

# Study on Nonlinear Vibration and Delayed Feedback Control of Aircraft in Take-Off and Sliding

Cheng Dong, Dunke Song, Yanying Zhao\*

School of Aircraft Engineer, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi  
Email: \*yanyingzhao@nchu.edu.cn

Received: Sep. 8<sup>th</sup>, 2017; accepted: Sep. 22<sup>nd</sup>, 2017; published: Sep. 28<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

In the present paper, the vertical nonlinear vibration characteristics of landing gear system are investigated when the aircraft is taxiing. The delayed feedback control is employed to control and suppress the vibration of the aircraft body. The differential equations of a two degree of freedom nonlinear vibrating system is obtained and approximate analytical solution is achieved by the method of decoupling and multiple scales. The dynamical behavior of vibrating system is investigated when the external frequency approaches the first order modal frequency and 1:5 internal resonance occurs simultaneously. The focus is to analyze the effect of gain and time delay on the vibration of the vibrating system. The response curve of primary system and time delay is obtained and the stability of the system is investigated. The results show that the vibration of the aircraft body is suppressed about 48% when the controlling parameters are chosen appropriately. However, the vibration of the aircraft body may lose its stability and destroyed when the controlling parameters are chosen unreasonably. The results of the present paper may improve the vibrating theory of aircraft landing gear system and provide valuable reference for engineering designers.

## Keywords

Landing Gear, Vibration Reduction, Nonlinear, Time-Delay Feedback Control

---

# 飞机起降滑行过程中的非线性振动及其时滞反馈控制研究

董 成, 宋敦科, 赵艳影\*

南昌航空大学飞行器工程学院, 江西 南昌

---

\*通讯作者。

## 摘要

本文主要研究飞机起降滑行过程中垂直方向上的非线性振动特性并对其主系统(飞机机体)的振动进行时滞反馈主动控制。首先对飞机机体和起落架建立二自由度非线性系统模型,并得到模型的运动微分方程组,坐标转换进行解耦,再利用多尺度法求解方程组的近似解析表达式,模拟分析外激励频率趋近一阶振动模态频率时主系统的振动幅值,这里着重研究系统的1:5内共振情况。然后研究非线性系统动力学的行为并考察主动控制时的反馈增益系数和时滞量对主系统振动的幅值影响,得到主系统的振幅——时滞响应曲线,从而利用时滞反馈来控制主系统的振动。最后对系统的控制参数进行优化设计,同时对系统的稳定性进行分析。研究结果表明,对含有时滞项的非线性振动系统,通过调节合理的反馈增益系数和时滞量,对主系统能起到很好的减振作用,机体的减振幅度最高可以达到48%。与之相对的,如果其参数选择的不合适,对比无时滞项的初系统,机体的振幅将会增大,振动特性变得更加恶劣。本文的研究结果有助于飞机起落架的减振控制系统的进一步完善,同时也为飞机减振器的设计和研发提供一个新的思考方向。

## 关键词

起落架, 减振, 非线性, 时滞反馈控制

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

飞机的出现是人类历史上一个伟大的成就,它实现了人类遨游蓝天的梦想。与飞机出现相伴的是飞机起落架的出现和发展。

飞机起落架是飞机上一个非常重要的部件,它是飞机在地面停放、滑跑、承受飞机载荷,并为飞机提供滑行操纵和制动力的起飞着陆装置[1],也是唯一一种支撑整架飞机的承力操纵部件,当飞机起飞后,可以视飞行性能而收回起落架。当飞机起落滑行时,飞机的着陆冲击能量除一小部分由飞机结构变形吸收外,大部分还是由起落架来吸收,所以起落架对飞机的安全起降起着极其重要的作用,是飞机不可或缺的一部份。随着飞机性能和人们要求乘坐舒适度的提高,对起落架要求也越来越高,起落架的设计和优化也变得尤为重要。

当飞机起降滑行时,由于机场地面不平顺或突发状况(如极端恶劣天气)的影响,会引起的飞机明显的振动。特别的,在飞机的着陆过程中垂直方向上拥有巨大的动量,短时间内降落起落架和飞机全机结构都将承受很大的冲击载荷,这会引起飞机在垂直方向上产生强烈的振动,将会造成飞机及其起落架结构发生疲劳,寿命缩短[2],同时也会使飞机的稳定性变差,操作性变难,乘客舒适度降低,货物或武器的安全也会受到影响[3] [4]。而在大型机中,随着全机重量和以前相比成倍增加,机械结构越来越精复杂,起落架的设计也变得越来越重要。所以,研究飞机起落滑行的振动问题是航空航天工程的重大问题,不仅具有理论意义,更具有实际的应有价值。

在减振方面, 常见的减振方法有被动控制, 主动控制和半主动控制。其中时滞反馈控制属于主动控制。1992年 Olgac [5]等人首次提出将时滞状态反馈控制应用于动力系统的减振问题中。主要思路是在主系统上附加由一个质量弹簧阻尼器和一个带有时滞状态反馈装置的机构, 通过调节反馈增益系数和时滞量的大小来减小和抑制主系统振动的振幅。随后, Renzulli [6]等人研究了当外激励频率变化时, 反馈增益系数和时滞量能自动调节的方法。同时 Olgac, Filipović 等人[7] [8]又提出了实时可调谐吸振器减振机理。近年来 Shin, Kim 等人[9]研究了气动隔振板的时滞控制技术理论并取得了较好的研究成果。

本文着重研究含有时滞反馈控制的非线性飞机起落架系统, 通过控制其中的时滞项(由反馈增益系数和时滞量组成)来优化机体垂直方向上的振动。

## 2. 起落架系统运动微分方程的建立

这里, 起落架系统可分为两部分: 悬挂机体部分(机体和固定在机体的起落架上半部分)和起落架下半部分(没有与机体固定的部分)。对于前者, 本文不考虑机体的外形, 不研究机体的横向摆振和耦合振动, 忽略机体的柔性而视为刚体。从而得到简化的悬挂机体模型: 由一个非线性刚度弹簧, 黏性阻尼器, 时滞控制减振装置和  $1/2$  悬挂机体重量的质量块组成, 简称主系统。同理, 可以得到起落架下半部分模型: 由一个线性刚度弹簧, 黏性阻尼器和起落架下半部分重量的质量块(包括轮胎质量)组成, 简称副系统。示意图如下(图 1 中轮胎为无质量模型, 实际为质量微小的轮胎皮层)。

其中  $m_1$  为主系统的质量,  $k_1$  为主系统的线性刚度系数,  $k_n$  为主系统的非线性刚度系数,  $c_1$  为主系统的阻尼系数,  $g$  为主系统的时滞反馈增益系数,  $x_1$  为主系统的垂直位移。同理,  $m_2$  为副系统的质量,  $k_2$  为副系统轮胎的线性刚度系数,  $c_2$  为副系统轮胎的阻尼系数,  $x_2$  为副系统的垂直位移;  $x_3$  为路面的位移形式激励。

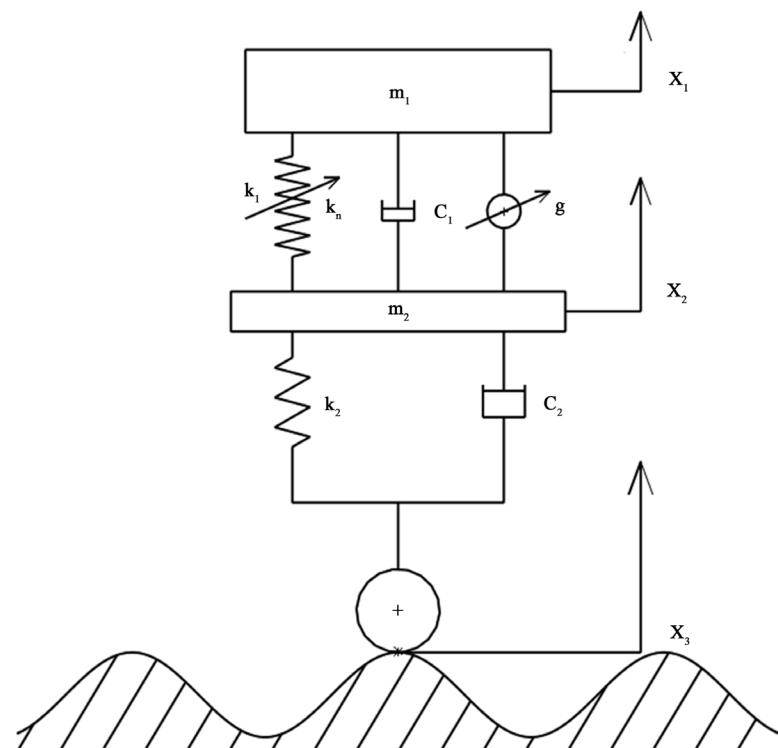


Figure 1. Schematic diagram of landing gear system model

图 1. 起落架系统模型示意图

由牛顿第二定律可得系统运动微分方程:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1) + k_n(x_2 - x_1)^5 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - g\dot{x}_1(t - \tau) \\ m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_3 - x_2) + c_2(\dot{x}_3 - \dot{x}_2) - k_1(x_2 - x_1) - k_n(x_2 - x_1)^5 - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + g\dot{x}_1(t - \tau) \end{cases}$$

令  $x_3 = F \sin(\omega t + \phi_1)$ ,  $k_2 x_3 + c_2 \dot{x}_3 = k_2 F \sin(\omega t + \phi_1) + c_2 \omega F \cos(\omega t + \phi_1) = f \cos(\omega t + \phi_2)$ , 为了计算方便, 可通过构造合适的  $\phi_1$  使得  $\phi_2 = 0$ , 故矩阵可写成如下形式:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_n(x_1 - x_2)^5 + g\dot{x}_1(t - \tau) \\ -k_n(x_1 - x_2)^5 - g\dot{x}_1(t - \tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (1)$$

### 3. 非线性系统的多尺度分析方法

令:  $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = [u] \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ , 则  $[u]^T = \begin{bmatrix} 1 & r_1 \\ 1 & r_2 \end{bmatrix}$ 。其中  $r_1 = 1 - \frac{m_1}{k_1} \omega_1^2$ ,  $r_2 = 1 - \frac{m_1}{k_1} \omega_2^2$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  为

线性系统模型的一阶和二阶振动模态, 时滞部分  $\dot{x}_1(t - \tau) = \dot{x}_{1\tau} = \dot{q}_{1\tau} + \dot{q}_{2\tau}$ 。将上面变换带入矩阵(1)再左乘  $[u]^T$  可将方程部分解耦。结合摄动法的原理  $m\ddot{x} + kx = \varepsilon L(x, \dot{x})$ , 令  $c_1 = \varepsilon c_1$ 、 $c_2 = \varepsilon c_2$ 、 $k_n = \varepsilon k_n$ 、 $g = \varepsilon g$ 、 $f = \varepsilon f$  (其中  $0 < \varepsilon \ll 1$ )。并利用多尺度法对系统运动方程进行摄动分析, 引入新的变量  $T_r$ , 令:  $T_r = \varepsilon^r t$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots$ , 设  $\omega_1^2 = \frac{k_1 - 2r_1 k_1 + r_1^2 (k_1 + k_2)}{m_1 + r_1^2 m_2}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k_1 - 2r_2 k_1 + r_2^2 (k_1 + k_2)}{m_2 + r_2^2 m_2}$ 。求解方程组和归纳  $\varepsilon$  的相同次

幂并设微分方程组  $\varepsilon^0$  的解为:  $q_{11} = A(T_1) e^{i\omega_1 T_0} + cc$ ,  $q_{21} = B(T_1) e^{i\omega_2 T_0} + cc$ ; 外激励项和时滞部分为:  $f \cos(\omega T_0) = \frac{1}{2} f e^{i\omega T_0} + cc$ ,  $q_{11\tau} = A(T_1) e^{i\omega_1(T_0 - \tau)} + cc$ ,  $q_{21\tau} = B(T_1) e^{i\omega_2(T_0 - \tau)} + cc$  式中  $A$ 、 $B$  是关于  $T_1$  的未知函数,  $cc$  代表其前面各项的共轭, 后不赘述。将上述变换带入  $\varepsilon^1$  中可得:

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{12} + \omega_1^2 q_{12} &= \frac{1}{m_1 + r_1^2 m_2} \left\{ K_1 e^{i\omega_1 T_0} + K_2 e^{i\omega_2 T_0} + K_3 e^{3i\omega_1 T_0} + K_4 e^{3i\omega_2 T_0} + K_5 e^{i(-2\omega_1 + \omega_2) T_0} \right. \\ &+ K_6 e^{i(\omega_2 + 2\omega_1) T_0} + K_7 e^{iT_0(-\omega_1 + 2\omega_2)} + K_8 e^{iT_0(\omega_1 + 2\omega_2)} + K_9 e^{5i\omega_1 T_0} + K_{10} e^{5i\omega_2 T_0} + K_{11} e^{iT_0(4\omega_1 + \omega_2)} \\ &+ K_{12} e^{iT_0(-4\omega_1 + \omega_2)} + K_{13} e^{iT_0(3\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{14} e^{iT_0(-3\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{15} e^{iT_0(2\omega_1 + 3\omega_2)} + K_{16} e^{iT_0(-2\omega_1 + 3\omega_2)} \\ &+ K_{17} e^{iT_0(\omega_1 + 4\omega_2)} + K_{18} e^{iT_0(-\omega_1 + 4\omega_2)} + K_{19} e^{i\omega_1(T_0 - \tau)} + K_{20} e^{i\omega_2(T_0 - \tau)} + K_{21} e^{i\omega T_0} \left. \right\} + cc \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 q_{22} + \omega_2^2 q_{22} &= \frac{1}{m_2 + r_2^2 m_2} \left\{ K_{22} e^{i\omega_1 T_0} + K_{23} e^{i\omega_2 T_0} + K_{24} e^{3i\omega_1 T_0} + K_{25} e^{3i\omega_2 T_0} + K_{26} e^{i(-2\omega_1 + \omega_2) T_0} \right. \\ &+ K_{27} e^{i(\omega_2 + 2\omega_1) T_0} + K_{28} e^{iT_0(-\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{29} e^{iT_0(\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{30} e^{5i\omega_1 T_0} + K_{31} e^{5i\omega_2 T_0} + K_{32} e^{iT_0(4\omega_1 + \omega_2)} \\ &+ K_{33} e^{iT_0(-4\omega_1 + \omega_2)} + K_{34} e^{iT_0(3\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{35} e^{iT_0(-3\omega_1 + 2\omega_2)} + K_{36} e^{iT_0(2\omega_1 + 3\omega_2)} + K_{37} e^{iT_0(-2\omega_1 + 3\omega_2)} \\ &+ K_{38} e^{iT_0(\omega_1 + 4\omega_2)} + K_{39} e^{iT_0(-\omega_1 + 4\omega_2)} + K_{40} e^{i\omega_1(T_0 - \tau)} + K_{41} e^{i\omega_2(T_0 - \tau)} + K_{42} e^{i\omega T_0} \left. \right\} + cc \end{aligned} \quad (2b)$$

其中:

$$\begin{aligned} K_1 &= -2(m_1 + r_1^2 m_2) i\omega_1 D_1 A - \left[ c_2 r_1^2 + c_1 (r_1 - 1)^2 \right] i\omega_1 A - 10A^3 (r_1 - 1)^6 \bar{A}^2 k_n \\ &- 60A^2 B (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 \bar{A} \bar{B} k_n - 30AB^2 (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 \bar{B}^2 k_n \end{aligned}$$

$$K_{12} = -5B(r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) \bar{A}^4 k_n, \quad K_{19} = (r_1 - 1) iA\omega_1 g, \quad K_{21} = \frac{1}{2} f r_1$$

$$\begin{aligned}
K_{23} &= -2(m_1 + r_2^2 m_2) i\omega_2 D_1 B - \left[ c_2 r_2^2 + c_1 (r_1 - 1)^2 \right] i\omega_2 B - 30 A^2 B (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 \bar{A}^2 k_n \\
&\quad - 60 A B^2 (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 \bar{A} \bar{B} k_n - 10 B^3 (r_2 - 1) \bar{B}^2 k_n \\
K_{30} &= -A^5 (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n, \quad K_{41} = (r_2 - 1) i B \omega_2 g
\end{aligned}$$

#### 4. 振动方程的平衡解及其稳定性

根据某型飞机的参数[10]:  $m_1 = 16735 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 2400000 \text{ N/s}$ ,  $c_1 = 10000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。 $m_2 = 3145 \text{ kg}$ ,  $k_2 = 4800000 \text{ N/s}$ ,  $c_2 = 12000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。可得  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 48.3652 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 \approx 5\omega_1$ 。

主系统和副系统的振动都是由于轨道不平顺或者飞机下降时的动载荷引起的。这里我们主要研究如何改善主系统的振动状态, 根据线性系统的理论, 最恶劣的情况应当主系统出现共振, 此时外激励频率  $\omega = \omega_1$ , 在这种情况下时研究减振问题有重要的意义。对于弱非线性小阻尼小激励系统, 非线性因素使振幅峰值有微小的偏差, 但仍然可以在  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$  时研究分析。

在实际工程应用中, 由于制造技术和控制误差的影响使共振比例的控制出现不可避免的偏差, 因此引进解谐失调参数  $\sigma_1, \sigma_2$  用以表示减振带的大小, 当  $\omega_2$  接近  $\omega_1$  的 5 倍, 将发生 1:5 的内共振。当外激励频率  $\omega$  接近一阶模态频率  $\omega_1$  时, 有:  $\omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ ,  $\omega_2 = 5\omega_1 + \varepsilon\sigma_2$ 。将上式代入方程组(2)并观察方程组右端, 含  $e^{i\omega_1 T_0}$  和  $e^{i\omega_2 T_0}$  的项分别使第一和第二个方程的解产生期久项, 所以方程得可解条件并化简的:

$$\begin{aligned}
D_1 A &= \frac{1}{2(m_1 + r_1^2 m_2) i\omega_1} \left\{ - \left[ c_2 r_1^2 + c_1 (r_1 - 1)^2 \right] i\omega_1 A - 10 A^3 (r_1 - 1)^6 \bar{A}^2 k_n - 60 A^2 B (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 \bar{A} \bar{B} k_n \right. \\
&\quad \left. - 30 A B^2 (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 \bar{B}^2 k_n - 5 B (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) \bar{A}^4 k_n e^{i\sigma_2 T_1} + (r_1 - 1) i\omega_1 g A e^{-i\omega_1 \tau} + \frac{1}{2} r_1 f e^{i\sigma_1 T_1} \right\} \tag{3a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1 B &= \frac{1}{2(m_1 + r_2^2 m_2) i\omega_2} \left\{ - \left[ c_2 r_2^2 + c_1 (r_2 - 1)^2 \right] i\omega_2 B - 30 A^2 B (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 \bar{A}^2 k_n \right. \\
&\quad \left. - 60 A B^2 (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 \bar{A} \bar{B} k_n - 10 B^3 (r_2 - 1) \bar{B}^2 k_n - A^5 (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n e^{-i\sigma_2 T_1} + (r_2 - 1) i B \omega_2 g e^{-i\omega_2 \tau} \right\} \tag{3b}
\end{aligned}$$

上述方程组的解可以写成:

$$A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{i\theta_1(T_1)}, A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{-i\theta_1(T_1)}, B(T_1) = \frac{b(T_1)}{2} e^{i\theta_2(T_1)}, B(T_1) = \frac{b(T_1)}{2} e^{-i\theta_2(T_1)}$$

代入方程组(3)并将上式分离实部虚部, 令  $\phi_1 = \theta_2 - 5\theta_1 + \sigma_2 T_1$ ,  $\phi_2 = \sigma_1 T_1 - \theta_1$ 。同时为了确定对应的稳态运动的定常解振幅和相位以判断平衡解的稳定性。设:  $s_1 = a \cos \phi_2$ ,  $d_1 = a \sin \phi_2$ ,  $s_2 = b \cos(\phi_1 - 5\phi_2)$ ,  $d_2 = b \sin(\phi_1 - 5\phi_2)$ , 得到:

$$\begin{aligned}
s'_1 &= a' \cos \phi_2 - a \phi'_2 \sin \phi_2 = \frac{1}{(m_1 + r_1^2 m_2) \omega_1} \left\{ - \left[ c_2 r_1^2 + c_1 (r_1 - 1)^2 \right] \frac{s_1 \omega_1}{2} - (m_1 + r_1^2 m_2) \omega_1 \sigma_1 d_1 \right. \\
&\quad + \frac{5(s_1^2 + d_1^2)^2}{16} (r_1 - 1)^6 d_1 k_n + \frac{15(s_1^2 + d_1^2)(s_2^2 + d_2^2)}{8} (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 d_1 k_n \\
&\quad + \frac{15(s_2^2 + d_2^2)^2}{16} (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 d_1 k_n - \frac{5}{32} (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n \left[ 4 d_1 s_1 (s_1^2 - d_1^2) s_2 + (s_1^2 - d_1^2)^2 d_2 - 4 s_1^2 d_1^2 d_2 \right] \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (r_1 - 1) \omega_1 g \left[ \cos(\omega_1 \tau) s_1 - d_1 \sin(\omega_1 \tau) \right] \right\} \tag{4a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_1 &= a' \sin \phi_2 + a \phi'_2 \cos \phi_2 \\
&= \frac{1}{(m_1 + r_1^2 m_2) \omega_1} \left\{ - \left[ c_2 r_1^2 + c_1 (r_1 - 1)^2 \right] \frac{d_1 \omega_1}{2} + (m_1 + r_1^2 m_2) \omega_1 \sigma_1 s_1 - \frac{5(s_1^2 + d_1^2)^2}{16} (r_1 - 1)^6 k_n s_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{15(s_1^2 + d_1^2)(s_2^2 + d_2^2)}{8} (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 k_n s_1 - \frac{15(s_2^2 + d_2^2)^2}{16} (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 k_n s_1 \right. \\
&\quad \left. - \frac{5}{32} (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n \left[ s_2 (s_1^2 - d_1^2)^2 - 4d_1^2 s_1^2 s_2 - 4d_1 d_2 s_1 (s_1^2 - d_1^2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (r_1 - 1) \omega_1 g \left[ \sin(\omega_1 \tau) s_1 + \cos(\omega_1 \tau) d_1 \right] + \frac{1}{2} r_1 f \right\} \tag{4b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s'_2 &= b' \cos(\phi_1 - 5\phi_2) - b(\phi'_1 - 5\phi'_2) \sin(\phi_1 - 5\phi_2) \\
&= \frac{1}{(m_1 + r_2^2 m_2) \omega_2} \left\{ - \left[ c_2 r_2^2 + c_1 (r_2 - 1)^2 \right] \frac{s_2 \omega_2}{2} - (m_1 + r_2^2 m_2) \omega_2 d_2 (\sigma_2 - 5\sigma_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{15(s_1^2 + d_1^2)^2}{16} (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 k_n d_2 - \frac{15(s_1^2 + d_1^2)(s_2^2 + d_2^2)}{8} (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 k_n d_2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{5(s_2^2 + d_2^2)^2}{16} (r_2 - 1) k_n d_2 - \frac{1}{32} (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n \left[ 4d_1^3 s_1^2 - 4d_1^5 - 8d_1 s_1^4 + 3(s_1^2 + d_1^2)^2 d_1 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} (r_2 - 1) \omega_2 g \left[ \sin(\omega_2 \tau) d_2 + \cos(\omega_2 \tau) s_2 \right] \right\} \tag{4c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d'_2 &= b' \sin(\phi_1 - 5\phi_2) + b(\phi'_1 - 5\phi'_2) \cos(\phi_1 - 5\phi_2) \\
&= \frac{1}{(m_1 + r_2^2 m_2) \omega_2} \left\{ - \left[ c_2 r_2^2 + c_1 (r_2 - 1)^2 \right] \frac{d_2 \omega_2}{2} + (m_1 + r_2^2 m_2) \omega_2 (\sigma_2 - 5\sigma_1) s_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{15(s_1^2 + d_1^2)^2}{16} (r_1 - 1)^4 (r_2 - 1)^2 k_n s_2 + \frac{15(s_1^2 + d_1^2)(s_2^2 + d_2^2)}{8} (r_1 - 1)^2 (r_2 - 1)^4 k_n s_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{5(s_2^2 + d_2^2)^2}{16} (r_2 - 1) k_n s_2 + \frac{1}{32} (r_1 - 1)^5 (r_2 - 1) k_n \left[ 4s_1^5 - 4s_1^3 d_1^2 + 8d_1^4 s_1 - 3(s_1^2 + d_1^2)^2 s_1 \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} (r_2 - 1) \omega_2 g \left[ \sin(\omega_2 \tau) s_2 - \cos(\omega_2 \tau) d_2 \right] \right\} \tag{4d}
\end{aligned}$$

当  $\varepsilon$  很小时, 主系统和副系统的位移可以表示成如下的形式:

$$x_1 = q_1 + q_2 = q_{11} + q_{21} + \varepsilon (q_{12} + q_{22}) + \dots \approx a \cos[\omega_1 T_0 + \theta_1(T_1)] + b \cos[\omega_2 T_0 + \theta_2(T_1)] \tag{5a}$$

$$x_2 = r_1 q_1 + r_2 q_2 = r_1 q_{11} + r_2 q_{21} + \varepsilon (r_1 q_{12} + r_2 q_{22}) + \dots \approx r_1 a \cos[\omega_1 T_0 + \theta_1(T_1)] + r_2 b \cos[\omega_2 T_0 + \theta_2(T_1)] \tag{5b}$$

为了分析平衡解的稳定性, 对方程组(4)进行摄动分析, 摄动方程可以表示为:  $\{\Delta s'_1, \Delta d'_1, \Delta s'_2, \Delta d'_2\}^T = [J] \{\Delta s_1, \Delta d_1, \Delta s_2, \Delta d_2\}^T$ , 其中  $T$  代表转置矩阵,  $[J]$  是 Jacobin 矩阵。对应的平衡点的特征方程可以表示为:  $\lambda^4 + \mu_1 \lambda^3 + \mu_2 \lambda^2 + \mu_3 \lambda + \mu_4 = 0$ , 方程中  $\lambda$  代表矩阵  $[J]$  的特征值,  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  为特征方程的系数。依据 Routh-Hurwitz 准则判断方程组的解的稳定性。系统稳定的充分必要条件是:

$$\mu_1 > 0, \mu_1 \mu_2 - \mu_3 > 0, \mu_3 (\mu_1 \mu_2 - \mu_3) - \mu_1^2 \mu_4 > 0, \mu_4 > 0 \tag{6}$$

## 5. 非线性系统时滞反馈的控制研究

确定最佳减振的外激励的频率：由线性系统的结论，研究在共振点附近的非线性系统振幅变化最有价值。但在弱非线性系统的共振点可能会有微小的变化，所以通过  $\varepsilon\sigma_1$  微小的变化使外激励频率集中在  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$  附近变化研究。为了分析时滞反馈对系统减振的作用，选择非线性刚度系数  $k_n = 1000 \text{ N/m}^5$ ，外激励振幅  $f = 100000 \text{ N}$ ，时滞反馈系数  $g = -5000 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ 。由方程组(4)得到  $a - \tau$  和  $b - \tau$  变化图，如图 2~7 所示。系统的稳定性由方程(6)确定。

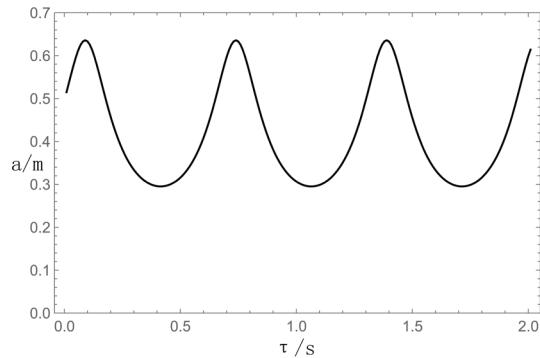


Figure 2.  $\omega = \omega_1 - \varepsilon\sigma_1$

图 2.  $\omega = \omega_1 - \varepsilon\sigma_1$

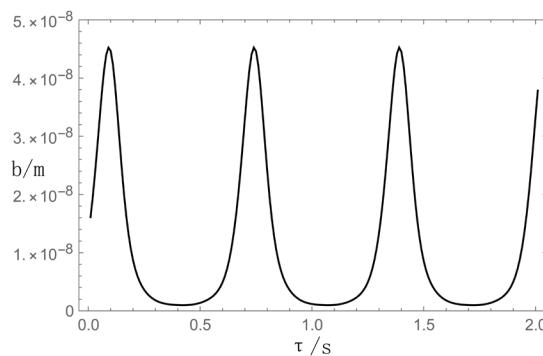


Figure 3.  $\omega = \omega_1 - \varepsilon\sigma_1$

图 3.  $\omega = \omega_1 - \varepsilon\sigma_1$

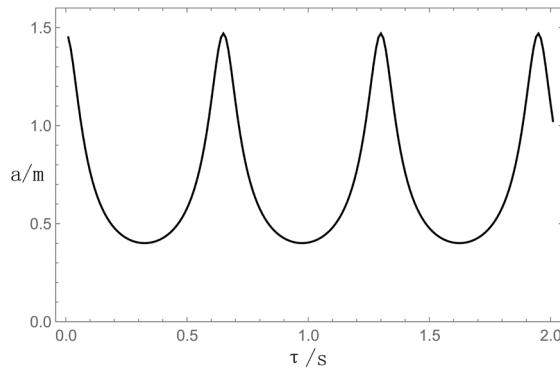
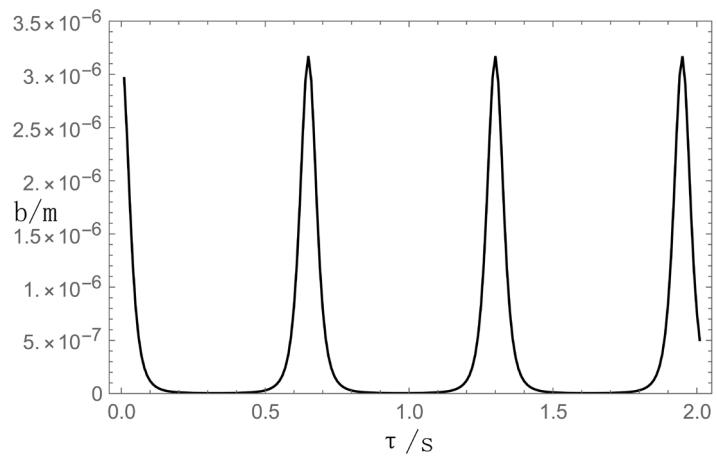
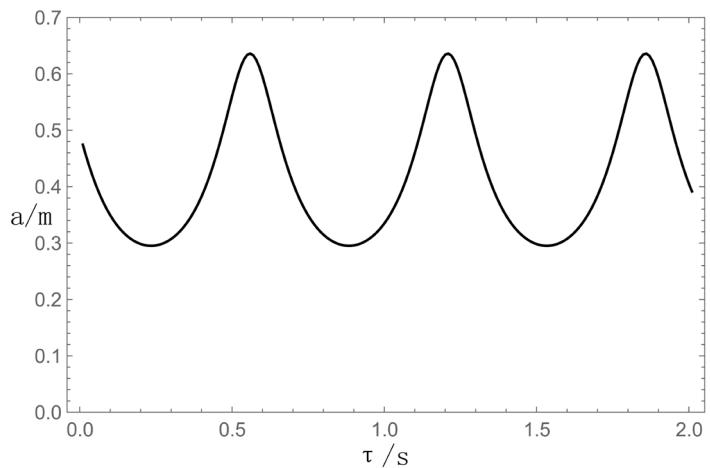
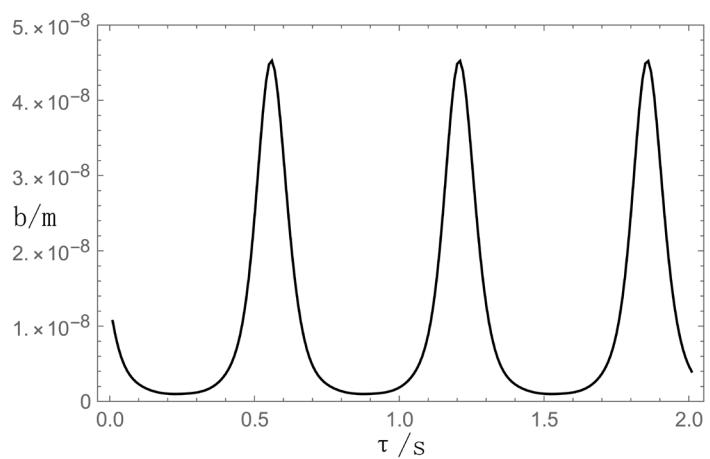


Figure 4.  $\omega = \omega_1$

图 4.  $\omega = \omega_1$

**Figure 5.**  $\omega = \omega_i$ **图 5.**  $\omega = \omega_i$ **Figure 6.**  $\omega = \omega_i + \epsilon \sigma_i$ **图 6.**  $\omega = \omega_i + \epsilon \sigma_i$ **Figure 7.**  $\omega = \omega_i + \epsilon \sigma_i$ **图 7.**  $\omega = \omega_i + \epsilon \sigma_i$

通过上面的稳定性判定, 上述所示图的系统在  $\tau$  值范围内系统都是稳定的。

上述 6 张图, 其中图 2、图 4、图 6 的纵轴表示振幅  $a = \sqrt{s_1^2 + d_1^2}$ , 横轴表示时滞量  $\tau$ , 可以看出随时滞量  $\tau$  的变化  $a$  的值呈周期性波浪形变化。图 3、图 5、图 7 的纵轴表示振幅  $b = \sqrt{s_2^2 + d_2^2}$ , 横轴表示时滞量  $\tau$ , 可以看出随时滞量  $\tau$  的变化  $b$  的值呈周期性类波浪形变化。与此同时, 图 2 和图 3 的外激励频率为  $\omega = \omega_1 - \varepsilon\sigma_1$ , 图 4 和图 5 的外激励频率为  $\omega = \omega_1$ , 图 6 和图 7 的外激励频率为  $\omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$ , 这里选取  $\varepsilon\sigma_1 = 0.2 \text{ rad/s}$ 。通过上述三组可以发现在  $\omega = \omega_1$  时振幅  $a$  的波动最大, 在  $\omega = \omega_1 + \varepsilon\sigma_1$  中振幅  $b$  的波动也最大。从而得到最佳减振频率  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$ 。

由于  $b$  的值相对与  $a$  的值过小, 再结合方程组(5), 可得到主系统的振幅基本上等于  $a$ , 副系统的振幅大约等于  $r_1 a$ ,  $b$  的变化不足以影响主系统的振幅(对副系统影响也比较微小), 所以对研究主系统(或副系统)振幅可以忽略振幅  $b$  的变化而只研究振幅  $a$  的变化情况。(同样得到最佳减振频率  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$ )。

确定最佳时滞反馈增益系数  $g$  和相应的时滞量  $\tau$ : 由于时滞项是对系统来说是小参数量, 所以在小参数理论允许的范围内改变时滞反馈增益系数  $g$  和时滞量  $\tau$  不足引起主系统(副系统)振动幅值的突变, 结合上文, 从而也不会引起  $b$  接近或超过  $a$  的高值突变。所以只需研究  $a$  (即主系统振幅) 的变化来确定最佳时滞项中的  $g$  和  $\tau$ 。故选择  $k_n = 1000 \text{ N/m}^5$ ,  $f = 100000 \text{ N}$ ,  $\omega_1 = 9.6732 \text{ rad/s}$  得到  $a - \tau$  图 8 和图 9 如下。

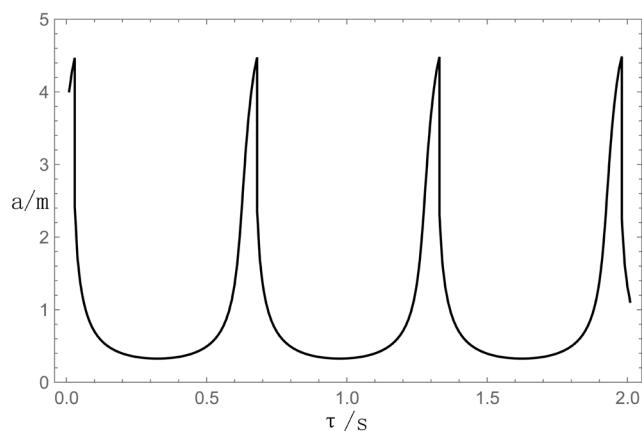


Figure 8.  $g = -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

图 8.  $g = -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

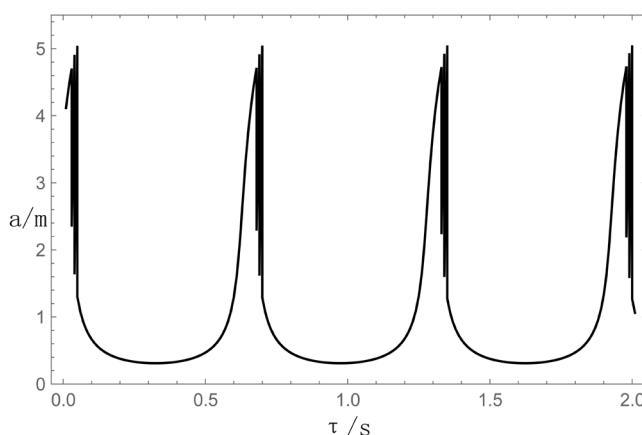


Figure 9.  $g > -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

图 9.  $g > -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

通过上面的稳定性判定, 上述所示图 8 的系统在  $\tau$  值范围内系统是稳定的。

随着反馈增益系数  $g$  的绝对值不断增大, 振幅  $a - \tau$  响应曲线的“最大减振点”减小(图 8,  $g = -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ ), 这表明非线性系统中时滞项的控制吸振能力增强。然而, 继续增大反馈增益系数, 振幅  $a - \tau$  响应曲线的开始不稳定(图 9,  $g > -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ , 考虑到实际加工的误差和应有足够稳定的范围, 故精确到百位), 这说明, 时滞项在可接受的稳定范围内存在一个最佳反馈增益系数, 使得主系统的减振效果可以达到最好。通过图 4、图 8 和图 9 的对比观察和多次计算, 时滞项的最佳反馈增益系数为  $g \approx -8100 \text{ N} \cdot \text{s/m}$ 。

在图 8 中, 我们可以观察到, 随着时滞的增大, 振幅  $a$  的值逐步减小, 当时滞量  $\tau \approx 0.32 \text{ s}$  时, 振幅达到一个极小值。进一步增加时滞量, 振幅  $a$  的值又开始增加, 当时滞量  $\tau \approx 0.68 \text{ s}$  时, 振幅达到一个极大值。这表明, 对某一反馈增益系数存在一个“最大减振点”, 对该反馈增益系数下振幅  $a$  的最小值, 此时主系统的减振效果达到最好。

最后, 为了与无时滞项的被动系统的振动进行对比, 同时也为了验证上述理论预测的正确性, 我们取  $f = 100000 \text{ N}$ ,  $k_n = 1000 \text{ N/m}^5$  和  $g = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$  得到无时滞项的被动系统的振动图 10 和图 11。

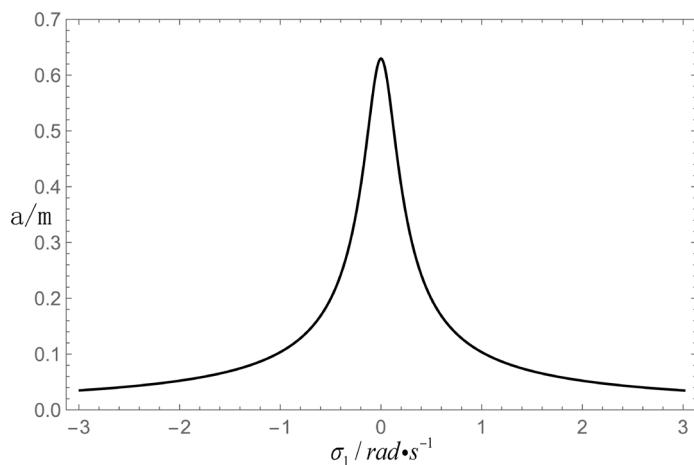


Figure 10.  $g = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

图 10.  $g = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

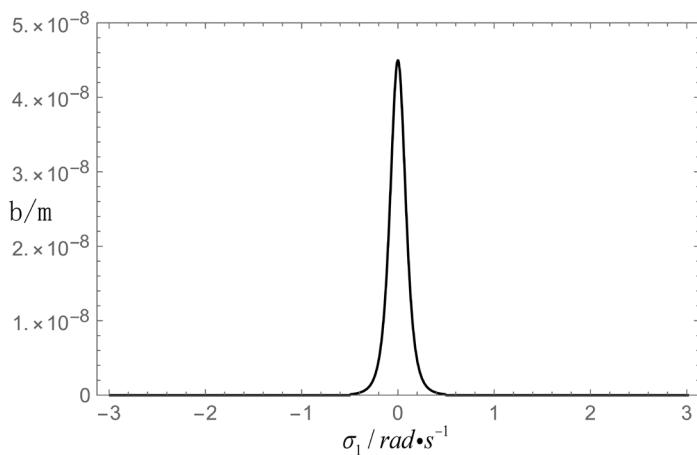


Figure 11.  $g = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

图 11.  $g = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}$

通过上面的稳定性判定，在上述所示图的系统都是稳定的。

从图 10 中可以看到振幅  $a$  也是在  $\varepsilon\sigma_1 = 0 \text{ rad/s}$  时达到最大值且  $a \approx 0.6296 \text{ m}$ ，同时相对与  $a$ ， $b$  的值依然很小。对比图 8 再结合方程组(5)可以发现：当选取合适的时滞量  $\tau$  (这里  $\tau \approx 0.32 \text{ s}$ ) 主系统即飞机机体出现最小的振动幅值，振动幅值比被动非线性系统振幅约小  $0.3026 \text{ m}$  这表明时滞控制对飞机机体的振动有抑制优化作用，与非线性被动系统相比优化幅度约为 48%。相反的，当选取不合适的时滞量  $\tau$  ( $\tau \approx 0.68 \text{ s}$ ) 飞机体的振幅相比被动系统的振幅约大  $3.8463 \text{ m}$ ，表明时滞控制对机体的振动有加强恶化的作用。

## 6. 结论

本文将飞机起落架起落系统(机体和起落架)建立二自由度非线性系统模型，并利用时滞反馈主动控制对系统进行减振，其中以飞机机体减振为主。结合实际参数利用多尺度法分析求解验证，主要得到以下结论：

- 1) 当反馈增益系数为某一定值时，在稳定范围内存在某些时滞量区间，时滞反馈控制可以对机体进行减振。并且存在一个“最大减振点”的时滞量，可以将机体的振动减到这一反馈增益系数下的最小。
- 2) 不同的反馈增益系数，其“最大减振点”对应机体的振幅也不同。当反馈增益系数在系统稳定的范围内改变时，可以找到一个最佳的反馈增益系数和对应的最佳时滞量，将机体的振动减到最小。
- 3) 在最佳时滞项下，与无时滞项的非线性被动系统相比，飞机机体的减振幅度约达 48%，这说明时滞反馈控制对机体减振的有效性。
- 4) 本文中时滞项中的反馈增益系数和时滞量都是定值，不能随时间和外激励的情况而变化，而且当反馈增益系数和时滞量不断增大时，系统会越来越不稳定。同时，在系统稳定的区域内也存在某些区间会使机体振动变得更加剧烈。所以，时滞反馈控制具有一定的局限性。
- 5) 本文的参数是基于小参数法思想，得到的解只是近似的解析解，故计算结果与实际结果会存在一定的误差。

## 基金项目

国家自然科学基金资助项目：11372125。

江西自然科学基金资助项目：20161BAB101005。

江西省教育厅资助项目：DB201606020。

江西省研究生创新专项资金项目：YC2017-S333。

## 参考文献 (References)

- [1] 贾玉红, 郭可谦. 飞机起落架的发展[C]. 第一届中日机械技术史国际学术会议. 北京: 机械工业出版社, 1998.
- [2] 聂宏. 起落架缓冲性能分析与设计及其寿命计算方法[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 1990.
- [3] 马魁江. 飞机起落架结构耐久性设计[D]: [博士学位论文]. 南京: 南京航空航天大学, 2008.
- [4] 隋福成, 王成波. 飞机起落架延长使用寿命研究的新途径[J]. 沈阳飞机设计研究所, 2008, 62(8): 336-339.
- [5] Olgac, N., McFarland, D.M. and Holm-Hansen, B.T. (1992) Position Feedback-Induced Resonance: The Delayed Resonator. *Winter Annual Meeting*, **38**, 113-119.
- [6] Renzulli, M.E., Roy, R.G. and Olgac, N. (1999) Robust Control of Delayed Resonator Vibration Absorber. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **7**, 683-691. <https://doi.org/10.1109/87.799669>
- [7] Olgac, N., Hosek, M., et al. (1997) Active Vibration Absorption Using Delayed Resonator With Relative Position Measurement. *Journal of Vibration & Acoustics*, **119**, 131-136. <https://doi.org/10.1115/1.2889680>

- 
- [8] Filipović, D. and Olgac, N. (2002) Delayed Resonator with Speed Feedback-Design and Performance. *Mechatronics*, **12**, 393-413. [https://doi.org/10.1016/S0957-4158\(00\)00065-9](https://doi.org/10.1016/S0957-4158(00)00065-9)
  - [9] Shin, Y.H., *et al.* (2010) Three Degrees of Freedom Active Control Of Pneumatic Vibration Isolation Table by Pneumatic and Time Delay Control Technique. *Journal of Vibration and Acoustics*, **132**, Article ID: 051013. <https://doi.org/10.1115/1.4001509>
  - [10] 薛华鑫. 飞机滑行状态下振动频率响应分析[D]: [硕士学位论文]. 天津: 中国民航大学, 2014.

---

**Hans** 汉斯

期刊投稿者将享受如下服务:

- 1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
- 2. 为您匹配最合适的期刊
- 3. 24 小时以内解答您的所有疑问
- 4. 友好的在线投稿界面
- 5. 专业的同行评审
- 6. 知网检索
- 7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [jast@hanspub.org](mailto:jast@hanspub.org)