

一般观念指导下的公式教学

——以三角函数诱导公式第一课时为例

刘家余

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年6月25日; 录用日期: 2025年7月18日; 发布日期: 2025年7月28日

摘要

本文针对诱导公式教学过程中重结果、碎片化等问题, 采取一般观念指导下教学。整个教学彰显了诱导公式整个在三角函数公式学习中的桥梁作用, 同时渗透数形结合、对称、坐标变换等思想方法。

关键词

诱导公式, 对称, 数形结合

Formula Teaching Guided by General Concepts

—Taking the First Lesson of Trigonometric Induction Formula as an Example

Jiayu Liu

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: Jun. 25th, 2025; accepted: Jul. 18th, 2025; published: Jul. 28th, 2025

Abstract

This article aims to address the issues of heavy results and fragmentation in the teaching process of induction formulas, and adopts a general concept to guide teaching. The entire teaching demonstrates the bridging role of induction formulas in the learning of trigonometric formulas, while incorporating ideas and methods such as numerical and geometric combination, symmetry, and coordinate transformation.

Keywords

Induction Formula, Symmetry, Combination of Numbers and Shapes

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

加强对数学整体性的认识,强调以具有整体性的知识单元为载体、从知识联系性出发进行教学设计,是新一轮课改的显著特点,也是落实数学核心素养的重要抓手。三角函数诱导公式是三角函数化简求值的重要公式。课程标准指出,三角函数的教学,应发挥单位圆的作用,引导学生结合实际情况,借助单位圆的直观,探索三角函数的诱导公式[1]。以往的教材是这样总结诱导公式的, $\alpha + k \cdot 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), $-\alpha$, $\pi \pm \alpha$ 的三个三角函数值,等于 α 的同名函数值,前面加上一个把 α 看成锐角时原函数值的符号[2]。如此学生可能会感到困惑,“把 α 看成锐角”,那么 α 究竟是不是锐角[?]如是,岂不是与之前所设的任意角 α 相矛盾?相比之下,人教 A 版本普通高中数学教科书更加强调要利用单位圆的对称性揭示诱导公式的本质。针对以往诱导公式学习过程中重结果、轻过程,草草得到诱导公式以后便以“奇变偶不变,符号看象限”技巧作为总结,致使诱导公式割裂于整体三角函数公式的学习。本文试以诱导公式第一课时为例,展开相应的教学设计,为一线教师提供教学参考。

诱导公式是单位圆典型对称性(关于原点、坐标轴、直线 $y = x$ 对称)的解析表示,在整个三角函数公式的学习中有着承上启下的作用[3]。其中承上是指诱导公式作为公式一的一般化,是研究角的终边不同但又具有某种特殊的对称性,那么这样一来角的终边所对应的三角函数具有什么关系。启下就是在诱导公式的基础上,将 $\pi \pm \alpha$ 、 $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ 、 $0 - \alpha$ 的三角函数推广至 $\beta \pm \alpha$ 的三角函数,即继续研究三角恒等变换。

本文在单元教学思想的指导下将诱导公式作为三角函数所有公式的过度,旨在以一种自然的学习顺序给出本单元教学的指导思想,为一线教师提供教学参考。

2. 课时教学目标

从三角函数的定义和公式一出发,利用单位圆的特殊对称性,推导 $\pi + \alpha$ 的正弦、余弦与正切,会熟练应用诱导公式进行简单的化简。

经历公式二的推导过程,类比探究 $-\alpha$, $\pi - \alpha$ 的正弦、余弦、正切。

建立公式一至公式四的联系,发展数学运算、直观想象等核心素养。

3. 教学重难点

教学重点:诱导公式的推导与熟练运用。

教学难点:利用单位圆的对称性建立 $\pi \pm \alpha$, $-\alpha$ 的正弦、余弦与正切之间的关系。

4. 教学过程

4.1. 旧知回顾,了解学情

写出任意一点 $A(x, y)$ 关于原点、 x 轴、 y 轴的对称点 A' 的坐标。

师生活动：教师提示学生平面直角坐标系中常见对称的处理方法，特别是如何将对称的直观表现(形)转化为坐标定量刻画(数)。

设计意图：此次设计的主要目的是考察学生关于对称的理解，为后续诱导公式的学习打下基础。

4.2. 利用单位圆的对称，探究公式二~公式四

之前学习了终边相同的角的同一三角函数之间的关系，对于终边不同但又满足某些对称关系的角是否同样存在某种关系？

如图 1，设任意角 α 的终边落在第一象限并与单位圆交于 P_1 点，作 P_1 关于原点的对称点 P_2 ， P_1 与 P_2 两点的坐标有什么联系？以 OP_2 为终边的角 β 与 α 有什么数量关系？角 β 与 α 的三角函数值又有什么关系？

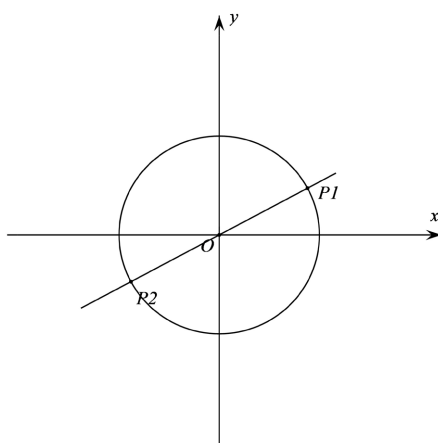


Figure 1. The final edge of any angle is symmetrical about the origin
图 1. 任意角的终边关于原点对称

师生活动：教师引导学生根据三角函数的定义以及单位圆的对称性得到问题研究的思路。

单位圆的对称性→单位圆上点的横纵坐标之间的关系

角的数量关系→三角函数之间的关系

进一步细化以上研究思路。由于 P_1 与 P_2 关于原点对称，故 P_1 、 O 、 P_2 三点共线且 O 为 P_1 与 P_2 中点，。因此以 OP_2 为终边的角 β 与 α 之间的关系是

$$\beta = (\pi + \alpha) + 2k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

由公式一可知，只需研究 $\pi + \alpha$ 与 α 的三角函数之间的关系即可。根据三角函数的定义可得 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ，再由 P_2 相对于 P_1 关于原点对称可得到 $P_2(-\cos \alpha, -\sin \alpha)$ ，最后根据三角函数的定义有

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \quad \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha \quad (1)$$

我们将(1)称为公式二。

教师追问：要是 α 的终边不在第一象限，而是在第二、三、四象限，公式二是否仍然成立？换言之，如何理解 α 是任意角这一先决条件？

设计意图：通过此次追问帮助学生意识到 α 的终边落在不同的象限仅会影响 P_1 与 P_2 各自的坐标，但不会改变 P_1 与 P_2 的相对位置，换言之， P_1 与 P_2 这两点的坐标永远是关于原点对称的。因此坐标间的关系也就不变， $\pi + \alpha$ 与 α 的三角函数值之间的关系也就不变。

请同学们类比公式二的研究思路，自主探究终边关于 x 轴与 y 轴对称的角的三角函数的关系。

作 P_1 关于 x 轴的对称点 P_3 ，学生不难找到以 OP_1 为终边的角的三角函数与以 OP_3 为终边的角的三角函数之间的关系。但对作 P_1 关于 y 轴的对称点 P_4 ，找到以 OP_1 为终边的角的三角函数与以 OP_4 为终边的角的三角函数的对应关系时会遇到困难。这时教师需要从任意角与任意角的加法等相关概念出发进行引导，找到以 OP_4 为终边的角的三角函数与以 OP_1 为终边的角的三角函数之间的关系。

设计意图：仿照公式二的探究思路得到公式三与四，既突出了诱导公式的整体研究框架，又检验了学生公式二的学习效果，同时为三角恒等变换公式的学习打下基础。

4.3. 公式演练，用法总结

利用诱导公式化简并求出下列三角函数的值

$$(1) \cos 135^\circ \quad (2) \sin \frac{10}{3}\pi \quad (3) \sin\left(-\frac{8}{3}\pi\right) \quad (4) \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

师生活动：教师指出化简的方法不唯一，究其原因是因为选择的公式不同。但无论选择什么公式以及采用哪种先后顺序，均不会影响最终结果。在此基础上教师和学生一起总结对任意角的三角函数运用公式一、二、三、四将其转化为锐角三角函数的步骤。

任意负角的三角函数 $\xrightarrow{\text{公式三或公式一}}$ 任意正角的三角函数 $\xrightarrow{\text{公式一}}$ $0 \sim 2\pi$ 的角的三角函数 $\xrightarrow{\text{公式二或公式四}}$ 任意锐角的三角函数。

设计意图：三角函数兼具周期性与对称性，如果说公式一是三角函数周期性的体现，那么诱导公式则是三角函数对称性(轴对称与中心对称)的很好诠释。接下来学习诱导公式五、六的时候教师可以这样引导学生，坐标系中关于 x 轴、 y 轴、原点的对称是最基本的对称，那么研究角的终边关于直线 $y=x$ 对称会有什么结果？如此便可完成整个诱导公式的学习。之后再将问题一般化，诱导公式给出了特殊角与任意角 α 之和(差)的三角函数与 α 的三角函数之间的关系，如果将诱导公式中特殊角推广至任意角 β ，那 $\alpha \pm \beta$ 的三角函数与 α 、 β 的三角函数之间又有什么关系呢？

5. 反思与总结

重视数学的整体性[4]。先以“角的中变相同 - 角的终边不同 - 角的终边具有特殊的对称性”为线索培养学生发现并提出问题的能力，再以角的终边关于原点、 x 轴、 y 轴对称探究并解决问题，这样的整体教学设计基于诱导公式的本质(两个角的和或差是特殊角，或者两个角的终边具有特殊的对称性时，他们的三角函数之间的关系)，以数学知识发生发展过程的自然性为追求，促进学生感悟发现和提出数学问题的方法，同时也为学生自主学习、自主探究提供机会。

注重一般观念的引领[5]。诱导公式是三角函数的性质，所以本教学设计强调以“数学对象要素之间的相互关系就是性质”为指导，研究角(自变量)的终边具有某些特殊关系时，对应的三角函数值有怎样的特殊关系，也就是借助单位圆的对称性，从角的终边相同(公式一)到角的终边关于原点对称(公式二)，再到关于坐标轴对称(公式三、四)，逐渐展开渐进研究，得出相应的三角函数之间的特殊关系。这个过程不仅自然，而且反应了诱导公式的本质，蕴含了深刻的数学思想。

注意发挥学生的主体作用和教师的主导作用。对于“诱导公式到底要研究什么”这个问题，学生不容易解决，所以本教学设计强调教师引导学生归纳公式一和同角三角函数的基本关系式所研究的问题，并以“‘角的终边相同’是一种非常特殊的位置关系”为提示，促进学生想到“角的终边不同，但具有某种特殊的对称性”。公式二的探究具有示范性，所以本教学设计加强了教师的全面指导，促进学生领会研究的内容、过程和方法；其他公式则让学生开展自主探究的基础上进行合作学习，教师在学生自主探究的过程中注意给那些需要帮助的学生以学法指导。学生一旦领会了这些思想方法，在这些思想方法的

指导下进行解题，就会有事半功倍的效果。

参考文献

- [1] 中华人民共和国教育部. 普通高中课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020: 21.
- [2] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通课程标准实验教科书 A 版(数学)必修四[M]. 北京: 人民教育出版社, 2009.
- [3] 章建跃. 核心素养立意的高中数学课程教材教法研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2021.
- [4] 张广民, 曹雅楠. 指向核心素养的三角函数单元教学过程设计[J]. 中国数学教育, 2025(10): 44-49.
- [5] 王丝美, 侯传燕. 精研细磨, 助新成长——以“诱导公式(第 1 课时)”磨课为例[J]. 中小学数学(高中版), 2025(Z1): 31-33.