

一种求解机组组合问题的分支定界方法

张志强, 全 然

河南工业大学数学与统计学院, 河南 郑州

收稿日期: 2025年1月22日; 录用日期: 2025年3月12日; 发布日期: 2025年3月21日

摘 要

文章提出一种求解机组组合问题的分支定界方法。利用热率和透视割平面将机组组合模型做近似线性化处理, 将混合整数二次规划转化为混合整数线性规划进行求解。为提高分支定界的计算效率, 进行上层变量固定并优先搜索机组启停状态最接近0.5的节点。数值结果表明, 此法与直接求解混合整数二次规划的发电费用相当, 但计算时间占优, 适合求解大规模机组组合问题。

关键词

机组组合, 分支定界, 热率, 透视割平面

A Branch and Bound Method for Solving Unit Commitment Problem

Zhiqiang Zhang, Ran Quan

School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: Jan. 22nd, 2025; accepted: Mar. 12th, 2025; published: Mar. 21st, 2025

Abstract

This paper presents a branch and bound method for solving the unit commitment (UC) problem. The UC model is approximated to linear models by using the heat rate and perspective cutting plane, and the mixed integer quadratic programming model is transformed into mixed integer linear programming. In order to improve the computing efficiency of the branch and bound, the upper-level variables are fixed and the node closest to the value of 0.5 is searched first. Numerical results show that the generation costs by the proposed method are almost equivalent to the ones by directly solving the mixed integer quadratic programming of UC. However, the proposed method has an advantage in terms of computation time and is suitable for solving large-scale UC problems.

Keywords

Unit Commitment, Branch and Bound, Heat Rate, Perspective Cutting Plane

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

机组组合(Unit commitment, UC)是电力系统规划和运行中的一类重要问题,其目标为在满足电力系统要求和机组技术限制的情况下,最小化系统总运行成本。该问题为复杂的大规模混合整数二次规划(Mixed integer quadratic programming, MIQP) [1]。

几十年来,研究人员针对 UC 问题已提出诸多求解方法,这些方法大致可分为人工智能算法和数学优化算法。人工智能算法主要包括粒子群优化算法[2]、遗传算法[3]、模拟退火算法[4]、进化算法[5]和人工神经网络算法[6]等。人工智能算法属于随机搜索方法,容易陷入局部最优解,计算效率不能得到稳定的保障。数学优化算法主要包括分支定界法(Branch and bound, BB) [7] [8]、优先顺序(Priority list, PL) [9] [10]、动态规划法(Dynamic programming, DP) [11]、拉格朗日松弛算法(Lagrangian relaxation, LR) [12] [13]、Benders 分解法(Benders decomposition, BD) [14]、外逼近法(Outer approximation, OA) [15]、内外逼近法(Outer-inner approximation, OIA) [16]、交替方向乘子法(Alternating direction method of multipliers, ADMM) [17]和混合整数线性规划法(Mixed integer linear programming, MILP) [18]-[20]。数学优化算法作为求解 UC 问题的经典算法,多年来在求解 UC 问题上已得到广泛应用。其中,PL 法是优先投入最经济的机组来满足 UC 问题的约束条件,收敛速度快。DP 法通过搜索机组启停状态形成的解空间来寻求 UC 问题的最优解,可得到中等规模 UC 问题的全局最优解。LR 法将 UC 问题分解为若干单机组子问题进行求解,避免了决策变量过多造成的困难,可获得质量较好的次优解。BD 法将所求解问题分解为主问题和子问题进行交替求解,并在求解过程中加入可行割平面或最优割平面,以加快问题的求解速度。OA 法和 OIA 法与 BD 法类似,都是将原问题分解为相对容易求解的主问题和子问题,从而得到 UC 问题高质量的可行解。MILP 法致力于将 UC 问题近似为 MILP 模型,可在合理时间内获得 UC 问题的高质量次优解。由于混合整数规划求解器求解能力的飞速提高,MILP 法成为目前求解 UC 问题的主流方法。

BB 法通过求解一系列由原问题剖分形成的子问题来获得所求问题的全局最优解。它最初由 Land 和 Doig 在文献[21]中提出,该方法是通过松弛、分支、定界和剪枝进行求解。但 BB 法本质上是一种枚举法,其计算时间随问题规模呈指数式变化。为提高 BB 法的计算效率,人们围绕确定上下界策略进行了深入研究,包括割平面、预处理和启发式等[22] [23]。文[8]提出一种求解 UC 问题的 BB 法,不考虑机组的优先顺序,可直接处理和时段相关联的启动费用,并且能处理随机备用约束。文[24]考虑了机组备用和电力交易合同问题,并采用 BB 法求解。

本文利用热率和透视割平面将机组组合模型做近似线性化处理,将混合整数二次规划转化为混合整数线性规划进行求解。为提高 BB 法的计算效率,进行上层变量固定并优先搜索机组启停状态最接近 0.5 的节点。数值结果表明,此法与直接求解混合整数二次规划的发电费用相当,但从时间方面来看优势明显,适合求解大规模机组组合问题。

2. UC 问题的数学模型

UC 问题的目标函数为:

$$\min F = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left[f_i(u_{i,t}, P_{i,t}) + C_{i,t} \right] \quad (1)$$

其中, T 为研究时段数; N 为研究机组数; $0 \sim 1$ 变量 $u_{i,t}$ 为机组 i 在 t 时段的运行状态, 值为 1 时为运行状态, 值为 0 时为停机状态; $f_i(u_{i,t}, P_{i,t}) = \alpha_i u_{i,t} + \beta_i P_{i,t} + \gamma_i (P_{i,t})^2$ 为机组 i 在 t 时段的煤耗成本, α_i 、 β_i 、 γ_i 为煤耗系数; $P_{i,t}$ 为机组 i 在 t 时段的出力; $C_{i,t}$ 为机组 i 在 t 时段的启动费用。

UC 问题的约束条件如下:

1) 出力的约束条件

$$u_{i,t} \underline{P}_i \leq P_{i,t} \leq u_{i,t} \bar{P}_i, \quad \forall i, t \quad (2)$$

其中 $\underline{P}_i$, $\bar{P}_i$ 为机组 i 出力的上下限。

2) 功率平衡的约束条件

$$\sum_{i=1}^N P_{i,t} - P_{D,t} = 0, \quad \forall t \quad (3)$$

其中 $P_{D,t}$ 为时段 t 系统的总负荷。

3) 旋转备用的约束条件

$$\sum_{i=1}^N u_{i,t} \bar{P}_i \geq P_{D,t} + R_t, \quad \forall t \quad (4)$$

其中 R_t 为时段 t 系统的旋转备用。

4) 最小启停时间的约束条件

$$\begin{cases} \sum_{s=t-\underline{T}_{on,i}+1}^t v_{i,s} - u_{i,t} \leq 0, \quad \forall i, t \in [\underline{T}_{on,i}, T] \\ \sum_{s=t-\underline{T}_{off,i}+1}^t w_{i,s} + u_{i,t} \leq 1, \quad \forall i, t \in [\underline{T}_{off,i}, T] \\ v_{i,t} - w_{i,t} = u_{i,t} - u_{i,t-1}, \quad \forall i, t \\ 0 \leq v_{i,t} \leq 1, \quad 0 \leq w_{i,t} \leq 1, \quad \forall i, t \end{cases} \quad (5)$$

其中 $v_{i,t}$ 为机组 i 在 t 时段的启动状态, 如果机组 i 在 t 时段启动, 则 $v_{i,t} = 1$, 否则 $v_{i,t} = 0$; $w_{i,t}$ 为机组 i 在 t 时段的停机状态, 如果机组 i 在 t 时段关闭, 则 $w_{i,t} = 1$, 否则 $w_{i,t} = 0$; $\underline{T}_{on,i}$ 为机组 i 的最小运行时间; $\underline{T}_{off,i}$ 为机组 i 的最小停机时间。

5) 启动费用的约束条件

$$\begin{cases} C_{i,t} \geq C_{hot,i} v_{i,t}, \quad \forall i, t \\ C_{i,t} \geq C_{cold,i} \left[v_{i,t} - \sum_{s=t-\underline{T}_{off,i}-\underline{T}_{cold,i}}^t w_{i,s} \right], \quad \forall i, t \end{cases} \quad (6)$$

其中 $C_{hot,i}$, $C_{cold,i}$, $\underline{T}_{cold,i}$ 分别为机组 i 的热启动费用、冷启动费用和冷启动时间。

综上所述, UC 问题的数学模型为如下 MIQP:

$$\begin{aligned} \min F &= \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \left[f_i(u_{i,t}, P_{i,t}) + C_{i,t} \right] \\ \text{s.t.} & \quad (2)-(6) \end{aligned} \quad (7)$$

3. UC 问题的线性化模型

由于前述 UC 问题的数学模型(7)为大规模的 MIQP, 用 BB 法直接求解计算量过大。为了减少计算量, 本文基于透视割平面[10] [18], 将(7)近似为一个 MILP 进行求解。

根据文献[18]中的透视割平面, 可将式(7)中二次函数 $f_i(u_{i,t}, P_{i,t}) = \alpha_i u_{i,t} + \beta_i P_{i,t} + \gamma_i (P_{i,t})^2$ 近似为线性形式 $P_{i,t}(2\gamma_i \xi_i + \beta_i) + u_{i,t}(\alpha_i - \gamma_i \xi_i)$, 这里 ξ_i 为 $[P_i, \bar{P}_i]$ 上的一个断点, 从而可得到 UC 问题一个近似的 MILP 模型, 称之为透视割平面模型(Perspective cut formulation, PCF), 其形式如下:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N [P_{i,t}(2\gamma_i \xi_i + \beta_i) + u_{i,t}(\alpha_i - \gamma_i \xi_i) + C_{i,t}] \\ \text{s.t.} & (2)-(6) \end{aligned} \quad (8)$$

为了改进 BB 方法中的上界, 加快其收敛速度, 本文采用文[10]中改进优先顺序的 MILP 形式, 称之为改进优先顺序(Improved priority list, IPL), 具体如下:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^N \sigma_i u_{i,t} \\ \text{s.t.} & (4), (5) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, $\sigma_i = f_i(1, \bar{P}_i) / \bar{P}_i$, 称为机组的热率。

4. 算法研究

4.1. 分层固定策略

为解决传统分支定界(BB)算法中分支过多的问题, 本文提出一种分层固定策略。BB 算法在求解前先基于一定策略固定部分变量的取值, 固定部分的变量称为上层变量, 本文采用如下策略:

$$u_{i,t} = \begin{cases} 0, & u_{i,t} \leq \theta \\ 1, & u_{i,t} \geq 1 - \theta \end{cases}$$

其中 θ 为取整阈值, 本文 θ 取值为 0.001。

4.2. 节点搜索策略

BB 法结构严谨, 是一种确定性的全局优化方法, 其本质是枚举法。BB 法通过不断的分支、定界和剪支并最终获得最优解, 不同的节点搜索策略将导致不同的算法执行效率。本文的搜索策略为优先处理机组启停状态最接近 0.5 的节点。

4.3. 松弛策略

为优化得到的初始解, 现提出一种松弛策略, 即松弛相邻时段机组启停状态发生改变的变量取值, 即 $u_{i,t} = 0, u_{i,t+1} = 1$ (开启机组) 或 $u_{i,t} = 1, u_{i,t+1} = 0$ (关闭机组)。在计算过程中发现, 松弛关闭机组对初始解的优化相较于松弛开启机组的效果更好, 并且用时更短。

4.4. BB 算法

步骤 1: 输入问题 R , 设置上界 $c' = +\infty$ 。

步骤 2: 构建 BB 列表 L , 并将 R 存入其中。

步骤 3: 若 $L = \emptyset$, 停止运算, 输出最优解 $x_* = x'$ 和目标值 $c_* = c'$; 若 R 无解, 目标值 $c_* = +\infty$ 。

步骤 4: 选择问题 $Q \in L$, 令 $L = L / \{Q\}$ 。

步骤 5: 求解 Q 的连续松弛问题 Q_{relax} , 若 Q_{relax} 不可行, 令 $c'' = +\infty$; 否则, 令 x'' 为 Q_{relax} 的最优解, c'' 为 Q_{relax} 的目标值。

步骤 6: 若 $c'' \geq c'$, 转入步骤 3。

步骤 7: 若 x'' 是 R 的可行解。令 $x' = x'', c' = c''$, 转入步骤 3。

步骤 8: 将 Q 划分为一系列子问题 $Q_1, \dots, Q_k$ 。令 $L = L \cup \{Q_1, \dots, Q_k\}$, 转入步骤 4。

4.5. BBM 算法

BBM 算法是在 BB 算法的基础上加入松弛、固定求解的一种算法。BBM 算法先求解 IPL 模型的松弛问题, 得到可行解, 根据可行解的情况通过松弛、固定再求解的过程将可行解进行优化, 得到原问题质量较高的次优解, 具体算法步骤如下。

步骤 1: 求解 $\text{IPL}_{\text{relax}}$, 记其解为 $u = (u_{i,t})$ 。若 $u_{i,t} \in \{0,1\}$, 令 $u_{i,t}^* = u_{i,t}$, 转入步骤 4。

步骤 2: 若 $u_{i,t} \geq 1 - \theta$, 令 $u_{i,t} = 1$; 若 $u_{i,t} \leq \theta$, 令 $u_{i,t} = 0$ 。若对于 $\forall i, t$, $u_{i,t} \in \{0,1\}$, 令 $u_{i,t}^* = u_{i,t}$, 转入步骤 4。

步骤 3: 将步骤 2 中 $u_{i,t}$ 取值为 0、1 的变量固定在相应取值处, 运用 3.4 节的 BB 算法求解 IPL, 记其解为 $u^* = (u_{i,t}^*)$ 。

步骤 4: 利用 $u_{i,t}^*$ 产生 $N \times T$ 的矩阵 U , 其第 i 行的元素依次为 $u_{i,1}^*, u_{i,2}^*, \dots, u_{i,T}^*$ 。

步骤 5: 将最小启停时间相同的机组归为一类, 记为 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 。令 $W = 1$ 。

步骤 6: 松弛 i_w 中的开启机组和 $i_1, i_2, \dots, i_n$ 中的关闭机组。

步骤 7: 将松弛之后的可行解代入 PCF, 求解 $\text{PCF}_{\text{relax}}$, 记其解为 $u^* = (u_{i,t}^*)$ 。

步骤 8: $W = W + 1$ 。若 $W \leq n$, 转入步骤 6。

步骤 9: 若 $u_{i,t}^* \geq 1 - \theta, u_{i,t}^* = 1$; 若 $u_{i,t}^* \leq \theta, u_{i,t}^* = 0$ 。若对于 $\forall i, t$, $u_{i,t}^* \in \{0,1\}$, 令 $u' = u_{i,t}^*$, 转入步骤 11。

步骤 10: 运用 BB 求解 PCF, 记其解为 $u' = (u_{i,t})$ 。

步骤 11: 利用机组的启停状态 u' 进行经济调度。

需要说明的是, BBM 算法的步骤 1 到步骤 4 是为了产生一个可行解, 步骤 5 到步骤 8 是将所有开启机组松弛一遍来获得更高质量的可行解。

5. 结果分析

本文机组系统数据选自文献[9], 基于 Matlab R2018b, 调用 CPLEX 12.5 求解 MIQP 问题和线性规划问题, CPLEX 求解 MIQP 时精度设置为 0.1%。计算机配置为 Intel Core i7-10750 CPU@2.6GHz 8GB DDR4。

表 1 给出所提 BBM 算法的运算结果。由表 1 可知, 对于所有系统, 所提算法均在 4 秒内运行完毕, 说明所提算法收敛速度快。这主要得益于两个方面的原因: 第一个方面的原因是所给 UC 问题的数学模型是一种比较紧的描述, 逼近问题的凸包; 第二个方面的原因是, 本文所提的启发式方法有效, 加快了算法的收敛速度。

Table 1. Results of the proposed algorithm BBM

表 1. 本文所提 BBM 算法的计算结果

机组数	10	20	40	60	80	100
运行时间/s	0.14	0.49	1.16	1.34	2.80	3.62
运行成本/\$	563,977	1,124,410	2,242,749	3,361,944	4,480,861	5,600,465

表 2 给出所提方法与其他 7 种方法的计算结果比较，表中粗体部分表示对应各个机组系统的最小发电总费用。由表 2 可知，对于大部分机组系统，所提 BBM 方法获得的发电总费用最小，说明所提方法有效。需要说明的是，文[15]和[20]中的方法为 MILP 方法，均只给出部分机组系统的计算结果。

Table 2. Comparison of the different methods
表 2. 不同方法的计算结果比较

机组数	10	20	40	60	80	100
LBB [7]	564,310	1,128,550	2,257,226	3,382,440	4,507,675	5,635,451
EPL [9]	563,977	1,124,369	2,246,508	3,366,210	4,489,322	5,608,440
IPL [10]	563,977	1,124,458	2,243,080	3,362,815	4,481,664	5,600,988
LR [13]	566,107	1,128,362	2,250,223	3,374,994	4,496,729	5,620,305
DPLR [12]	565,508	1,126,720	2,249,792	3,371,188	4,494,487	5,615,893
MILP [20]	-	-	-	-	-	5,602,253
PCF [15]	-	-	2,243,252	3,360,939	4,482,548	5,600,763
BBM	563,977	1,124,410	2,242,749	3,361,944	4,480,861	5,600,465

表 3 给出与直接求解 UC 问题 MIQP 模型的计算结果比较。表中相对误差为：运算结果与直接求解 MIQP 模型的运行结果的差再除以运算结果。从发电总费用上看，对于 10 机组、20 机组和 100 机组系统，BBM 法所求的计算结果稍逊于 MIQP 方法；对于 40 机组、60 机组和 80 机组系统，BBM 法所求的计算结果略优于 MIQP 方法。但对于所有机组系统，两种方法的计算结果相当，差别不大。从运行时间上看，对于所有系统，所提 BBM 方法的计算时间占优，特别是大规模的 60 和 100 机组系统。综合发电总费用和计算时间可见，所提方法具有良好的收敛性，这主要得益于 UC 问题数学模型的紧性和所提启发式方法的有效性。

Table 3. Comparison of two algorithms
表 3. 两种计算方法的计算结果比较

机组数	总费用(\$)			计算时间(s)		
	BBM	MIQP	相对误差	BBM	MIQP	相对误差
10	563,977	563,938	0.0069%	0.14	0.37	-164%
20	1,124,410	1,123,297	0.0999%	0.49	0.89	-82%
40	2,242,749	2,242,873	-0.0055%	1.16	2.74	-136%
60	3,361,944	3,362,085	-0.0042%	1.34	35.35	-2538%
80	4,480,861	4,481,939	-0.0240%	2.80	5.1	-83%
100	5,600,465	5,600,323	0.0025%	3.62	31.24	-763%

6. 结论

本文在传统分支定界方法的基础上，提出了一些改进策略，提高了 UC 问题的求解效率。首先，依据机组的热率构建改进的优先顺序模型，优先开启热率较高的机组，获得 UC 问题质量较高的可行解，改善了 BB 法的上界。然后，利用透视割平面，将 MIQP 问题转化为 MILP 问题，进一步减小了问题求解的复杂度。为加速 BB 方法的收敛速度，对上层变量进行固定，并优先搜索机组启停状态最接近 0.5 的节

点。数值结果表明, 所提方法能在合理的计算时间内获得 UC 问题高质量的次优解, 具有良好的收敛性, 适合求解大规模 UC 问题。

基金项目

2021 年度河南工业大学自科创新基金支持计划项目(2020ZKCJ08)。

参考文献

- [1] Padhy, N.P. (2004) Unit Commitment—A Bibliographical Survey. *IEEE Transactions on Power Systems*, **19**, 1196-1205. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2003.821611>
- [2] Zhai, Y., Liao, X., Mu, N. and Le, J. (2019) A Two-Layer Algorithm Based on PSO for Solving Unit Commitment Problem. *Soft Computing*, **24**, 9161-9178. <https://doi.org/10.1007/s00500-019-04445-x>
- [3] Ponciroli, R., Stauff, N.E., Ramsey, J., Ganda, F. and Vilim, R.B. (2020) An Improved Genetic Algorithm Approach to the Unit Commitment/Economic Dispatch Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, **35**, 4005-4013. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2020.2986710>
- [4] Simopoulos, D.N., Kavatza, S.D. and Vournas, C.D. (2006) Unit Commitment by an Enhanced Simulated Annealing Algorithm. *IEEE Transactions on Power Systems*, **21**, 68-76. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2005.860922>
- [5] Singh, A., Khamparia, A. and Al-Turjman, F. (2024) A Hybrid Evolutionary Approach for Multi-Objective Unit Commitment Problem in Power Systems. *Energy Reports*, **11**, 2439-2449. <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2024.02.004>
- [6] Yin, L. and Ding, W. (2024) Deep Neural Network Accelerated-Group African Vulture Optimization Algorithm for Unit Commitment Considering Uncertain Wind Power. *Applied Soft Computing*, **162**, Article ID: 111845. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2024.111845>
- [7] 谢国辉, 张粒子, 舒隽, 等. 基于分层分枝定界算法的机组组合[J]. 电力自动化设备, 2009, 29(12): 29-32.
- [8] Cohen, A. and Yoshimura, M. (1983) A Branch-and-Bound Algorithm for Unit Commitment. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **102**, 444-451. <https://doi.org/10.1109/tpas.1983.317714>
- [9] Senjyu, T., Shimabukuro, K., Uezato, K. and Funabashi, T. (2003) A Fast Technique for Unit Commitment Problem by Extended Priority List. *IEEE Transactions on Power Systems*, **18**, 882-888. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2003.811000>
- [10] Quan, R., Jian, J. and Yang, L. (2015) An Improved Priority List and Neighborhood Search Method for Unit Commitment. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, **67**, 278-285. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2014.11.025>
- [11] Hou, J., Zhai, Q., Zhou, Y. and Guan, X. (2024) A Fast Solution Method for Large-Scale Unit Commitment Based on Lagrangian Relaxation and Dynamic Programming. *IEEE Transactions on Power Systems*, **39**, 3130-3140. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2023.3287199>
- [12] Ongsakul, W. and Petcharak, N. (2004) Unit Commitment by Enhanced Adaptive Lagrangian Relaxation. *IEEE Transactions on Power Systems*, **19**, 620-628. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2003.820707>
- [13] Balci, H. and Valenzuela, J. (2004) Scheduling Electric Power Generators Using Particle Swarm Optimization Combined with the Lagrangian Relaxation Method. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences*, **14**, 411-421.
- [14] Geoffrion, A.M. (1972) Generalized Benders Decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **10**, 237-260. <https://doi.org/10.1007/bf00934810>
- [15] 全然, 简金宝, 郑海艳. 基于外逼近方法的中期机组组合问题[J]. 电力系统自动化, 2009, 33(11): 24-28.
- [16] Han, D., Jian, J. and Yang, L. (2014) Outer Approximation and Outer-Inner Approximation Approaches for Unit Commitment Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, **29**, 505-513. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2013.2253136>
- [17] Jian, J., Zhang, C., Yang, L. and Meng, K. (2019) A Hierarchical Alternating Direction Method of Multipliers for Fully Distributed Unit Commitment. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, **108**, 204-217. <https://doi.org/10.1016/j.ijepes.2018.12.043>
- [18] Frangioni, A., Gentile, C. and Lacalandra, F. (2009) Tighter Approximated MILP Formulations for Unit Commitment Problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, **24**, 105-113. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2008.2004744>
- [19] Knueven, B., Ostrowski, J. and Watson, J. (2020) On Mixed-Integer Programming Formulations for the Unit Commitment Problem. *INFORMS Journal on Computing*, **32**, 857-876. <https://doi.org/10.1287/ijoc.2019.0944>
- [20] Carrion, M. and Arroyo, J.M. (2006) A Computationally Efficient Mixed-Integer Linear Formulation for the Thermal Unit Commitment Problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, **21**, 1371-1378. <https://doi.org/10.1109/tpwrs.2006.876672>

-
- [21] Land, A.H. and Doig, A.G. (1960) An Automatic Method of Solving Discrete Programming Problems. *Econometrica*, **28**, 497-520. <https://doi.org/10.2307/1910129>
 - [22] Atamtürk, A. and Savelsbergh, M.W.P. (2005) Integer-Programming Software Systems. *Annals of Operations Research*, **140**, 67-124. <https://doi.org/10.1007/s10479-005-3968-2>
 - [23] Nannicini, G. and Belotti, P. (2011) Rounding-based Heuristics for Nonconvex MINLPs. *Mathematical Programming Computation*, **4**, 1-31. <https://doi.org/10.1007/s12532-011-0032-x>
 - [24] Dillon, T.S., Edwin, K.W., Kochs, H. and Taud, R.J. (1978) Integer Programming Approach to the Problem of Optimal Unit Commitment with Probabilistic Reserve Determination. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, **97**, 2154-2166. <https://doi.org/10.1109/tpas.1978.354719>