# 基于双波长偏振调控的多功能超构表面

#### 刘春龙

上海理工大学光电信息与计算机工程学院,上海

收稿日期: 2025年4月2日; 录用日期: 2025年4月30日; 发布日期: 2025年5月12日

## 摘要

传统单一自由度的超构表面难以实现复杂的光场调控,而多功能集成器件的开发则为突破这一瓶颈提供 了可能。本文提出了一种基于几何相位调控的双波长多功能太赫兹超构表面,通过亚波长单元结构的旋 转角度设计,实现了跨波段偏振态与三维光场的协同操控。超表面在0.52太赫兹表现为偏振分束器,而 在0.6太赫兹表现为涡旋发射器。改变超表面相位分布,进一步实现了双波长偏振相关的全息加密功能。 仿真验证了器件在横向/纵向光场调控、多维度信息编码方面的灵活性,为集成光子器件、光学加密通信 及智能成像系统提供了新的设计方法。

### 关键词

超构表面,几何相位,双波长,多维复用,全息加密

# Dual-Wavelength Polarization Modulated Multifunctional Metasurface

#### **Chunlong Liu**

School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Apr. 2<sup>nd</sup>, 2025; accepted: Apr. 30<sup>th</sup>, 2025; published: May 12<sup>th</sup>, 2025

#### Abstract

Conventional single-degree-of-freedom metasurfaces face limitations in achieving complex optical field manipulation, while the development of multifunctional integrated devices offers a break-through pathway. This study proposes a dual-wavelength multifunctional terahertz metasurface based on geometric phase modulation. Through rotational angle design of subwavelength unit structures, the metasurface enables synergistic control of polarization states and three-dimensional optical fields across distinct frequency bands. Specifically, the device functions as a polarization beam

splitter at 0.52 THz and switches to a vortex generator mode at 0.6 THz. By reconfiguring the phase distribution, it further realizes dual-wavelength polarization-dependent holographic encryption functionality. Numerical simulations validate the device's versatility in transverse/longitudinal optical field manipulation and multidimensional information encoding, providing novel design methodologies for integrated photonic devices, secure optical communication systems, and intelligent imaging architectures.

#### **Keywords**

Metasurfaces, Geometric Phases, Dual-Wavelength, Multidimensional Multiplexing, Holographic Encryption

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0). http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

# 1. 引言

超构表面(Metasurfaces)作为二维人工电磁材料的革命性代表,通过亚波长尺度的微纳结构单元组成 的阵列,在单原子层厚度内实现了对光波振幅、相位及偏振态的全矢量调控,彻底颠覆了传统光学器件 依赖光波在器件中的相位积累的调控方式。相较于传统折射/衍射光学元件,超构表面的核心优势在于其 亚波长结构单元可通过共振相位[1]、几何相位[2]或者传播相位[3]等调制,精确重构光场的空间分布特性。 例如,2020年 Zang 等人基于几何相位超表面,通过调整纳米柱的旋转角度,在太赫兹波段满足 2 的相 位覆盖,实现了偏振无关的扩展焦深的聚焦,并且该超透镜还能在纵向宽范围成像,打破了传统成像系 统的焦深限制,实现三维信息无损获取[4]。这种"平面化"、"集成化"的光操纵方式,不仅为超薄光 学系统(如手机摄像模组、VR 显示器件)的微型化提供了物理基础,更在超分辨成像[5]、偏振检测[6] [7] 等前沿领域展现出独特价值,标志着人类对光与物质相互作用的理解迈入全新维度。

近年来,基于波长[8][9]、偏振[10][11]或多维空间[12]等自由度的多功能超构表面设计,在光通信、 生物医学成像及集成光子学等领域展现出突破性潜力。然而,现有研究多局限于单一波长下的横向或者 纵向平面光场调控(如多焦点分束或涡旋生成)[13]-[15],少有在同一器件中实现多波长偏振相关的三维空 间光场协同操控。这是由于不同波长电磁响应的强色散特性导致跨波段相位调控失配。在这里,我们基 于几何相位超表面提出并仿真验证了在双波长维度下操纵不同偏振的太赫兹波同时实现横向和纵向平面 的光场调控。具体来说,我们设计的超表面在 0.52 太赫兹频点的光入射时会产生两个横向分离的焦点, 在 0.6 太赫兹频点的光入射时会产生两个纵向分离的涡旋。为了进一步证明所设计的超表面具有高度的 功能多样性和可编程性,我们还进行了双波长不同偏振条件下的远场全息演示。仿真结果表明,我们的 设计方案不仅能够在不同的波长和偏振条件下灵活切换工作模式,而且还在集成和加密通信方面展现出 显著优势,为未来开发更加智能、紧凑且安全的光学系统开辟了新途径。

# 2. 设计原理

#### 2.1. 太赫兹多功能超构表面示意图

我们所演示的超构表面如图 1 所示,基于几何相位的双波长的多功能太赫兹超构表面能够在不同的 频点作为不同的功能器件。当 0.52 太赫兹的左旋圆偏振光正入射到超表面时,超表面作为一个分束器, 可以把入射光分成两束分别聚焦在 z 轴两侧。当 0.6 太赫兹的左旋圆偏振光正入射到超表面时, 超表面 作为一个涡旋发射器,入射光经过超表面在 z 轴的不同位置处产生两个聚焦涡旋。



**Figure 1.** Schematic diagram of dual-wavelength polarization control based on metasurfaces. Red and blue represent the 0.52 terahertz frequency point and the 0.6 terahertz frequency point respectively. The 0.52 terahertz wave incident generates two laterally separated focal points, while the 0.62 terahertz wave incident generates two longitudinally separated focused vortices 图 1. 基于超构表面的双波长偏振调控示意图。红色和蓝色分别代表 0.52 太赫兹频点和 0.6 太赫兹频点, 0.52 太赫兹 波入射生成两个横向分离的焦点, 0.62 太赫兹入射生成两个纵向分离的聚焦涡旋

# 2.2. 设计原理

几何相位的概念最初由英国教授 Berry 提出[16],后来于 1956 年被印度教授 Pancharatnam 通过研究 证实[17]。在电磁波偏振态转化过程中,会引发一个额外的相位因子。这个额外的相位与系统的几何路径 相关,具体而言,它等于偏振态在其演变路径上围成的立体角的一半。几何相位超表面调制原理如图 2(a) 所示,几何相位超表面的单元结构大小都相同但旋转角度各有差异,因为几何相位调制只与单元结构的 旋转角度有关,入射光经过单元结构后获得的相位是旋转角的 2 倍关系。并且几何相位超表面只针对左 右旋圆偏振光去设计相位,单元结构类似于一个近似完美的半波片,圆偏振光入射到结构上经过调制后 会翻转旋性。具体推导如下,当圆偏振光入射到一个旋转任意角度的半波片后,出射的电磁波可以表示为:

$$E = P \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ \pm i \end{bmatrix} = \frac{t_x + t_y}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ \pm i \end{bmatrix} + \frac{t_x - t_y}{2} e^{\pm i2\theta} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1\\ \mp i \end{bmatrix}$$
(1)

出射电磁波可分为两部分:一部分是未被转化的圆偏振光,其自旋手性与入射偏振方向一致;另一部分是附带了几何相位的转化圆偏振光,其自旋手性与入射偏振垂直。其中±由入射圆偏振态手性决定。因此,通过改变单元结构的转向角,可以调控局部相位的突变,实现0到2π的相位覆盖。

我们所设计的多功能超表面的相位分布为:

$$\varphi_{1}(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda_{1}} \left( \sqrt{\left(x - x_{0}\right)^{2} + y^{2} + f^{2}} - f \right)$$
(2)

$$\varphi_2(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda_1} \left( \sqrt{\left(x + x_0\right)^2 + y^2 + f^2} - f \right)$$
(3)

$$\varphi_{3}(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda_{2}} \left( \sqrt{x^{2} + y^{2} + f_{1}^{2}} - f_{1} \right) + l_{1} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
(4)

$$\varphi_4(x, y) = -\frac{2\pi}{\lambda_2} \left( \sqrt{x^2 + y^2 + f_2^2} - f_2 \right) + l_2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
(5)

$$\Phi(x, y) = \arg\left\{\exp\left[i\varphi_1(x, y)\right] + \exp\left[i\varphi_2(x, y)\right] + \exp\left[-i\varphi_3(x, y)\right] + \exp\left[-i\varphi_4(x, y)\right]\right\}$$
(6)

其中 $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ 分别对应于 0.52 太赫兹和 0.6 太赫兹这两个频点的波长,  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$ 是生成两个横向偏移的焦点的相位,两个焦点分别相对于 x 轴向左和向右各偏移了 x<sub>0</sub>的距离;  $\varphi_3(x, y)$ ,  $\varphi_4(x, y)$ 是生成两个纵向分离的聚焦涡旋的相位,两个聚焦涡旋的拓扑荷分别为  $l_1$ ,  $l_2$ ,焦距分别为  $f_1$ ,  $f_2$ ,不同的  $f_1$ ,  $f_2$ 和 x<sub>0</sub>控制纵向分离和横向分离的距离。 $\Phi(x, y)$ 是超表面的总相位分布,因此超表面每个单元结构的旋转角为 $\Phi(x, y)/2$ 。

为了获得在双频点工作的几何相位调制,我们通过 FDTD 构建如图 2(b)所示的单元结构,FDTD 边 界紧贴单元结构的边缘,并且设置边界条件为周期性边界条件,分别扫描 *x*, *y* 偏振光入射到结构后透射 *x*, *y* 偏振光的透过率和相位分布,最终找到满足此要求的结构参数为*L* = 112 um, *W* = 33 um,周期 *P* = 130 um,高度 *H* = 500 um。图 2(c)是此结构在 0.45~0.65 THz 的不同偏振转化率,要实现几何相位调制得 满足 *T<sub>x</sub>* 与 *T<sub>y</sub>* 相等且 *x* 偏振与 *y* 偏振的相位差等 *π*,从图中可以看出 0.52 THz 和 0.6 THz 的 *T<sub>x</sub>* 和 *T<sub>y</sub>* 几乎 相等,尽管我们没有给出其相位差,但是从图中可以看出这两个频点的圆偏振转化高达 75%以上,因此 该结构在 0.52 THz 和 0.6 THz 具有类似半波片的功能,可以同时实现几何相位调制。由此参数结合上述 旋转角度就可以设计出具有我们所期望的功能的超表面。



**Figure 2.** Design process of the geometric phase unit cell structure. (a) Schematic illustration of the rotation angles in the multifunctional metasurface unit cell structure; (b) Schematic diagram of the multifunctional metasurface unit cell structure; (c) Frequency-dependent transmittance curves for different polarized lights incident on the structure

图 2. 几何相位单元结构设计过程。(a) 多功能超表面单元结构的旋转角度示意图; (b) 多功能超表面的单元结构示 意图; (c) 不同偏振光入射到结构的透射率随频率变化曲线图

## 3. 仿真结果分析

图 3 显示了我们所设计的多功能超表面的数值仿真结果。我们首先模拟了频率为 0.52 太赫兹的左旋圆偏振光正入射到超表面,透射光的电场分布如图 3(a)所示,图  $a_2$ 表示透射场右旋圆偏振分量的 xy 切面 电场分布,可以在(0,-2000)和(0,2000)的位置处分别观察到一个焦点,而图  $a_1$ 中对应的是透射场左旋圆 偏振分量的电场分布,没有观察到焦点,这与我们的设计原理相吻合。透射场分布的 yz 切面结果如图  $a_3$ ,  $a_4$  所示,正如我们所设计的那样,可以在右旋圆偏振光的电场分布中观察到两个横向分离的聚焦,聚焦 位置为(-2000,6000)和(2000,6000),左旋圆偏振光的 yz 面电场分布与 xy 面结果一致,没有聚焦现象。当我们把入射光的频率切换到 0.6 太赫兹,结果则发生改变。如图 3(b)所示,这时的超表面是一个涡旋发射器。图  $b_1$ 和  $b_2$ 表示两个纵向分离的左旋圆偏振聚焦涡旋的 xy 切面电场分布,中心的相位奇点导致其分 布类似一个"甜甜圈"。两个聚焦涡旋的相位分布分别如图  $c_1$ 和  $c_2$ 所示,中心一圈包含 0 到  $2\pi$ 的全相 位覆盖的数量代表拓扑荷数,相位递增的方向代表拓扑荷的正负,因此生成的两个涡旋的拓扑荷分别是 +1 和-1。图  $b_3$ 是聚焦涡旋的 xz 切面电场分布。对于右旋圆偏振的电场分布,我们没有针对其进行相位 设计,因此其电场分布应该表现出散焦现象,归一化后就得到了如图所示的结果。



**Figure 3.** Simulation results of the multifunctional metasurface based on dual-wavelength polarization control. (a<sub>1</sub>) (a<sub>2</sub>) The *xy*-plane light field distribution of transmitted LCP and RCP when LCP light with a frequency of 0.52 THz is incident perpendicularly on the metasurface. (a<sub>3</sub>) (a<sub>4</sub>) The *yz*-plane light field distribution of transmitted LCP and RCP when LCP light with a frequency of 0.52 THz is incident perpendicularly on the metasurface. (b<sub>1</sub>) (b<sub>2</sub>) The *xy*-plane light field distribution of transmitted LCP at z = 4000 um and z = 7800 um when RCP light with a frequency of 0.6 THz is incident perpendicularly on the metasurface. (b<sub>3</sub>) The *yz*-plane light field distribution of transmitted LCP when RCP light with a frequency of 0.6 THz is incident perpendicularly on the metasurface. (b<sub>5</sub>) (b<sub>6</sub>) (b<sub>7</sub>) The normalized *xy* and *yz*-plane light field distribution of transmitted RCP when RCP light with a frequency of 0.6 THz is incident perpendicularly on the metasurface. (c<sub>1</sub>) (c<sub>2</sub>) The phase distribution of the two focused vortices at z = 4000 um and z = 7800 um, respectively

图 3. 基于双波长偏振调控的多功能超构表面的仿真结果。(a1) (a2)频率为 0.52 太赫兹的 LCP 光正入射到超表面,透射 LCP 和 RCP 的 xy 面光场分布。(a3) (a4)频率为 0.52 太赫兹的 LCP 光正入射到超表面,透射 LCP 和 RCP 的 yz 面 光场分布。(b1) (b2)频率为 0.6 太赫兹的 RCP 光正入射到超表面,透射 LCP 场 z = 4000 um 和 z = 7800 um 位置处的 xy 面光场分布。(b3)频率为 0.6 太赫兹的 RCP 光正入射到超表面,透射 LCP 的 yz 面光场分布。(b5) (b6) (b7)频率为 0.6 太赫兹的 RCP 光正入射到超表面,透射 LCP 的 yz 面光场分布。(b5) (b6) (b7)频率为 0.6 太赫兹的 RCP 光正入射到超表面,透射 RCP 的 xy 和 yz 面的归一化光场分布。(c1) (c2)分别对应 z = 4000 um 和 z = 7800 um 处的两个聚焦涡旋的相位分布

为了证明我们提出的超表面的多功能性,在这里我们还设计了双频点不同偏振的全息显示。对应的 超表面的相位分布为:

$$\Phi(x, y) = \arg\left\{\exp\left[i\varphi_{Y}(x, y)\right] + \exp\left[-i\varphi_{N}(x, y)\right]\right\}$$
(7)

其中  $\varphi_{Y}(x, y)$  和  $\varphi_{N}(x, y)$  分别是英文单词"Yes"和"No"的首字母 Y 和 S 的相位,其中  $\varphi_{Y}(x, y)$  是针对 0.52 太赫兹设计的,  $\varphi_{N}(x, y)$  是针对 0.6 太赫兹设计的。我们把衍射距离设置为了 8000 um,当频率为 0.52 太赫兹的 RCP 入射光照射到超表面时,我们可以在 LCP 电场分布中 z = 8000 um 处观察到字母 Y, LCP 电场分布中则观察不到;同样的,当 0.6 太赫兹的 LCP 入射光照射到超表面时,我们可以在 RCP 电场分布中 z = 8000 um 位置处观察到字母 N,而 RCP 电场分布中观察不到。仿真结果如图 4 所示,仿真与我们的理论设计一致。除此之外,我们所设计的超表面还可以实现编码加密的功能,假设我们的全息字母 Y 是正确信息,而 N 是误导信息,其他通道则无信息。入射光的频点作为第一个加密通道,入射光的频点和偏振态作为第二个加密通道。当入射光的频点和偏振态都不对时,通过超表面后得到的是误导信息 N; 当入射光的频点和偏振态只有一个对的时,通过超表面后是得不到任何信息的;只有当入射光的频点和偏振态都对时,才能通过超表面获得正确的信息 Y。



**Figure 4.** Holographic demonstration based on dual-wavelength polarization control. The simulation shows that when right circularly polarized (RCP) light with a frequency of 0.52 terahertz is incident perpendicularly on the metasurface, the transmitted left circularly polarized (LCP) field displays the holographic letter "Y", while the transmitted RCP field does not show the holographic letter. Conversely, when left circularly polarized (LCP) light with a frequency of 0.6 terahertz is incident perpendicularly on the metasurface, the transmitted LCP field does not display the holographic letter, while the transmitted RCP field shows the holographic letter "N"

图 4. 基于双波长偏振调控的全息演示。模拟了频率为 0.52 太赫兹的 RCP 光正入射到超表面,透射 LCP 场显示出全 息字母 Y,透射 RCP 场没有显示全息字母。频率为 0.6 太赫兹的 LCP 光正入射到超表面的结果则与其相反,透射 LCP 场没有显示全息字母,透射 RCP 场显示出全息字母 N

我们所有的仿真结果都是通过 FDTD 方法实现的,在三维空间建模中,*x、y、z* 三个正交方向的边界 条件均设置为完美匹配层(Perfectly Matched Layer, PML),该设置能有效吸收传播至边界的电磁波,将边 界反射系数控制在-60 dB 以下,确保开放边界条件下的电磁场模拟精度,计算域的网格划分选用软件内 置的自适应网格划分的第二级,对应精度为波长的十分之一,兼顾计算精度与效率的平衡。超表面由 100 × 100 个矩形硅柱构成,尺寸大小为 1.3 × 1.3 cm。

# 4. 结论

总之,我们提出了一种基于双频点偏振调控的多功能超表面设计新方案,仿真验证了通过在 0.52 THz 和 0.6 THz 频段切换可以分别实现横向分离的聚焦和纵向分离的涡旋。在此基础上,我们改变超表面的 相位分布,实现了双频点不同偏振的全息显示。该超表面还可以进一步扩展到光学加密领域,以频率和 偏振态为双重密钥,仅当两者均匹配时才能解密真实信息(单密钥无输出,双密钥错误输出伪信息)。该设 计通过调控超表面单元结构的旋转角度,在太赫兹波段实现了频率选择、偏振调控、波前整形的深度集 成,为高密度光子芯片、动态光学加密及多通道通信系统提供了新颖的思路。

# 参考文献

- Yu, N., Genevet, P., Kats, M.A., Aieta, F., Tetienne, J., Capasso, F., *et al.* (2011) Light Propagation with Phase Discontinuities: Generalized Laws of Reflection and Refraction. *Science*, **334**, 333-337. https://doi.org/10.1126/science.1210713
- [2] Huang, L., Chen, X., Mühlenbernd, H., Li, G., Bai, B., Tan, Q., et al. (2012) Dispersionless Phase Discontinuities for Controlling Light Propagation. Nano Letters, 12, 5750-5755. <u>https://doi.org/10.1021/nl303031j</u>
- [3] Arbabi, A., Horie, Y., Bagheri, M. and Faraon, A. (2015) Dielectric Metasurfaces for Complete Control of Phase and Polarization with Subwavelength Spatial Resolution and High Transmission. *Nature Nanotechnology*, 10, 937-943. <u>https://doi.org/10.1038/nnano.2015.186</u>
- [4] Zang, X., Xu, W., Gu, M., Yao, B., Chen, L., Peng, Y., et al. (2019) Polarization-Insensitive Metalens with Extended Focal Depth and Longitudinal High-Tolerance Imaging. Advanced Optical Materials, 8, Article ID: 1901342. https://doi.org/10.1002/adom.201901342
- [5] Zhao, J., Yin, L., Han, F., Wang, Y., Huang, T., Du, C., *et al.* (2021) Terahertz Non-Label Subwavelength Imaging with Composite Photonics-Plasmonics Structured Illumination. *Optics Express*, 29, Article No. 36366. https://doi.org/10.1364/oe.437544
- [6] Ma, A., Intaravanne, Y., Han, J., Wang, R. and Chen, X. (2020) Polarization Detection Using Light's Orbital Angular Momentum. Advanced Optical Materials, 8, Article ID: 2000484. <u>https://doi.org/10.1002/adom.202000484</u>
- [7] Ren, Y., Guo, S., Zhu, W., Huo, P., Liu, S., Zhang, S., *et al.* (2022) Full-Stokes Polarimetry for Visible Light Enabled by an All-Dielectric Metasurface. *Advanced Photonics Research*, **3**, Article ID: 2100373. <u>https://doi.org/10.1002/adpr.202100373</u>
- [8] Wang, T., Xie, R., Zhu, S., Gao, J., Xin, M., An, S., et al. (2019) Dual-Band High Efficiency Terahertz Meta-Devices Based on Reflective Geometric Metasurfaces. *IEEE Access*, 7, 58131-58138. https://doi.org/10.1109/access.2019.2912017
- Zhang, H., Zhu, C. and Song, Z. (2024) Pancharatnam-Berry-Phase-Based Plasmonic Metasurfaces Enable Wavelength-Selective Directional Focusing and Vortex. *Advanced Photonics Research*, 6, Article ID: 2400077. <u>https://doi.org/10.1002/adpr.202400077</u>
- [10] Li, H., Xu, H., Zheng, C., Liu, J., Li, J., Song, C., et al. (2022) All-Silicon Diatomic Terahertz Metasurface with Tailorable Linear Polarization States. Advanced Optical Materials, 11, Article ID: 2201960. https://doi.org/10.1002/adom.202201960
- [11] Li, H., Duan, S., Zheng, C., Li, J., Xu, H., Song, C., et al. (2022) Manipulation of Longitudinally Inhomogeneous Polarization States Empowered by All-Silicon Metasurfaces. Advanced Optical Materials, 11, Article ID: 2202461. <u>https://doi.org/10.1002/adom.202202461</u>
- [12] Shi, Y., Wan, S., Dai, C., Wang, Z., Li, Z. and Li, Z. (2024) On-Chip Meta-Optics for Engineering Arbitrary Trajectories with Longitudinal Polarization Variation. *Nano Letters*, 24, 2063-2070. <u>https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.3c04739</u>
- [13] Chen, X., Chen, M., Mehmood, M.Q., Wen, D., Yue, F., Qiu, C., et al. (2015) Longitudinal Multifoci Metalens for Circularly Polarized Light. Advanced Optical Materials, 3, 1201-1206. <u>https://doi.org/10.1002/adom.201500110</u>
- [14] Mehmood, M.Q., Mei, S., Hussain, S., Huang, K., Siew, S.Y., Zhang, L., et al. (2016) Visible-Frequency Metasurface for Structuring and Spatially Multiplexing Optical Vortices. Advanced Materials, 28, 2533-2539. https://doi.org/10.1002/adma.201504532
- [15] Li, H., Duan, S., Zheng, C., Xu, H., Li, J., Song, C., et al. (2023) Terahertz All-Silicon Metasurfaces with Off-Axis Bifocal Characteristics for Polarization Detection. Nanophotonics, 12, 3359-3371. https://doi.org/10.1515/nanoph-2023-0277

- [16] Berry, M.V. (1987) The Adiabatic Phase and Pancharatnam's Phase for Polarized Light. *Journal of Modern Optics*, **34**, 1401-1407. <u>https://doi.org/10.1080/09500348714551321</u>
- [17] Pancharatnam, S. (1956) Generalized Theory of Interference, and Its Applications. Part I. Coherent Pencils. *Proceedings of the Indian Academy of Sciences—Section A*, **44**, 247-262. <u>https://doi.org/10.1007/bf03046050</u>