

# 基于量子力学中的球谐函数研究原子核巨四级共振

宋一丹

上海理工大学理学院, 上海

收稿日期: 2024年6月20日; 录用日期: 2024年11月6日; 发布日期: 2024年11月14日

## 摘要

原子核巨共振是指基态原子核受到外场激发后, 核内核子发生集体运动的现象。其中原子核巨四级共振作为巨共振中最重要的激发模式之一, 是人们探究核物质状态方程特征参量和介质中核子-核子相互作用特性的有效工具。因此, 针对产生原子核巨四级共振的激发模式开展自洽的理论推导, 对于核物质性质的研究具有重要意义。球谐函数通常被用来描述量子力学中粒子在有心力场(如氢原子)中的运动状态, 是提取原子核巨共振中激发算符和激发模式公式的重要工具。然而, 在之前原子核巨四级共振的相关理论工作中, 人们通常利用一个经验方程来开展相应的研究。本论文从量子力学中的球谐函数出发, 推导了原子核巨四级共振的激发算法和激发模式的形式, 为原子核物理中巨共振现象的理论研究提供了一种新的方法, 更为本科物理教学中的拓展部分提供了新的素材。在大学物理课堂中引入相关的科研工作, 不仅可以引导学生的认知从课本内容过渡到前沿研究, 更可以培养学生的科学思维和批判性思维, 以达到科教融合的目的。

## 关键词

球谐函数, 原子核巨四级共振, 激发算符, 激发模式

# The Study for Nuclear Giant Quadruple Resonance Based on the Spherical Harmonic in Quantum Mechanics

Yidan Song

College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jun. 20<sup>th</sup>, 2024; accepted: Nov. 6<sup>th</sup>, 2024; published: Nov. 14<sup>th</sup>, 2024

## Abstract

Nuclear giant resonance refers to the collective motion phenomenon in the nucleus after the ground-

文章引用: 宋一丹. 基于量子力学中的球谐函数研究原子核巨四级共振[J]. 物理化学进展, 2024, 13(4): 565-572.

DOI: 10.12677/japc.2024.134060

state nucleus is excited by an external field. As one of the most important excitation modes in giant resonance, the nuclear giant quadruple resonance is an effective tool to explore the characteristic parameters in the equation of the state of nuclear matter and properties of in-medium nucleon-nucleon interaction. Therefore, it is of great significance to study the properties of nuclear matter to carry out the self-consistent theoretical derivation about the excitation mode of generating the nuclear giant quadruple resonance. Spherical harmonics are commonly used in quantum mechanics to describe the motion state of particles in a centered force field (such as hydrogen atoms), and serve as important methods to extract the formulas for excitation operators and modes within the nuclear giant resonance. However, previous theoretical work on the nuclear giant quadruple resonance often relied on an empirical equation for corresponding research. In this paper, we derive the excitation operator and the corresponding excitation modes for the nuclear giant quadrupole resonance using the spherical harmonic function in quantum mechanics. This approach offers a novel method for theoretical research on the giant resonance phenomenon in nuclear physics and provides new material for the expansion section of undergraduate physics curricula. Incorporating related scientific research into college physics classrooms not only helps guide students in transitioning from textbook content to frontier research but also fosters their scientific thinking and critical thinking, thereby achieving the integration of science and education.

## Keywords

Spherical Harmonics, Nuclear Giant Quadruple Resonance, Excitation Operator, Excitation Mode

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

核物质是原子核物理和核天体物理研究中常用的一种有效理论近似, 利用核物质的性质可以反映绝大多数真实反应系统的主要特征[1]。在核天体物理中, 由于脉冲星的发现, 中子星从一种理论假设成为了一个可观测可探索的实体系统, 它的内部可以看作是处于高压高密状态下的非对称核物质[2]。在原子核物理中, 重核的中心区域、重离子碰撞过程中产生的中间产物也可以看作是高温状态下的超饱和密度非对称核物质[3]。通过研究核物质的性质, 可以反映这些真实系统的特性。因此, 准确约束核物质的性质是当前原子核物理以及核天体物理领域中理论模拟和实验探测中最热门的课题之一[4]。

在原子核物理的研究中, 人们可以通过核反应和核结构方法对非对称核物质的性质进行约束。其中基态原子核受到微弱外场激发后, 核内核子发生集体运动的现象被称作原子的巨共振[5][6]。它的实验峰值能量  $E_x$  和半高宽  $\Gamma$  是约束非对称核物质的性质, 以及核物质介质中核子-核子相互作用特性的有效探针。例如: 原子核巨单级共振的  $E_x$  被用来约束核物质的不可压缩系数[7][8]; 原子核巨偶级共振的  $\Gamma$  和核子-核子散射截面的介质修正直接相关[9][10]; 原子核巨四级共振的  $E_x$  不仅可以用来提取单核子同位旋标量有效质量, 还是约束中子-质子有效质量劈裂的有效探针[11][12]。因此, 通过自洽的理论计算对原子核巨共振的观测量进行准确的描述, 对于核物质性质的研究具有重要的意义。

在原子核巨共振的理论研究中, 可以通过在系统的基态哈密顿能量算符上作用一个微扰激发算符实现原子核的激发过程。激发算符的形式可以通过量子力学中的球谐函数获得, 通过不同的激发算符可以得到相应的激发模式, 继而产生不同类型的巨共振现象[13][14]。在原子核巨四级共振的相关理论工作中, 人们经常利用一个经验激发模式来进行研究[15]。为了得到一个合理的激发模式形式, 给原子核巨四级共

振的理论研究提供一种新的思路。本论文将从量子力学中的球谐函数  $Y_2^0(\theta, \phi)$  出发, 推导出原子核巨四级共振的激发算符和激发模式的形式, 并和其他研究中常用的经验公式的结果进行比较, 也为学生展示基本物理教学内容在前沿科学研究中的应用。

## 2. 研究方法

球谐函数常被用于描述物理学中三维空间的函数, 是球坐标系中球面上拉普拉斯方程的特解[16]。它在量子力学、天文学、地球物理学, 以及原子核物理学等领域都有着广泛的应用[17]。在原子核巨共振的研究中, 基态原子核被激发后, 由于状态量子数的变化, 可以发生不同模式的巨共振现象。这些巨共振模式对应了不同的角动量、对称性等特征, 而球谐函数正好是描述这些特征的有效数学工具。基于不同量子数下球谐函数的形式, 可以得到对应的原子核巨共振激发模式方程。将激发模式作用在基态原子核上, 就可以模拟巨共振的动态演化过程, 继而研究核内核子在特定方向上的集体运动现象以及形变效应[14]。

根据基态原子核受到激发后状态量子数的变化, 原子核巨共振现象可以分为以下模式。例如: 按照角动量的变化  $\Delta L = 0, 1, 2, 3$ , 巨共振可以分为巨单极、巨偶极、巨四极, 以及巨八极共振; 根据同位旋的变化  $\Delta T = 0, 1$ , 巨共振可以分为同位旋标量与同位旋矢量巨共振; 根据自旋的变化  $\Delta S = 0, 1$ , 可分为电巨共振和磁巨共振。本论文关注的是  $\Delta L = 2, \Delta T = 0, \Delta S = 0$  的原子核的同位旋标量电巨四级共振, 以下将先利用对应的球谐函数方程对巨四级共振的激发算符和激发模式的形式进行推导, 然后和现有的经验公式的结果之间进行比较和讨论[14]。

### 2.1. 球谐函数

球谐函数  $Y_l^m(\theta, \phi)$  通常被定义在球坐标系中, 是极角  $\theta$  (取值范围  $[0, \pi]$ ) 和方位角  $\phi$  (取值范围  $[0, 2\pi]$ ) 的函数, 其形式为:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (1)$$

这里的符号  $l$  为非负整数, 表示阶数, 符号  $m$  是整数, 其取值范围为  $-l$  到  $l$ , 称为次数。公式(1)中的  $P_l^m$  为勒让德多项式,  $N_l^m$  是归一化因子, 具体形式这里不再描述。球谐函数中的  $l$  和  $m$  与巨共振激发模式的角动量 and 对称性有关。原子核巨四级共振对应系数为  $l = 2, m = 0$ 。因此, 原子核巨四级共振对应的球谐函数方程为[14]。

$$Y_2^0(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1) \quad (2)$$

根据上述球谐函数公式, 可以直接得到原子核巨四级共振中的单体激发算符形式,

$$\hat{Q} = Y_2^0(\theta, \phi) \hat{r}^2 = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z_i^2 - r_i^2) \quad (3)$$

上式中符号  $A$  表示原子核的总质量数,  $r_i$  表示原子核内第  $i$  个核子和球心之间的距离,  $z_i$  则是  $r_i$  在  $z$ -轴方向上的投影。去掉公式(3)中的求和符号, 就可以得到原子核巨四级共振的单核子激发算符  $\hat{q}$ , 利用该算符可以开展后续的研究。

### 2.2. 巨共振的激发算符

将激发算符作用在原子核的基态哈密顿能量算符上, 可以得到瞬时激发后原子核的哈密顿能量算符的形式, 即原子核发生巨四级共振时的系统能量密度的信息。随后, 原子核内处于激发态的核子开始通

过集体运动的方式向外释放能量，直到系统从激发态回到基态。在这个动态过程中，激发算符的期望随时间的演化，可以反映原子核发生巨四级共振时原子核结构变化的过程，帮助人们更直观地了解原子核巨四级共振的信息。

公式(4)反映了原子核巨共振激发算符期望随时间演化的信息，它通过引入含时的系统分布函数  $f(\vec{r}, \vec{p})$ ，然后对三维的空间坐标和动量坐标进行积分[14]。

$$\hat{Q} = \int d\vec{r}d\vec{p} f(\vec{r}, \vec{p}) q(\vec{r}, \vec{p}) \quad (4)$$

$$q(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d\vec{s} \exp\left(-i\frac{\vec{p}\cdot\vec{s}}{\hbar}\right) d\vec{s} \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \hat{q} \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle \quad (5)$$

公式(4)中  $q(\vec{r}, \vec{p})$  为单核子激发算符  $\hat{q}$  在相空间下的表达形式，其具体形式为公式(5)。其中空间坐标  $\vec{r}$  和动量坐标  $\vec{p}$  可以通过输运模型获得，不同的输运模型的  $f(\vec{r}, \vec{p})$  具体形式不同，这里不再详细叙述。

公式(5)中包含了坐标表象下单核子激发算符的期望  $\left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \hat{q} \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle$ ，带入相应的单核子激发算符  $\hat{q}$  后，就可以得到对应的巨共振激发算符的期望结果。下面将展示原子核巨四级共振单核子激发算符期望的具体推导过程。

$$\begin{aligned} \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \hat{q} \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle &= \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \frac{1}{A} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z_i^2 - \hat{r}_i^2) \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{A} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left\langle \vec{r} + \frac{\vec{s}}{2} \left| \left[ 3\left(z_i - \frac{s_z}{2}\right)^2 - \left(\vec{r}_i - \frac{\vec{s}}{2}\right)^2 \right] \right| \vec{r} - \frac{\vec{s}}{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{A} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \left[ 3\left(z_i - \frac{s_z}{2}\right)^2 - \left(\vec{r}_i - \frac{\vec{s}}{2}\right)^2 \right] \delta(\vec{s}). \end{aligned} \quad (6)$$

公式(6)化简后的结果为巨四级共振的单核子激发算符期望的表达式，将其带回到公式(5)中就可以得到原子核巨四级共振的单核子激发算符在相空间下的表达形式，即

$$q(\vec{r}, \vec{p}) = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3z_i^2 - \vec{r}_i^2) \quad (7)$$

最后将公式(7)带回到公式(4)中，就可以得到激发算符的期望随时间的演化，从而反映原子核巨四级共振的动态信息。

### 2.3. 巨共振的激发模式

作用在基态原子核相空间信息上的激发模式，可以通过改变所有核子的动量信息和位置信息，使原子核被激发，继而产生巨共振现象。激发模式决定了原子核巨共振的类型，其形式和对应的激发算符有关。通过将单核子激发算符带入到运动方程(Vlasov 方程)中，就可以得到巨共振的激发模式的具体形式[14]。

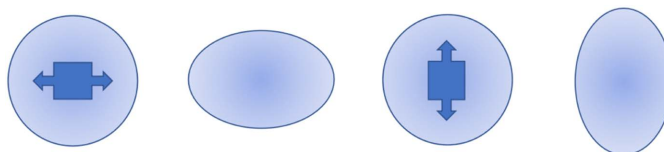
$$\vec{r}_i = \vec{r}_i + \lambda \frac{\partial q(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{p}_i} \quad (8)$$

$$\vec{p}_i = \vec{p}_i - \lambda \frac{\partial q(\vec{r}_i, \vec{p}_i)}{\partial \vec{r}_i} \quad (9)$$

公式(8)和公式(9)分别是原子核巨共振的激发模式在坐标空间和动量空间上的作用形式。利用上述公式改变初始时刻原子核相空间的信息，就可以完成对原子核的瞬时激发。将公式(7)中巨四级共振的激发算符分别带入到公式(8)和公式(9)中，就可以得到相应的激发模式形式：

$$\bar{p}_i \rightarrow \begin{cases} p_{xi} + 2\lambda\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{x_i}{A}, \\ p_{yi} + 2\lambda\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{y_i}{A}, \\ p_{zi} - 4\lambda\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\frac{z_i}{A}. \end{cases} \quad (10)$$

公式(10)是基于球谐函数得到的原子核巨四级共振激发模式。该激发模式作用在基态原子核上时,只改变所有核子的初始动量坐标,而与位置坐标无关。通过调整激发系数 $\lambda$ 的大小可以控制原子核发生巨四级共振时,原子核形状形变的剧烈程度。



**Figure 1.** Macroscopic image of the dynamic evolution of the giant quadrupole resonance of a nucleus  
**图 1.** 原子核巨四级共振的动态演化宏观图像

公式(10)产生巨四级共振的方式,是在初始瞬间(即图 1 中第一个球形核[18])增大所有核子的动量在 $x$ -轴和 $y$ -轴方向上的投影,减小核子的动量在 $z$ -轴方向上的投影,但不改变初始原子核的形状。使原子核内的所有核子都具有更大的横向运动趋势,从而达到图 1 中第二个扁椭球核的效果,即基态原子核沿纵向压缩。压缩到极限后,原子核又开始反方向运动,使该方向上原子核的结构被拉伸变成第四个长椭球核。以此往复,原子核形变的程度逐渐减小,直至系统恢复到基态。此时核子不再发生集体运动,原子核也不再发生形变,其激发算符的期望为零。

在原子核巨四级共振理论研究中,人们通常利用以下经验公式来完成图 1 中的部分过程[15]。

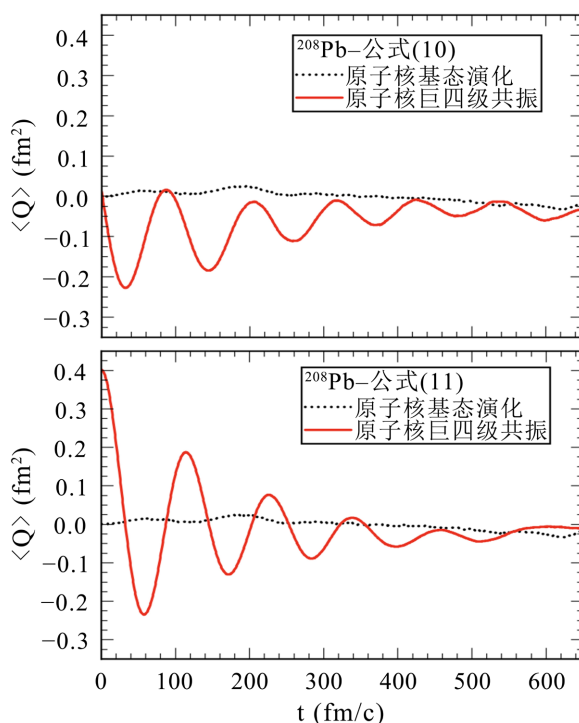
$$\bar{r}_i \rightarrow \begin{cases} x_i - x_i\lambda, \\ y_i - y_i\lambda, \\ z_i + 2z_i\lambda, \end{cases} \quad \bar{p}_i \rightarrow \begin{cases} p_{xi} + 2p_{xi}\lambda, \\ p_{yi} + 2p_{yi}\lambda, \\ p_{zi} - 4p_{zi}\lambda. \end{cases} \quad (11)$$

经验公式(11)作用在基态原子核上时,改变了所有核子的动量坐标和位置坐标,使原子核的初态演化从被压缩的状态开始(即初始时刻为图 1 中第四个椭球形)。随后,系统以逆向重复图 1 中的过程,直至恢复到基态。后面将利用公式(10)和公式(11)分别产生原子核巨四级共振现象,通过比较它们的激发算符的期望随时间的演化,对两种激发模式进行更进一步的比较。

### 3. 结果与讨论

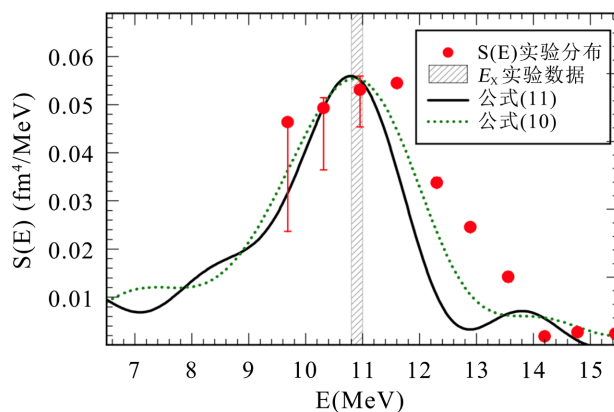
利用公式(10)和公式(11)分别作用在基态球形核  $^{208}\text{Pb}$  上,计算激发算符的期望随时间的演化。在图 2 中,黑色虚线表示基态原子核的结果,其激发算符期望一直在 0 附近振荡。由公式(10)激发的巨四级共振,在初始时刻原子核是对称的基态球形核,故期望从 0 开始逐渐变为最小值再回到最大值。随着原子核形状的收缩和拉伸,其结果进行周期性振幅递减的变化,直到系统回到基态为止。而公式(11)产生的巨四级共振,初始时刻的原子核已经被压缩,故期望值从最大值开始进行周期性振幅递减的变化,系统同样在最后回到基态。图 2 中通过公式(10)和公式(11)计算得到的两条红色实线都可以较好地反映出原子核发生巨四级共振时,系统的动态演化过程。因此,基于量子力学中的球谐函数推导得到的激发模式形式,可以引入到核物理的输运模型中,用于原子核巨四级共振性质的研究。

除了激发算符的期望, 本文还利用原子核巨四级共振的强度函数对公式(10)和公式(11)的结果进行比较。基于线性响应理论[19], 对原子核巨四级共振激发算符的期望进行傅立叶积分, 就可以得到巨共振的强度函数  $S(E)$  和系统能量之间的关系。如图 3 所示, 图中阴影区域是原子核巨四级共振强度函数的实验峰值能量  $E_x$ , 红色符号表示加权求和规则下实验强度函数  $S(E)$  的分布[20]。由红色符号组成的曲线的半高宽  $\Gamma$  可以反映核物质介质中核子-核子之间发生碰撞的剧烈程度。比较图 3 中黑色实线和绿色点线发现, 两种激发模式都可以得到符合实验峰值能量  $E_x$  的巨四级共振结果。但由于公式(11)的激发方式是将原子核稳定压缩后再放开, 使得原子核内的核子之间发生相对公式(10)更少的碰撞, 因此它的强度函数半高宽小于实验值。而公式(10)的激发过程更符合原子核巨四级共振的真实物理场景, 其半高宽  $\Gamma$  和实验值之间更符合。



**Figure 2.** The evolution of expectation of the excitation operator in the ground-state nucleus and nuclear giant quadrupole resonances under different excitation modes

**图 2.** 不同激发模式下的基态原子核、原子核巨四级共振中激发算符的期望随时间的演化



**Figure 3.** The strength function of nuclear giant quadrupole resonances under different excitation modes

**图 3.** 不同激发模式下的原子核巨四级共振的强度函数

## 4. 总结

本论文从量子力学中的球谐函数出发,展示了原子核巨四级共振激发算符的推导过程。然后将激发算符公式带入到运动方程中得到了巨四级共振的激发模式形式,并和原子核物理研究中常用的经验公式进行对比。通过比较发现,两种激发模式都可以较好地重现原子核巨四级共振的动态演化过程。在经验公式激发的巨共振演化过程中,其计算出的强度函数半高宽  $\Gamma$  低于实验值。从球谐函数出发得到的激发模式公式,可以对巨共振的观测量进行更好的描述。因此,在利用原子核巨四级共振的观测量约束核物质状态方程特征参量和核物质介质性质的研究中,选择从球谐函数得到的巨四级共振激发模式有助于提高研究的准确性。

综上,本论文基于量子力学框架中的球谐函数研究了原子核巨四级共振。论文结果不仅为该方向的理论研究提供了新思路,还通过自洽的、简洁的、直观的方式,展示了复杂的科研问题和基本物理教学内容之间的关联,可以作为拓展部分引入到教学中,帮助学生了解科学研究的方法和过程。

## 基金项目

本论文得到 2023 年上海市教育委员会“上海高校青年教师培养资助计划”项目的资助(编号: 10-24-341-003)。

## 参考文献

- [1] 王正行. 核物质[M]. 北京: 北京大学出版社, 2014.
- [2] Burgio, G.F., Schulze, H.J., Vidiña, I. and Wei, J.B. (2021) Neutron Stars and the Nuclear Equation of State. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **120**, Article ID: 103879. <https://doi.org/10.1016/j.pnnp.2021.103879>
- [3] Sorensen, A., Agarwal, K., Brown, K.W., et al. (2024) Dense Nuclear Matter Equation of State from Heavy-Ion Collisions. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **134**, Article ID: 104080.
- [4] Tsang, C.Y., Tsang, M.B., Lynch, W.G., Kumar, R. and Horowitz, C.J. (2024) Determination of the Equation of State from Nuclear Experiments and Neutron Star Observations. *Nature Astronomy*, **8**, 328-336. <https://doi.org/10.1038/s41550-023-02161-z>
- [5] 卢希庭. 原子核物理[M]. 绵阳: 原子能出版社, 2010.
- [6] Roca-Maza, X. and Paar, N. (2018) Nuclear Equation of State from Ground and Collective Excited State Properties of Nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, **101**, 96-176. <https://doi.org/10.1016/j.pnnp.2018.04.001>
- [7] Gaitanos, T., Larionov, A.B., Lenske, H. and Mosel, U. (2010) Breathing Mode in an Improved Transport Approach. *Physical Review C*, **81**, Article ID: 054316. <https://doi.org/10.1103/physrevc.81.054316>
- [8] Youngblood, D.H., Clark, H.L. and Lui, Y.W. (1999) Incompressibility of Nuclear Matter from the Giant Monopole Resonance. *Physical Review Letters*, **82**, 691-694. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.82.691>
- [9] Wang, R., Zhang, Z., Chen, L., Ko, C.M. and Ma, Y. (2020) Constraining the In-Medium Nucleon-Nucleon Cross Section from the Width of Nuclear Giant Dipole Resonance. *Physics Letters B*, **807**, Article ID: 135532. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2020.135532>
- [10] Song, Y., Wang, R., Zhang, Z. and Ma, Y. (2023) In-Medium Nucleon-Nucleon Cross Sections from Characteristics of Nuclear Giant Resonances and Nuclear Stopping Power. *Physical Review C*, **108**, Article ID: 064603. <https://doi.org/10.1103/physrevc.108.064603>
- [11] Song, Y., Wang, R., Zhang, Z. and Ma, Y. (2021) Nuclear Giant Quadruple Resonance within a Transport Approach and Its Constraint on the Nucleon Effective Mass. *Physical Review C*, **104**, Article ID: 044603. <https://doi.org/10.1103/physrevc.104.044603>
- [12] Zhang, Z. and Chen, L. (2016) Isospin Splitting of the Nucleon Effective Mass from Giant Resonances in  $^{208}\text{Pb}$ . *Physical Review C*, **93**, Article ID: 034335. <https://doi.org/10.1103/physrevc.93.034335>
- [13] 王睿. 原子核基态性质与动力学演化的同位旋效应[D]: [博士学位论文]. 上海: 上海交通大学, 2018.
- [14] 宋一丹. 原子核的温度及巨共振[D]: [博士学位论文]. 上海: 复旦大学, 2022.

- [15] Kong, H., Xu, J., Chen, L., Li, B. and Ma, Y. (2017) Constraining Simultaneously Nuclear Symmetry Energy and Neutron-Proton Effective Mass Splitting with Nucleus Giant Resonances Using a Dynamical Approach. *Physical Review C*, **95**, Article ID: 034324. <https://doi.org/10.1103/physrevc.95.034324>
- [16] 戴元本. 量子力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.
- [17] 杨威, 丁士缘, 孙保元. 基于实稳定方法的原子核单粒子共振相对论 Hartree-Fock 模型[J]. 物理学报, 2024, 73(6): 65-74.
- [18] 何万兵. 奇异结构原子核的巨偶极共振性质研究[D]: [博士学位论文]. 北京: 中国科学院大学, 2015.
- [19] Fetter, A. and Walecka, J.D. (1971) *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill.
- [20] Youngblood, D.H., Lui, Y.W., Clark, H.L., John, B., Tokimoto, Y. and Chen, X. (2004) Isoscalar  $E0$ - $E3$  Strength in  $^{116}\text{Sn}$ ,  $^{144}\text{Sm}$ ,  $^{154}\text{Sm}$ , and  $^{208}\text{Pb}$ . *Physical Review C*, **69**, Article ID: 034315. <https://doi.org/10.1103/physrevc.69.034315>