Interdisciplinary Science Letters 交叉科学快报, 2025, 9(5), 643-650
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/isl
https://doi.org/10.12677/isl.2025.95079

Hans汉斯

公交车等待时间悖论蕴含的数学建模素养

刘晨雨，黄宇青

黄冈师范学院数学与统计学院，湖北 黄冈

收稿日期：2025年7月26日；录用日期：2025年8月19日；发布日期：2025年8月29日

摘　要

数学建模对于义务教育阶段甚至高中阶段，都是发展学生数学核心素养的必不可少的一环。本文通过运用生活中一个较为常见的事件——等待公交车所花时间的问题为例，按照数学建模的具体步骤来重点解析其中所包含的时间悖论以及其中所蕴含的数学建模素养，帮助带领学生体会到数学建模的魅力与趣味。

关键词

时间悖论，数学建模，核心素养

Mathematical Modeling Literacy Embedded in the Paradox of Bus Waiting Time

Chenyu Liu, Yuqing Huang

School of Mathematics and Statistics, Huanggang Normal University, Huanggang Hubei

Received: Jul. 26th, 2025; accepted: Aug. 19th, 2025; published: Aug. 29th, 2025

Abstract

Mathematical modeling is an essential part of developing students' core mathematical literacy in compulsory education and even in high school. This article uses a common event in daily life-the problem of waiting for a bus—as an example to focus on analyzing the time paradox and mathematical modeling literacy contained in it according to the specific steps of mathematical modeling, helping students experience the charm and fun of mathematical modeling.

Keywords

Paradox of Time, Mathematical Modeling, Core Competencies

文章引用: 刘晨雨, 黄宇青. 公交车等待时间悖论蕴含的数学建模素养[J]. 交叉科学快报, 2025, 9(5): 643-650.
DOI: 10.12677/isl.2025.95079

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 绪论

在《义务教育数学课程标准(2022 年版)》明确指出，义务教育数学课程要落实立德树人的根本任务，使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人能够在数学上得到不同的发展，逐步形成适应终身发展需要的核心素养[1]。数学课程要培养学生的核心素养，主要包括三个方面：会用数学的眼光观察现实世界，会用数学的思维思考现实世界，会用数学的语言表达现实世界。“三会”既反映了数学活动的基本特征，也是学生对数学基本思想感悟和内化的结果，体现了数学学科对学生的教育价值。因此，义务教育数学课程目标是以发展学生数学核心素养为导向的。

在小学阶段，所需要具备的数学核心素养主要表现在 11 个方面，其中就具备了模型意识。模型意识主要是指对数学模型普适性的初步感悟。在初中阶段，所需要具备的数学核心素养主要表现在 9 个方面，其中就具备了模型观念。模型观念主要是指对运用数学模型解决实际问题有清晰的认识并能最直接增进学生模型意识和模型观念的活动，即数学建模活动。《普通高中数学课程标准(2017 年版)》中也明确指出数学学科核心素养是数学课程目标的集中体现，而数学建模就是数学六大核心素养之一[2]。由此可见，数学建模对于义务教育阶段甚至高中阶段，都是发展学生数学核心素养的必不可少的一环。然而很多的学生听到数学建模，就将其自动将这一活动与困难相捆绑，认为这是一件十分困难十分深奥的事情，认为该活动只会与成绩超好的天才有关，与自己的学习生活并不相关，以至对其敬而远之。这种观点不仅错误，而且还极其不利于学生的数学核心素养的发展。因此，在中小学阶段就展开一些数学建模的趣味示范活动，将对提高学生的数学核心素养，培养学生的数学学习兴趣具有十分重大的作用。

等公交车是一件日常生活中大部分人都体验过的事情，但其实其中也蕴含着许多的数学问题，同样可以进行数学建模。本文就将以公交车等待时间为例，深入探索其中蕴含的数学思想和方法，通过多种研究方法验证模型的科学性与可靠性，按照数学建模的具体环节来一一进行解析，通过这一大家习以为常的事件来带领学生体会到数学建模的魅力与趣味。同时，本文对国内外数学建模教学的最新研究成果进行了系统梳理，旨在为中小学数学建模教学提供理论支持和实践参考。

2. 数学建模概述

数学建模实际上就是将真实世界中的问题转化为数学问题，并用数学的知识去解决它的过程。数学建模主要包含了四个环节，分别为发现问题、提出问题；分析问题；建立模型以及模型求解；最后进行模型的检验与改进[3]。

对于第一个环节：发现问题及提出问题。数学建模解决的实际问题可以是一些具有高科技背景的问题，比如 GPS 定位的运行原理，心脏手术血流仿真术的模拟等，也可以解决我们身边的一些不起眼并且习以为常的小问题，比如要使石块在水上弹跳的次数最多，需要如何打水漂才行呢？汽车为什么能够在很窄的路面上掉头而不剐蹭？这些有趣的问题其实其中都蕴含着许多的数学知识。

对于第二个环节：分析问题。所谓分析问题，就是通过对问题进行深入地理解与剖析，从而为后面的步骤打好基础。这是解决问题必不可少且至关重要的敲门砖。由于这个过程是学生在后续尝试进行科研活动的出发点，所以我们必须按一定的逻辑和顺序进行，这样学生在遇到陌生的问题和领域时，才能够有章可循，有法可依，并据此来慢慢揭开所求问题神秘的面纱。

对于第三个环节：建立模型以及模型求解。当我们在问题分析的时候就已经明确了解决问题的基本路径，应该建立怎样的模型就基本明了，接着就是具体模型的建立与参数估计和模型计算的过程，在这个过程中也要注意尽量选择简洁性以及适用性的模型。

对于第四个环节：模型检验与改进。数学模型解决的问题是没有标准答案和方法的，那么我们就需要对模型进行检验。同一个问题可以有不同的解决方法，数学模型没有好坏之分，只有合理与不合理。因此要多鼓励学生逐步改进模型，培养其批判性的思维。

与此同时，数学模型还具有一些分类上的区别，例如确定性模型，它适用于输入与输出关系明确的问题，如线性规划；随机性模型则较为适用于涉及概念的问题，例如本文中公交车等待时间悖论中的泊松分布；离散模型与连续模型，它则需要根据问题的具体特点来进行选择，例如离散模型可以用来模拟公交车的到站时间以进行分析。

数学建模作为数学核心素养的重要组成部分，在国内外教育研究中备受关注。近年来，国内外学者也对数学建模的教学方法和实践应用进行了广泛探讨。例如，刘伟(2020)提出数学建模应注重培养学生的实际问题解决能力与知识迁移能力[4]。而刘明鑫认为，教师应该突破教材限制，在日常讲学中渗透数学模型观念这样才能使得学生养成良好的数学模型观念[5]。然而，当前中小学数学建模教学仍存在理论深度不足、方法单一等问题。

3. 公交车等待时间悖论课堂案例

3.1. 发现问题与提出问题

教师提问：同学们在生活中有没有体验过坐公交车呢？在得到同学们的肯定回答之后，教师可以继续提问：那么，大家有没有过这样的感觉呢？为什么我等的那一班公交车就是不来呢？假设我坐的公交车是十分钟一班，那么我有可能等零分钟，也有可能等十分钟，那么按照道理，我平均应该等待几分钟呢？

学生回答：五分钟！

教师：说得对，实际上，如果我考虑各种可能性，那么我的预期平均等待时间就应该是五分钟，也就是班次间隔的一半。但是实际上呢，我总是要等待八九分钟，这是为什么？难道我就是先天等公交车圣体吗？

在学生的笑声中，教师可以继续解释：这种直觉性的预期大多数都不正确，实际上呢，你的实际平均等待时间往往超过了五分钟，甚至可能比十分钟还要长。这种现象就被称为“等待时间悖论”。悖论是指一件看起来不合乎常理、却实际上被证明是正确的事物。等待时间悖论就是其中的一种，因为在公交车站的平均等待时间比公共汽车的平均间隔时间的一半还要长。等待时间悖论是一种数学现象，它与公交车本身无关，即使有的公交车实际开得飞快，有的公交车司机开的巨慢，也没有关系。从数学上说，等待时间悖论是指，当我们随机且均等的选择一个事件发生后的时刻，我们从这个时刻开始等待这一事件再次发生的平均等待时间往往比事件发生间隔的一半时间要长[6]。那么，这种现象是因为什么呢？它是如何“欺骗”我们的呢？

此时教师就可以引导学生产生思考。由于本节课所涉及的数学问题来自日常生活中的等公交车，引导学生通过对熟悉的生活情境的回顾与体验，分析“等公交车”过程中的主要影响因素，进而提出相关的模型假设和建立等待公交车时间的数学模型，通过这个模型的解决与探讨让学生体会数学来源于生活又应用于生活，落实立德树人的根本任务。

3.2. 分析问题以及进行数学建模的建立及求解

教师在学生独立思考之后带领学生继续分析。

教师：为了理解等待时间悖论为何发生，我们可以模拟一个公交时刻表(见图 1)。由于各位公交车司机开车快慢不同，我们可以假设在这个表中，公交车每 4 分钟或 12 分钟到达一班。一般来说，当一个具体问题看上去很复杂时，首先要做的就是简化问题到一定程度，然后再进行数学推理。等待时间悖论在简化的公交时刻表中仍然成立，我们可以更容易的理解发生了什么事。

公交时刻表			
每个小时	:00	:04	:08
	:20	:24	:36
	:40	:44	:48

Figure 1. Simulated bus schedules
图 1. 模拟公交时刻表

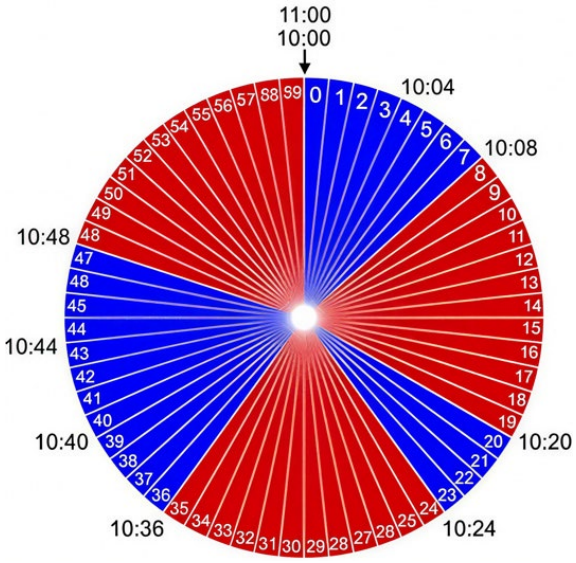

Figure 2. Arrival bus stop time roulette chart
图 2. 到达公交车站时间轮盘图

其中需要考虑的一个关键概念叫做事件间隔时间(inter-event time)，在上面公交车的例子中，也是公交车的发车间隔时间。图 1 的时刻表表明，每一小时里，4 分钟的事件间隔有 6 次，12 分钟的事件间隔有 3 次。在上面假定的场景中，你到达公交车站的时候，并不知道下一辆公交车将何时到达；用概率论的语言来说，你到达公交车站的时间是均匀且随机选择的，即一个小时内你会随机且均匀的选择某一分钟到达公交车站。在这种情况下，你认为你更有可能遇见 4 分钟的事件间隔，还是 12 分钟的事件间隔呢？如果你恰好遇到了 4 分钟的间隔，你的等待时间就会比较短；然而如果你遇到了 12 分钟的事件间隔，你可能要等很长时间。你的直觉可能会告诉你，4 分钟间隔每小时出现 6 次，而 12 分钟间隔每小时只出现 3 次，那么前者发生的概率为 2/3，后者发生的概率只有 1/3，似乎更有可能遇到 4 分钟间隔。然而这种想法实际上并不正确。“均匀且随机选择”的意思是，将你到达公交车站的时间看作转轮盘，轮盘上的每一片是从 0~59 的数字(见图 2)。用你的手指停下转动的轮盘，然后看你手指所碰到的那一片的

数字，如果你碰到的是 33，意味着你会在 10:33 到达公交车站，这种情况下你只需要等待 3 分钟，下一辆公交车就会在 10:36 到达。正如图中所示，轮盘上的每一分钟都有对应的颜色，蓝色对应 4 分钟间隔、红色对应 12 分钟间隔。图中的轮盘有 24 片蓝色和 36 片红色，也就是说我们更有可能遇到 12 分钟事件间隔(遇到概率为 60%)，而不是 4 分钟事件间隔(40%) (见图 3)。

事件间隔时间	概率
4分钟	$\frac{24}{24+36}=\frac{2}{5}$，40%
12分钟	$\frac{36}{24+36}=\frac{3}{5}$，60%

Figure 3. Actual arrival probability diagram
图 3. 实际到达概率图

虽然这 9 个事件间隔中，只有 3 个事件间隔是 12 分钟长，但遇见这个间隔的概率却要高于 4 分钟间隔。为什么会出现这种情况呢？实际上答案非常简单：较长的时间间隔等待公交车占据的时间更长。一个更长的事件间隔会占据时间轮上的 12 个位置，而一个较短的事件间隔只占据了 4 个位置。因此，公交时刻表上某一个时间间隔的稀少，并不意味着遇到该事件间隔的情况也是罕见的。你更有可能落入到等待时间长的区间，从而拉长了你的等待时间。只有当所有的事件间隔时间都是 6 分钟，也就是说公交车永远正好每 6 分钟到达一次，等待时间悖论才会消失，直觉猜测和实际时间都是 3 分钟。只要事件间隔时间存在着变化，等待时间悖论就会发生[7]。

此时，可以请有兴趣的同学来进行实际模拟，通过设计具体的模拟实验，让学生记录下公交车不同到站时间间隔下的等待时间，来增强悖论的存在。与此同时，还可以通过调查问卷的形式，通过调查学生对于等待时间的直观感受来与得到的数学模型结果进行对比，以此来增强研究的科学性。

此时通过运用同学们已经拥有过的算平均值以及算概率的知识，来对等待公交车的时间问题进行一个较为细致的分析，让学生体验到数学问题的魅力以及数学所蕴含的深邃与巧妙。同时也让学生领悟到数学建模并不是什么很难的事情，实际上就是将我们想要研究的问题通过数学的方法描述展示出来。

3.3. 模型检验与改进

由于本次数学建模课程的核心要点在于理解建模方法与思想而非具体数值求解与检验，因此，教师可以仅为学生展示网络上他人运用程序 Python 所运行出公交车到站的数量以及时间关系图的视频，来对我们刚刚所建立的模型进行一个分析与检验。

教师：通过刚刚的分析，可以运用程序 Python 将我们刚刚的公交车到站数量以及时间关系图来进行一个演示。Python 是一款由荷兰国家数学与计算机科学研究中心的吉多·范罗苏姆于 1990 年设计出的编程软件，在这里就不作详细赘述了，大家以后有兴趣的话可以了解一下，这里老师就直接为大家播放一段网络上他人运用 Python 演示这个问题的视频，来看看大家的想法正不正确。

教师进行 Python 演示视频的播放，展示规定十分钟一趟的公交车随机运行十万辆的情况。可以看出，如果两辆公交车非常随机的到站，那么两辆车到站的时间间隔为将会符合我们所之前所学习过的指数分布。具体的运行结果如图 4 所示。

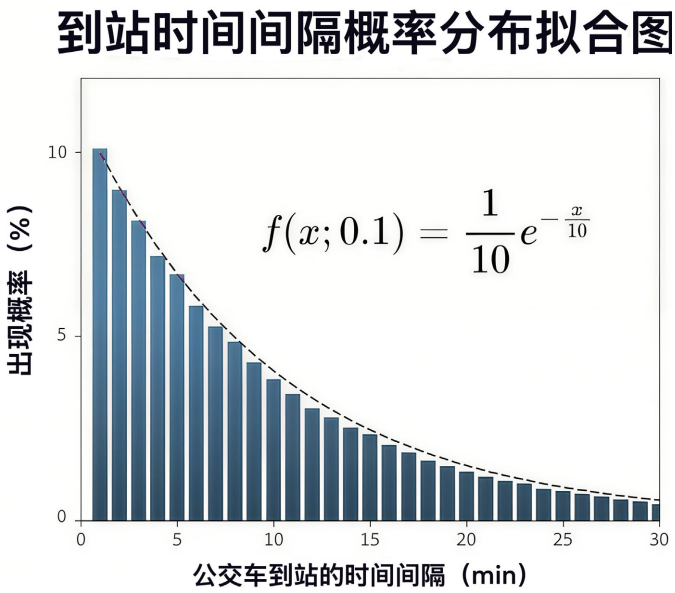

Figure 4. Fitting diagram of the probability distribution of bus arrival time
图 4. 公交车到站时间概率分布拟合图

如果一辆车非常随机的到站，那么一小时到站的公交车数量会服从我们之前所学习过的泊松分布，如图 5 所示。

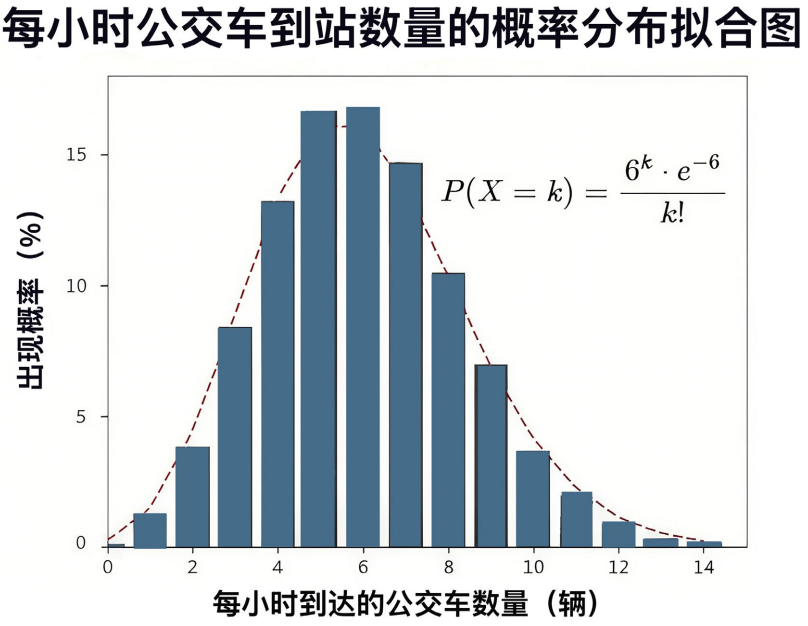

Figure 5. Probability distribution of the number of buses arriving at the station per hour
图 5. 每小时到站公交车的数量概率分布图

在这种情况下，你的平均等车时间就等于发车的时间间隔，也就是说，如果说是要等十分钟一趟的公交车，那么你平均就得等十分钟。听着也许会让你觉得不可思议，但是这就是数学。这也正和我们刚刚的分析与建模的结果一致。

到此为止，教师就带领学生完成了对于一个现象的包括发现问题、提出问题，分析问题，运用数学以及其他学科的知识与方法解决问题并检验数学建模的全过程。

4. 教学建议

数学建模实际上就是将真实世界中的问题转化为数学问题，并用数学的知识去解决它的过程。结合本案例，对中小学教师对于培养与提升学生的数学建模素养提出一些建议。

(1) 创设情境，回归生活，培养数学眼光。数学源于生活，“教师的教”应让学生感受到生活中数学的存在，数学学习只有与现实生活相联系，学生才能更容易理解所学，从而将数学知识与方法由抽象变具体。教师应激发学生的学习积极性，为他们提供充分参与数学活动的机会，帮助其在自主探索和合作交流的过程中理解和掌握基本知识与基本技能、数学思想与方法。在本节课程中，采用了公交车等待时间问题的案例，这个案例不仅能够引导学生对于自己熟悉的生活情景来进行一个回顾，同时也具有极大的趣味性，让学生体会到原来自己身边的许多事情都具有许多意想不到的数学知识，通过运用自己的所学知识对其进行分析，就能够较好地培养起学生的数学建模素养。

(2) 消除学生刻板印象，正确看待数学建模。数学内容的抽象性很容易让一部 分学生失去学习的兴趣，通过将学习反馈问题还原成与现实生活联系紧密的内容，从而拉近数学与生活的距离，实现化抽象为具体，在一定程度上可以帮助学生感知数学学习的价值。从本文的建模案例可以看出，面对一个看起来较为复杂的等公交车时间问题，我们建立的数学模型所用到的数学知识点只是比例、概率等，而这些知识在七年级学生就已经学习过了。由此可以看出，数学建模绝不是遥不可及之物，而是大众化的，能在中小学课堂广泛进行的。数学建模也绝对不是为了“比智商”或者“搞选拔”，而是让学生在这一过程中发展核心素养。正如中国科技大学李尚志教授所言：“数学建模不是做题，而是干活。”遇事要拿出办法，这对任何人都很重要。这也就是数学建模考验和锻炼人的地方。因此，教师在日常教学中不能避开数学建模，应注意把数学建模思想融入到课堂。

(3) 重视信息技术与数学建模活动的深度融合。由于数学建模活动解决真实的情境问题，故所涉及的数学问题通常有可能比较复杂。例如在本案例中，我们要检验我们所分析的模型是否正确，运用学生目前所学过的知识点实际上是较难实现的，因此，我们可以选择直接为学生演示运用 Python 软件运算出的结果，将抽象的数学模型更为直观地呈现在了学生的面前，更为有效地突破了本节课的难点，也更为有效地做到了详略得当，将培养学生的建模思维而非解决方法放在重点。信息技术的深度融合不仅拓宽了学生的学习视野，还提高了建模教学活动的实效。

(4) 多角度审视数学问题，培养数学思维。多角度审视数学问题从而引发不同联想，是一种较好地锻炼思维的方法。鼓励学生对问题进行多层次、多角度思考，对问题的解法、适用范围、结论应用等做进一步探讨，是一个提炼与归纳的过程，有助于发展学生思维的发散性、敏捷性、深刻性和抽象性，优化思维品质[8]。

教师在未来还可以探索数学建模与其他学科的交叉运用，教育学生数学建模不仅仅是运用于数学，它具有广泛的应用前景，是跨学科研究的重要工具。与此同时，也要努力开发更多适合中小学生的数学建模案例，来提高学生的思维认知与学科兴趣。

紧紧围绕学生的“学”，制订指向核心素养的教学目标，把握教学内容主线与相应核心素养发展之间的关联，在真实情境中提出能引发学生思考的数学问题，促进他们经历数学观察、数学思考、数学表

达、概括归纳、迁移运用等学习过程，体会数学是认识、理解、表达现实世界的工具、方法和语言，增强认识真实世界、解决真实问题的数学建模能力，实现“三会”的培养，是数学教师的教学追求。

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022 年版) [M]. 北京: 北京教育出版社, 2022.

[2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版) [M]. 北京: 北京教育出版社, 2017.

[3] 王颖喆. 关于中学数学建模教与学的思考[J]. 数学通报, 2020, 59(11): 1-3+30.

[4] 刘伟. 初中生数学建模能力培养研究[D]: [博士学位论文]. 济宁: 曲阜师范大学, 2020.

[5] 刘明鑫. 初中生数学模型观念存在的问题及对策研究[D]: [硕士学位论文]. 通辽: 内蒙古民族大学, 2023.

[6] Masuda, N. and Porter, M.A. (2021) The Waiting-Time Paradox. *Frontiers for Young Minds*, **8**, Article 582433. https://doi.org/10.3389/frym.2020.582433

[7] 李雷, 小蒋, 钱天培. 公交车总迟到? 你大概掉进了“等待时间悖论” [EB/OL]. https://www.36kr.com/p/1723005157377, 2018-11-26.

[8] 曹雅婷. 初中数学教学中培养“三会”的思考[J]. 中学数学教学参考, 2024(24): 15-17.