对 PFG 纳米梁非线性动力学特性的影响。图 3(b)给出了系统的幅值 - 非线性频率关系曲线。该曲线表明，随着振动幅值增大，系统非线性固有频率持续升高，呈现典型的硬化非线性特征；而温度增量 ΔT 的升高则使该曲线显著向左频移。图 3(a)展示了相应的幅频响应曲线，可见温度升高导致结构刚度降低，使系统在相同激励下达到更大的稳态共振振幅。值得注意的是，在相同的最大温度增量(200 K)下，均匀温升

(UTR)模型产生的振动振幅最大，非线性频率偏移最显著，这源于 UTR 条件下整个横截面承受最大的温度变化，从而产生最强烈的等效热压缩应力与结构软化效应。

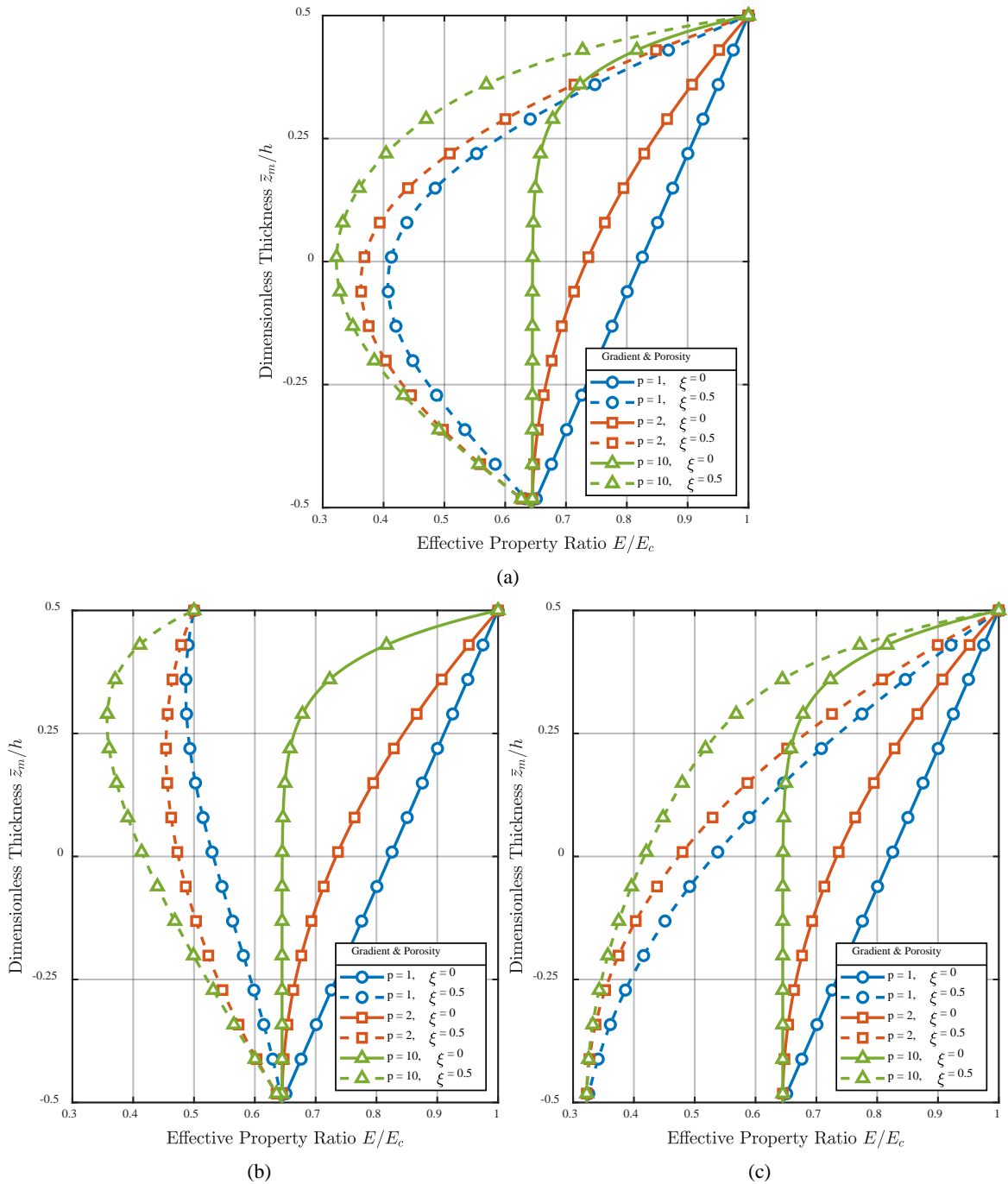


Figure 2. Through-thickness variation of the dimensionless effective Young's modulus of PFG nanobeams under different porosity distribution patterns

图 2. 不同孔隙分布模式下 PFG 纳米梁的无量纲有效杨氏模量沿厚度方向的变化

图 4 详细研究了在 $\Delta T = 100\text{ K}$ 非线性温升(NLTR)环境下，不同地基参数对纳米梁非线性动力学行为的调制效应。由幅值 - 非线性频率关系曲线(图 4(b))可见，增加线性地基参数 (K_p 和 K_w) 增强了系统等

效刚度，导致线性固有频率随之升高。相应地，稳态幅频响应曲线图 4(a)表明，刚度增强有效限制了结构的振动变形，使共振峰幅值逐渐减小。此外，引入非线性地基参数(K_{nl})后，在幅值趋于零时， $K_{nl}=0$ 和 $K_{nl}=200$ 下的线性频率完全相同，说明 K_{nl} 不会改变系统的初始线性刚度。然而，随着振动幅值的不断增加，较高的 K_{nl} 会激发更强的硬化非线性行为，使幅频响应曲线与幅值 - 非线性频率关系曲线均呈现更显著的右弯。

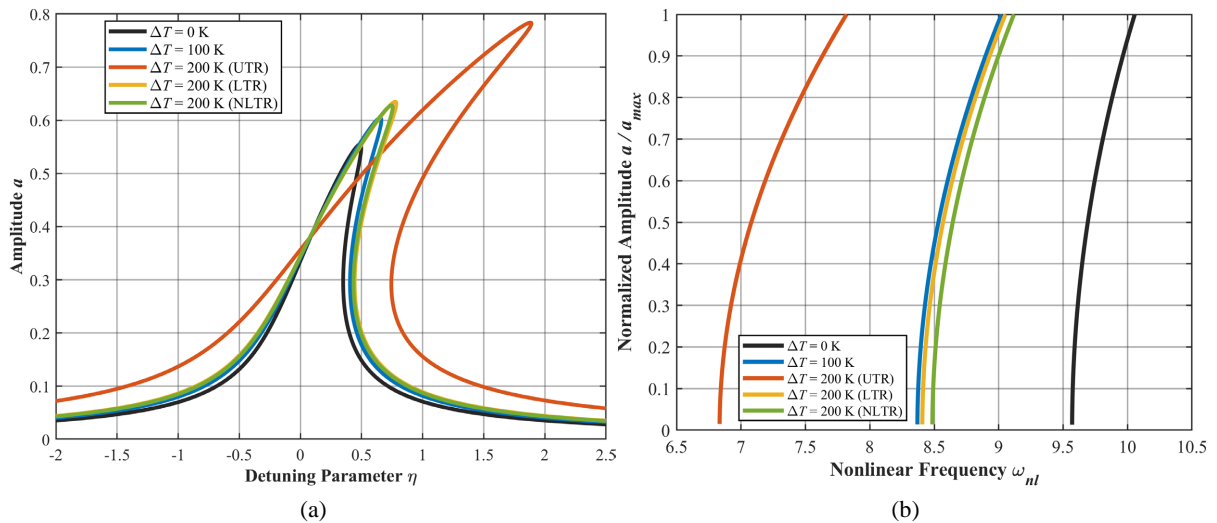


Figure 3. Nonlinear dynamic response of PFG nanobeams under different temperature increments and thermal distribution types (UTR, LTR, NLTR): (a) frequency-response curves; (b) amplitude-nonlinear frequency relationship curves

图 3. PFG 纳米梁在不同温度增量和热分布类型(UTR, LTR, NLTR)下的非线性动力学响应: (a) 频率响应曲线; (b) 幅值 - 非线性频率关系曲线

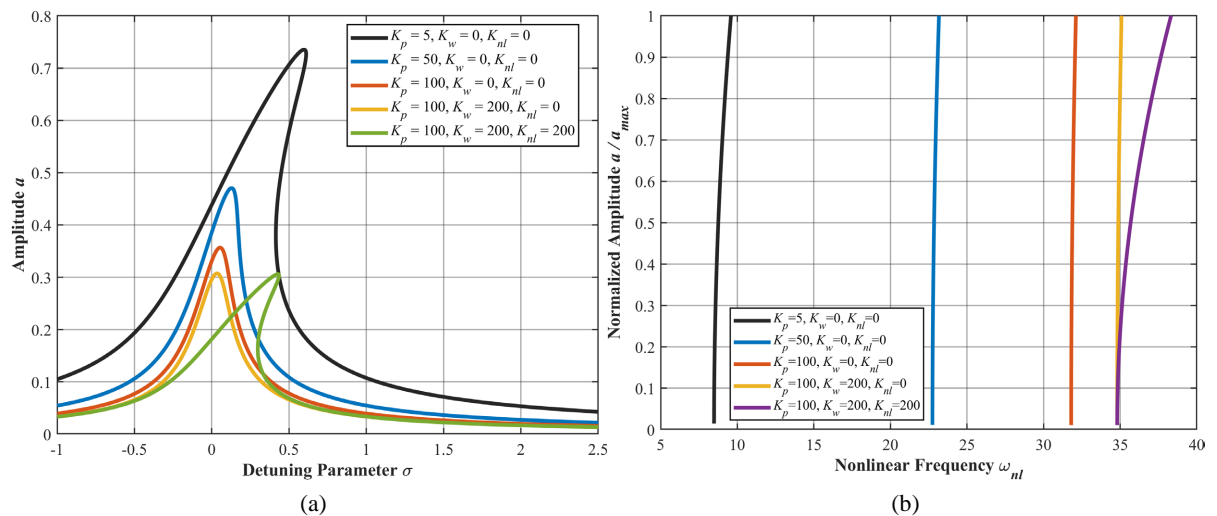


Figure 4. Nonlinear dynamic response of PFG nanobeams under different foundation parameters (K_p, K_w and K_{nl}): (a) steady-state amplitude-frequency response curves; (b) amplitude-nonlinear frequency relationship curves

图 4. PFG 纳米梁在不同地基参数(K_p, K_w 和 K_{nl})下的非线性动力学响应: (a) 稳态幅频响应曲线; (b) 幅值 - 非线性频率关系曲线

图 5 阐明了不同孔隙分布模式对纳米梁动力学行为的影响。幅值 - 非线性频率关系曲线图 5(b)可见，无孔隙的理想功能梯度梁(Perfect FG beam)由于其未受损的抗弯刚度，因此具有最高的线性固有

频率。相比之下，Type 3 孔隙分布产生的固有频率最低。该分布模式将微孔隙大量集中于梁的底部金属相(SUS304)区域，从而最大程度地削弱了结构的整体等效抗弯刚度。图 5(a)的稳态幅频响应曲线印证了这一现象：由于 Type 3 梁结构等效刚度最小，在相同外部激励下自然激发出最高的稳态共振峰值幅值。

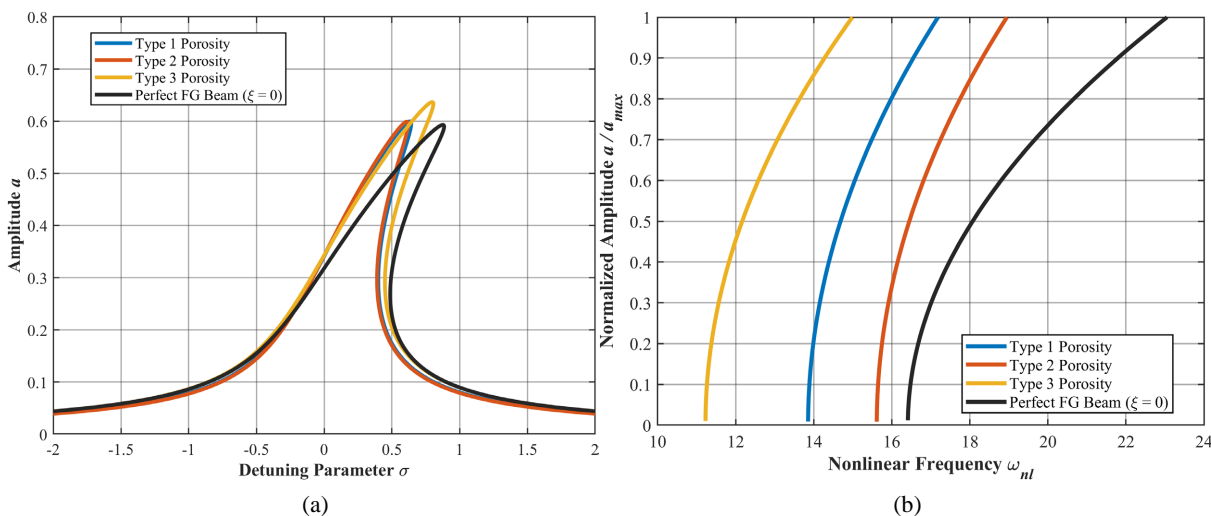


Figure 5. Nonlinear dynamic response of PFG nanobeams under different porosity distribution patterns: (a) steady-state amplitude-frequency response curves; (b) amplitude-nonlinear frequency relationship curves

图 5. PFG 纳米梁在不同孔隙分布模式下的非线性动力学响应：(a) 稳态幅频响应曲线；(b) 幅值 - 非线性频率关系曲线

图 6(a)表明，增大分数阶参数 α 可有效抑制系统的共振振幅。由图 6(b)中的幅值 - 非线性频率关系曲线所示，共振频率的大小遵循着 $\alpha = 0.95 \rightarrow 0.1 \rightarrow 0.3 \rightarrow 0.61$ 的独特序列，说明等效刚度在中间阶次达到最大值，而非边界处。这一非传统现象的物理根源在于分数阶导数算子的“双重角色”。由线性固有频率的特征方程(41)可知，系统的等效储能模量主要受控于项 $g\omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2)$ ，这引发了幂律频率放大项 ω^α 与三角相位调制项 $\cos(\alpha\pi/2)$ 之间的竞争。对于 $\omega > 1$ ，随着 α 增大， ω^α 指数级增长，而 $\cos(\alpha\pi/2)$ 快速衰减。为解释 $\alpha_{opt} \approx 0.61$ 处出现的峰值，定义有效刚度函数 $f(\alpha) = \omega^\alpha \cos(\alpha\pi/2)$ ，并令其对 α 的一阶导数为零，导出超越方程： $\tan(\alpha_{opt}\pi/2) = 2\ln(\omega)/\pi$ ，将当前纳米梁的基频 ($\omega \approx 9.63$) 代入，计算得 $\alpha_{opt} \approx 0.614$ ，与数值结果 0.61 高度吻合。这证实了最优刚化机制是高频分数阶系统的固有特性：频率升高带来的刚度放大效应超过了粘性引起的刚度损失。这一非单调调制规律与 Duan 等人[20]的结论一致，该研究指出，当 $\omega > 1$ ，分数阶导数项的等效刚度贡献因子随阶次 α 的增大呈先增后减的变化趋势。

前文通过频率响应曲线系统分析了系统的稳态特性，但纳米梁的连续动态演化过程尚需进一步探讨。为此，给出瞬态时程位移响应，以揭示系统的瞬态行为并验证多尺度法解析解的准确性。图 7(a)描绘了在不同热环境条件下 PFG 纳米梁的时程位移响应(细线)及其动态包络线(粗实线)。局部放大插图 $t \in [0, 2.5]$ 展示了早期的瞬态振荡特征。从包络线可见，环境温度升高显著放大了系统的稳态振动幅值。其物理机制在于：热诱导产生的压缩轴力削弱了结构的等效抗弯刚度。图 7(b)进一步展示了在不同地基刚度参数 (K_p, K_w 和 K_{nl}) 下的时程响应及其包络线。随着地基刚度的依次增加，系统获得了更强的弹性恢复力，从而显著抑制了稳态共振幅值。此外，局部放大插图 $t \in [0, 1.5]$ 明确揭示了：增强的系统刚度不仅显著提高了结构的振荡频率，而且在初始阶段立即限制了瞬态位移的过度增长。

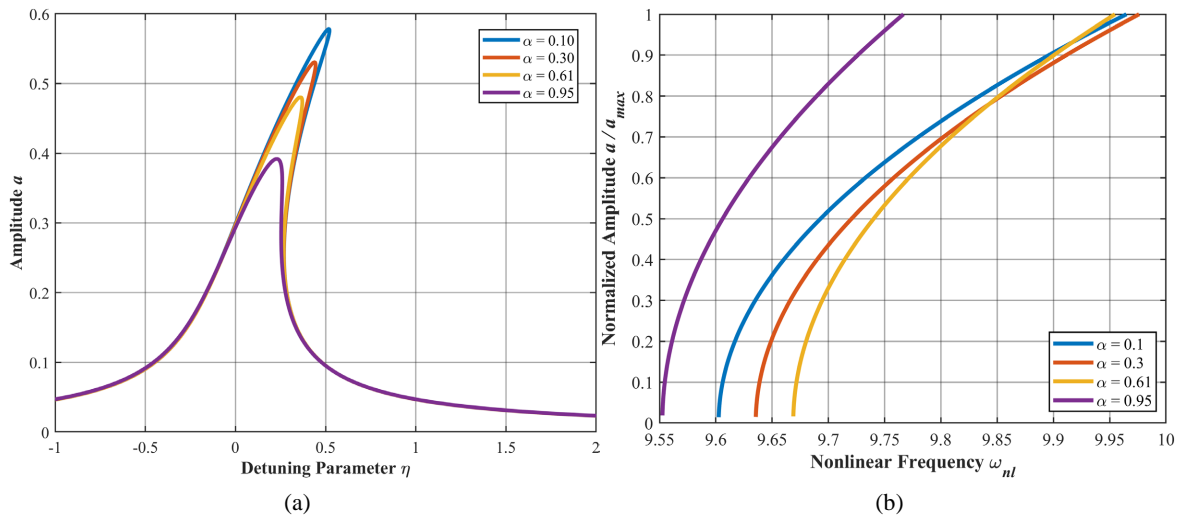


Figure 6. Nonlinear dynamic response of PFG nanobeams under different fractional-order parameters α : (a) steady-state frequency response curves; (b) amplitude-nonlinear frequency relationship curves

图 6. PFG 纳米梁在不同分数阶参数 α 下的非线性动力学响应: (a) 稳态频率响应曲线; (b) 幅值 - 非线性频率关系曲线

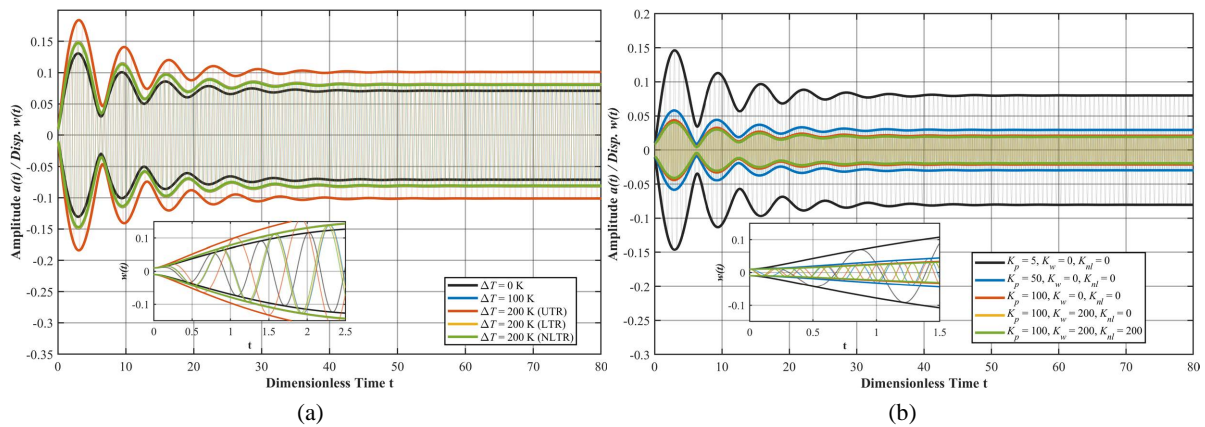


Figure 7. Transient time-history displacement and its dynamic envelope of PFG nanobeams: (a) different temperatures and temperature rise models; (b) different foundation stiffness parameters

图 7. PFG 纳米梁的瞬态时程位移及其动态包络线: (a) 不同温度以及温升模型; (b) 不同地基刚度参数

5. 结论

本研究揭示了微孔隙分布、热环境、分数阶粘弹性地基与非线性刚度在功能梯度纳米梁中的耦合效应，发现了忽略任一因素则无法观测的新现象：孔隙集中于金属侧(Type 3)与温升协同引发强软化，导致共振振幅极度放大；分数阶参数 α 因频率放大与相位调制的竞争而使等效刚度在 $\alpha \approx 0.61$ 处非单调达到峰值；线性地基与热软化在全幅值范围竞争，而非线性地基仅在高振幅下引入硬化，形成可被动调控的硬化 - 软化转换。瞬态分析进一步验证：地基增刚在振动初始即抑制位移过度增长，而温升放大了稳态包络振幅。由此提出设计启示——通过调配孔隙分布模式、将粘弹性参数锁定在最优 α 区间，以及组合使用线性/非线性地基，可在 NEMS/MEMS 中实现频率与振幅的被动调谐和限幅，为多场耦合器件的稳健设计提供理论依据。

基金项目

甘肃省自然科学基金重点项目(25JRRA802)。

参考文献

- [1] Ekinci, K.L. and Roukes, M.L. (2005) Nanoelectromechanical Systems. *Review of Scientific Instruments*, **76**, Article 061101. <https://doi.org/10.1063/1.1927327>
- [2] Gayen, D., Tiwari, R. and Chakraborty, D. (2019) Static and Dynamic Analyses of Cracked Functionally Graded Structural Components: A Review. *Composites Part B: Engineering*, **173**, Article 106982. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.106982>
- [3] Esen, I., Eltahir, M.A. and Abdelrahman, A.A. (2023) Vibration Response of Symmetric and Sigmoid Functionally Graded Beam Rested on Elastic Foundation under Moving Point Mass. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **51**, 2607-2631. <https://doi.org/10.1080/15397734.2021.1904255>
- [4] Barbaros, I., Yang, Y., Safaei, B., Yang, Z., Qin, Z. and Asmael, M. (2022) State-of-the-Art Review of Fabrication, Application, and Mechanical Properties of Functionally Graded Porous Nanocomposite Materials. *Nanotechnology Reviews*, **11**, 321-371. <https://doi.org/10.1515/ntrev-2022-0017>
- [5] Tariq, A., Uzun, B., Deliktaş, B. and Yaylı, M.Ö. (2025) Application of Machine Learning Methodology for Investigating the Vibration Behavior of Functionally Graded Porous Nanobeams. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **60**, 131-151. <https://doi.org/10.1177/03093247241278391>
- [6] Tariq, A., Uzun, B., Deliktaş, B. and Yaylı, M.Ö. (2024) Vibration Analysis of Embedded Porous Nanobeams under Thermal Effects Using Boosting Machine Learning Algorithms and Semi-Analytical Approach. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **31**, 12320-12343. <https://doi.org/10.1080/15376494.2024.2320809>
- [7] Ghazwani, M.H., Alnujaie, A., Youzera, H., Meftah, A. and Tounsi, A. (2024) Nonlinear Forced Vibration Investigation of the Sandwich Porous FGM Beams with Viscoelastic Core Layer. *Acta Mechanica*, **235**, 2889-2904. <https://doi.org/10.1007/s00707-024-03865-7>
- [8] Cui, Y., Zeng, T., Fan, M., Wu, R., Xu, G., Wang, X., et al. (2024) Dynamic Analysis of Viscoelastic Functionally Graded Porous Beams Using an Improved Bernstein Polynomials Algorithm. *Chaos, Solitons & Fractals*, **189**, Article 115698. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2024.115698>
- [9] Oskouie, M.F., Ansari, R. and Sadeghi, F. (2017) Nonlinear Vibration Analysis of Fractional Viscoelastic Euler-Bernoulli Nanobeams Based on the Surface Stress Theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, **30**, 416-424. <https://doi.org/10.1016/j.camss.2017.07.003>
- [10] Oskouie, M.F. and Ansari, R. (2017) Linear and Nonlinear Vibrations of Fractional Viscoelastic Timoshenko Nanobeams Considering Surface Energy Effects. *Applied Mathematical Modelling*, **43**, 337-350. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.11.036>
- [11] Chong, N., Wang, L., Lei, D. and Ou, Z. (2025) Nonlinear Vibration of Fractional Viscoelastic Piezoelectric Nanobeams Based on Nonlocal Theory. *Archive of Applied Mechanics*, **95**, Article No. 150. <https://doi.org/10.1007/s00419-025-02859-8>
- [12] Qiu, M., Lei, D. and Ou, Z. (2023) Nonlinear Vibration Analysis of Fractional Viscoelastic Nanobeam. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, **11**, 4015-4038. <https://doi.org/10.1007/s42417-022-00799-z>
- [13] Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. (1972) On Nonlocal Elasticity. *International Journal of Engineering Science*, **10**, 233-248. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90039-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0)
- [14] Ke, L.L., Wang, Y.S. and Wang, Z.D. (2012) Nonlinear Vibration of the Piezoelectric Nanobeams Based on the Nonlocal Theory. *Composite Structures*, **94**, 2038-2047. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.01.023>
- [15] Zenkour, A.M. and Sobhy, M. (2018) Nonlocal Piezo-Hygrothermal Analysis for Vibration Characteristics of a Piezoelectric Kelvin-Voigt Viscoelastic Nanoplate Embedded in a Viscoelastic Medium. *Acta Mechanica*, **229**, 3-19. <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1920-6>
- [16] Wang, L., Chong, N., Lei, D. and Ou, Z. (2026) Nonlinear Vibration Analysis of Nonlocal Fractional Viscoelastic Piezoelectric Nanobeams Incorporating Surface Effects. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, **115**, Article 105840. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2025.105840>
- [17] Ghadiri, M., Shafiei, N. and Akbarshahi, A. (2016) Influence of Thermal and Surface Effects on Vibration Behavior of Nonlocal Rotating Timoshenko Nanobeam. *Applied Physics A*, **122**, Article No. 573. <https://doi.org/10.1007/s00339-016-0196-3>
- [18] Mohammadian, M. (2025) Temperature and Porosity-Driven Nonlinear Frequency Shifts in Functionally Graded Nanobeams: A Comparative Analytical Study. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **53**, 7215-7241. <https://doi.org/10.1080/15397734.2025.2499226>
- [19] Li, L. and Hu, Y. (2016) Nonlinear Bending and Free Vibration Analyses of Nonlocal Strain Gradient Beams Made of Functionally Graded Material. *International Journal of Engineering Science*, **107**, 77-97. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.07.011>

- [20] Duan, J.S., Cheng, C.P., and Chen, L. (2017) A Comparison Study of Steady-State Vibrations with Single Fractional-Order and Distributed-Order Derivatives. *Open Physics*, **15**, 809-818. <https://doi.org/10.1515/phys-2017-0095>
- [21] Bendaïda, M., Bousahla, A.A., Mouffoki, A., Heireche, H., Bourada, F., Tounsi, A., *et al.* (2021) Dynamic Properties of Nonlocal Temperature-Dependent FG Nanobeams under Various Thermal Environments. *Transport in Porous Media*, **142**, 187-208. <https://doi.org/10.1007/s11242-021-01666-3>
- [22] Qing, J., Zhou, S., Wu, J., Shao, M. and Tang, J. (2024) Parametric Resonance of an Axially Accelerating Viscoelastic Membrane with a Fractional Model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **130**, Article 107691. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2023.107691>