Interdisciplinary Science Letters 交叉科学快报, 2026, 10(1), 219-225
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/isl
https://doi.org/10.12677/isl.2026.101027

“洛必达法则”使用的常见误区分析与教学对策

吴 静

云南民族大学预科教育学院，云南 昆明

收稿日期：2025年12月5日；录用日期：2025年12月28日；发布日期：2026年1月7日

摘 要

洛必达法则是高等数学中的重点和难点，因其在极限计算过程中的简便而被学生们普遍使用，但是很多学生会因为理解不到位而出现错用和滥用的情况。本文将通过梳理学生在使用洛必达法则过程中出现的常见误区，深入分析误区产生的根源，提出“前提检验、结果判断、未定式辨析、多种方法优化计算”的教学对策，并对此教学对策的教学结果进行了检验。

关键词

洛必达法则，学习误区，未定式，极限计算

Analysis of Common Misconceptions in Using L’Hôpital’s Rule and Teaching Strategies

Jing Wu

School of Precollegiate Education, Yunnan Minzu University, Kunming Yunnan

Received: December 5, 2025; accepted: December 28, 2025; published: January 7, 2026

Abstract

L’Hôpital’s Rule is a key and challenging topic in advanced mathematics. Its simplicity in calculating limits makes it popular among students, yet many misuse or overuse it due to insufficient understanding. This paper systematically examines common misconception students make when applying

文章引用: 吴静. “洛必达法则”使用的常见误区分析与教学对策[J]. 交叉科学快报, 2026, 10(1): 219-225.
DOI: 10.12677/isl.2026.101027

L'Hôpital's Rule, delves into the root causes of these misconceptions, and proposes teaching strategies such as "precondition verification, result judgment, identification of indeterminate forms, and optimization of calculations using multiple methods". The effectiveness of these teaching strategies has also been tested.

Keywords

L'Hôpital's Rule, Learning Misconceptions, Indeterminate Forms, Limit Calculation

1. 引言

在《高等数学(上册)》学习过程中，极限计算一直贯穿于微积分整个教学过程。对于极限思想的理解深度会影响着后面导数的计算、微分的微元思想和积分的先微后积的理论学习。在对函数极限的计算上，洛必达法则是计算极限的重要方法之一。表面上看，它是求解未定式函数极限的重要工具，实际上它在微积分教学体系中起到了连接微分学与极限理论的重要作用。

在无穷小量学习内容中，介绍无穷小量阶的比较时，我们知道因为两个无穷小量趋近于 0 的速度不同，所以它们的比的极限可能为 0，可能为非零常数 C，也可能为∞。对于两个无穷小量比的极限的算法，即 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 的极限为“$\frac{0}{0}$”型的极限问题，洛必达法则用导数的理论给出了一种计算方法。由于一个非零函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时，若为无穷小量，则其倒数 $\frac{1}{f(x)}$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量，所以洛必达法则还可以进一步延伸到求“$\frac{\infty}{\infty}$”型的极限问题中，它极大地简化了导数计算问题，提升了计算效率。同时，它是从“用导数(微分)近似局部线性”走向“用多项式高阶逼近(泰勒公式)”的中间环节。所以熟练掌握洛必达法则才能为后续内容的学习奠定必要的计算基础。

孙老师在[1]中和李老师在[2]中都探讨了洛必达法则的应用，并指出了几个应用过程中常出现问题。王老师在[3]中和卢老师在[4]中都是总结了常见的洛必达法则的使用情况和注意事项。但是以往的研究都没有指出学生出现这些问题的根本原因和教师的应对策略。本文将通过梳理日常教学中学生在学习和使用洛必达法则过程中出现的误区，深入分析各种问题出现的根源，并提出有效的教学策略意见。

2. 洛必达法则常见的误区类型、成因分析以及相应的教学策略

首先，回忆定理(洛必达法则) [5]：若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足：

① $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ (或者 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$)；

② 在点 x_0 的某空心邻域 $\mathring{U}_{(x_0)}$ 内 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都可导，且 $g'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$ (A 可为实数，也可为 $\pm\infty$ 或 ∞。)；

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$。

以上定理也适用于 $x \to x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty, \infty$ 等情况。

下面对比各类常见的应用问题和相应的正确做法，并分析出错的原因。

2.1. 忽略条件②“$f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}_{(x_0)}$ 内都可导”

学生在高中阶段学过洛必达法则，但学习深度不够、理解不清，只记得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的极限为“$\dfrac{0}{0}$”型或“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型时可以用洛必达法则，所以在使用时就会出现乱用的情况。

错题举例： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n}{2n}=3$

正确做法： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{n^2-4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3n^2}{n^2}}{\frac{n^2-4}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{1-\frac{4}{n^2}}=3$

成因分析： 通过观察可以发现，学生对数列极限使用了洛必达法则，但是数列中 n 取的都是正整数，数列不是连续的，那更不会可导，所以此处明显违反了洛必达法则的第②条件。所以主要问题在于学生对数列的认识不清，以及对导数可导条件的忽略。

教学策略： 针对此问题，在教学时，对于每道题教师要不断强调 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续且可导的，“可导的前提条件是连续”，通过反复练习，使学生对函数可导的条件以及洛必达法则的适用条件内化为程序性知识。这样不仅可以降低学生出错的频率，还进一步巩固了学生对可导和连续之间的关系的理解。

2.2. 对洛必达法则的分子、分母分别求导和函数比的求导法则分辨不清

错题举例： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x-(1-\cos x)}{x^2}=\cdots$

正确做法： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{1}=0$

成因分析： 学生在错误应用洛必达法则后，使得极限问题越变越复杂，主要是因为学生没有完全理解洛必达法则的来历和两函数比的求导过程中的区别。

教学策略： 教师在教学过程中要进行对比式教学。详细对比分析两函数比的求导法则和洛必达法则的由来，使学生清楚二者的区别。

在洛必达法则中，是对 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 求极限。设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ 可知 $f(x_0)=g(x_0)=0$。根据柯西中值定理，$\exists\xi\in(x_0,x)\left[\text{或 }\xi\in(x,x_0)\right]$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)-0}{g(x)-0}=\frac{f(x)}{g(x)}，\quad \text{从而有 } \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{\substack{\xi\in(x_0,x)\left[\text{或 }\xi\in(x,x_0)\right]\\ \text{当 }x\to x_0\text{ 时, }\xi\to x_0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A。$$

在两函数比的求导法则中，是对 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 求导。根据导数定义，如果 $f(x)$ 在区间 I 上可导，那么

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$，可以推出

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta x) + f(x)g(x)}{g(x+\Delta x)g(x)\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \frac{\left[f(x+\Delta x) - f(x)\right]g(x)}{\Delta x} - \frac{\left[g(x+\Delta x) - g(x)\right]f(x)}{\Delta x} \right\} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)}$$
$$= \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{\left[g(x)\right]^2}$$

通过对比二者计算过程，可以清楚看出，一个是对 $\frac{f(x)}{g(x)}$ **求极限**，有 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ （$f(x)$ 和 $g(x)$ 为无穷小量的情况下），一个是对 $\frac{f(x)}{g(x)}$ **求导**。在求极限的过程中，如果对 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 求导，显然一般情况下 $\frac{f(x)}{g(x)} \neq \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$，所以在使用洛必达法则的过程中一定不能对 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 求导。

2.3. 忽略对 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限的验证

错题举例：$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \sin x}{1}$ (极限不存在)

正确做法：$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 1 + \frac{\cos x}{x} = 1 + 0 = 1$

成因分析：通过例子可以看出，有些学生在计算时只考虑了洛必达法则的第① ②条，缺少对第③条的判断，导致错误计算函数极限。出现此类问题主要在于学生对洛必达法则的记忆不完全。

教学策略：对此类问题，在教学过程中需要教师不断强调 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在或为∞的必要性。在运用洛必达法则计算极限时，先判断函数是否满足条件① ②，如果满足，可试用洛必达法则。经计算之后，如果 $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在，说明该题不可使用洛必达法则，需要换方法重新进行计算。

2.4. 计算过程出现循环形式，无法计算出极限

错题举例：$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \cdots$ 一直循环，无法计算出极限

正确做法：$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}} = 1$

成因分析：学生在计算过程中一味地使用洛必达法则，没有认真观察题目其它特点，没有合理利用函数本身的性质。

教学策略：在做题过程中有时会出现循环形式，但做题也是探索知识运用的一个过程。只要做题过

程逻辑上没有问题，教师要允许学生试错。有时在计算过程中出现循环情况后，学生会发现此问题，这时教师再引导学生对计算进行修正，可以起到良好的教学效果。

2.5. 对极限的特殊类型，如“$\infty-\infty$”型、“1^{∞}”型、“$0\cdot\infty$”型、“0^{0}”型、“∞^{0}”型等极限的变化掌握不到位

2.5.1. “$\infty-\infty$”型

错题举例：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\infty-\infty=0$

正确做法：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x}\overset{\text{等价替换}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^{2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2}=0$

成因分析：学生将“$\infty-\infty$”看作“$C-C$”，导致计算错误。

2.5.2. “1^{∞}”型

错题举例：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=(1+0)^{\infty}=1$

正确做法：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)}{-\frac{1}{x^{2}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x}{1+x}}=e^{1}=e$

成因分析：学生认为“1^{∞}”就是无穷个 1 相乘，而 1 的任何次方幂都等于 1，所以$1^{\infty}=1$。

2.5.3. “$0\cdot\infty$”型

错题举例：$\lim\limits_{x\to0^{+}}\sin x\ln x=0\cdot\infty=0$

正确做法：$\lim\limits_{x\to0^{+}}\sin x\ln x=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^{2}x}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}-\dfrac{\sin^{2}x}{x\cos x}\overset{\text{等价替换}}{=}\lim\limits_{x\to0^{+}}-\dfrac{x^{2}}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to0^{+}}-\dfrac{x}{\cos x}=0$

成因分析：学生认为 0 乘以任何数字都等于 0，所以$0\cdot\infty=0$。

2.5.4. “0^{0}”型

错题举例：$\lim\limits_{x\to0}x^{x}=0^{0}=1$或者$\lim\limits_{x\to0}x^{x}=0^{0}=0$

正确做法：$\lim\limits_{x\to0}x^{x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln x^{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}}=\lim\limits_{x\to0}e^{-x}=e^{0}=1$

成因分析：有些学生认为任何数字的 0 次方都等于 1，所以就有$0^{0}=1$，忘了“非零”这个条件。还有些同学认为 0 的任何次方都是 0，所以$0^{0}=0$。

2.5.5. “∞^{0}”型

错题举例：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln x}}=\infty^{0}=1$

正确做法：$\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\ln x^{\frac{1}{\ln x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\cdot\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{\ln x}}=e^{1}=e$

成因分析：仍然是部分学生认为任何数字的 0 次方都是 1，所以$\infty^{0}=1$。

教学策略：对于以上问题，在教学过程中，教师需要不断强调∞和 0 的特殊性，对于非零常数 C 成立的结论，在∞和 0 的情况下一般不成立，所以碰到∞和 0，需要特殊对待。

3. 对极限计算的方法运用不灵活

复杂做法举例

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\cos^2 x^3}{3x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot\cos^2 x^3+(1-\cos x)\cdot 2\cos x^3\cdot\left(-\sin x^3\right)\cdot 3x^2}{6x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\cdot\cos^2 x^3+\sin x\cdot 2\cos x^3\cdot\left(-\sin x^3\right)\cdot 3x^2-\sin x\cdot\sin 2x^3\cdot 3x^2-(1-\cos x)\cdot\cos 2x^3\cdot 6x^2\cdot 3x^2-(1-\cos x)\cdot\sin 2x^3\cdot 6x}{6}$$
$$=\frac{1}{6}$$

正确做法： $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{\tan x^3}\overset{\text{等价替换}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}\overset{\text{等价替换}}{=}\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$

成因分析：学生对于知识都是初学，对各种计算方法掌握还不到位，还没达到随即应用的地步。洛必达法则，部分同学高中有接触过，但是等价无穷小的替换学生还处于初识的状态，还没有完全领略到等价无穷小替换的便利之处，还有一部分同学是还没搞懂等价无穷小替换要如何使用。

教学策略：对于极限计算方法的灵活使用，仍需要学生多练习。需要教师有针对性地设计相关的题目供学生进行训练。并在习题讲解过程中，不断分析等价无穷下替换的优势、函数化简地重要性，这些都能够将函数变简单，方便后面的计算，极大地减少计算量，降低错误率。

4. 教学策略总结

在 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ 型的极限计算过程中，教师需要教会学生进行条件的判断，而且还要不断带领学生掌握 3 个条件的判断方式。题目是否能用洛必达法则，首先检验条件①，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处极限是否同时趋近于 0，或者同时趋近于∞。再检验条件②，$f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 的某空心邻域 $U^{\circ}_{(x_0)}$ 内是否都可导。如果两条都满足，可以试用洛必达法则，对分子、分母分别求导，然后求极限。如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在或为∞，那就说明它满足洛必达法则的条件③，此题计算结束；如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限不存在，也不是∞，那就说明它不满足洛必达法则的条件③，此题需重新换方法进行计算。

另外，在计算过程中，要结合已学的各类函数极限计算方法，如分式化简、等价无穷小替换、取对数求极限、变换函数形式等方法，灵活进行极限计算。对此，我们可以做出如下总结“变量趋于 0，考虑等价替换；底数指数都变化，考虑取对数；$0\cdot\infty$ 可变 $\frac{0}{0}$ 或者 $\frac{\infty}{\infty}$；对于“$\infty-\infty$”，考虑通分变形。”

5. 教学反馈

近几年，因为每一级学生在高中阶段了解过洛必达法则，所以在大学阶段学习数列极限时就用洛必达法则求解，导致求解结果出问题。这一现象提醒了教师在后续洛必达法则的教学过程中需要对三个条件进行详细地分析。在近些年的预科的洛必达法则的教学中，作者增加了以上的教学总结。由于预科数学课程课时量比较充足，所以在各部分内容讲解完之后，有多余的时间进行习题的详细讲解，教师对洛

必达法则内容的不断重复，加深了学生对它的理解，也提升了做题的正确率。在本科教学中，由于课时量较少，对以上教学总结提及相对较少。经过 5 年对本科和预科学生进行有关洛必达法则内容的相同的小节测验，发现本科生测试平均成绩整体较预科生平均成绩要低。但是随着对本科教学节奏的调整，两个专业的学生的平均成绩差距也越来越小，见表 1。

Table 1. Comparison of examination scores for students in two majors
表 1. 两个专业学生测验成绩对照表

近 5 年《函数极限的计算》测试成绩对比表(满分 100 分)		
	预科生平均成绩	本科生平均成绩
2025 年	87.3 分	86.8 分
2024 年	87.5 分	86 分
2023 年	90 分	87.4 分
2022 年	86.5 分	81.7 分
2021 年	85.7 分	83.1 分

6. 总结

高等数学作为理工科专业的基础课，对其内容的理解的深度，直接影响着学生在各专业的发展。而极限作为高等数学内容的基础，又影响着高等数学的学习，所以对极限思想的理解和极限的运算能力是重中之重。洛必达法则是用导数反作用极限，不仅要求学生对极限思想有深入的了解，还需要学生对导数很熟练，它综合了初数、极限和导数的各类运算，所以引导学生灵活运用各类知识，巧用洛必达法则进行极限计算，可以为高等数学后面内容的学习打好坚实基础。在本科教学中，教师可以灵活调整课程节奏，对关键知识点多讲解，让学生多练习，增强学生对知识的运用能力，也进一步提升学生学习高等数学的自信心。

基金项目

2024 年云南省教育厅科学研究项目资助 + 高等学校公共数学教学探究(编号 2024J0592)。

参考文献

[1] 孙巧阁. 关于洛必达法则的几点思考[J]. 科学咨询(科技·管理), 2021(10): 96-97.
[2] 李晨鸽. 洛必达法则应用的几点思考[J]. 数学学习与研究, 2019(12): 114-115.
[3] 王建云, 等. 利用洛必达法则求解函数极限的分析和研究[J]. 数学学习与研究, 2020(13): 9-10.
[4] 卢香竹, 吴林霖. 用洛必达法则求不定式极限的分类归纳[J]. 理科爱好者, 2020(22): 252-253.
[5] 华东师范大学数学系编. 数学分析[M]. 第 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2019.