Journal of Electrical Engineering 电气工程, **2025, 13(2), 43-54**
Published Online June 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/jee
https://doi.org/10.12677/jee.2025.132005

基于松弛法的变压器绕组频响特性计算方法

刘子瑞，陈　杰，谢　飞，邱晟璇

西北农林科技大学水利与建筑工程学院，陕西　咸阳

收稿日期：2025年4月1日；录用日期：2025年6月11日；发布日期：2025年6月20日

摘　要

变压器绕组变形故障的快速诊断对保障电力系统稳定运行至关重要。频率响应分析(Frequency Response Analysis, FRA)为故障检测提供了有效手段，因此建立等效电路并快速实现频率响应计算就成为研究的首要任务。本文针对高阶双绕组变压器等效电路，提出了一种基于松弛法的频率响应计算方法。首先，建立*n*阶双绕组变压器集总参数等效电路模型，明确其拓扑结构与参数分布；其次，在节点电压法的基础上，合理选取松弛因子与初始值，迭代求解节点电压，从而实现等效电路的频率响应计算；最后，基于Multisim平台构建仿真模型，对比所提算法与Multisim仿真、传统方法的偏差。结果表明曲线最大偏差低于0.25 dB，验证了算法的准确性。此外，为进一步验证算法在复杂网络中的适用性，本研究在高阶等效电路中进行了仿真，频率响应计算结果表明，松弛法与稀疏矩阵法、撕裂算法及节点电压法的结果具有高度一致性。

关键词

松弛法，变压器绕组，等效电路，频率响应

Efficient Frequency Response Calculation for Transformer Windings Using Relaxation Method

Zirui Liu, Jie Chen, Fei Xie, Shengxuan Qiu

School of Water Resources and Building Engineering, Northwest A&F University, Xianyang Shaanxi

Received: Apr. 1st, 2025; accepted: Jun. 11th, 2025; published: Jun. 20th, 2025

Abstract

The rapid diagnosis of transformer winding deformation faults is crucial for ensuring the stable operation of power systems. Frequency Response Analysis (FRA) provides an effective means for

文章引用: 刘子瑞, 陈杰, 谢飞, 邱晟璇. 基于松弛法的变压器绕组频响特性计算方法[J]. 电气工程, 2025, 13(2): 43-54. DOI: 10.12677/jee.2025.132005

fault detection. Thus, establishing equivalent circuits and rapidly computing frequency responses have become critical research priorities. In this paper, a frequency response computation method rooted in the relaxation method is proposed for the equivalent circuit of high-order two-winding transformers. First, an *n*-order dual-winding transformer lumped-parameter equivalent circuit model is established, clarifying its topological structure and parameter distribution. Second, the node voltage equations derived from the node voltage method are iteratively solved using the relaxation method, with optimized strategies for selecting the relaxation factor and initial values. Finally, a simulation model is constructed on the Multisim platform to compare the deviations between the proposed algorithm, Multisim simulations, and traditional methods. The results demonstrate a maximum deviation of less than 0.25 dB in the frequency response curves, validating the algorithm's accuracy. Furthermore, to verify the algorithm's applicability in complex networks, simulations are conducted on high-order equivalent circuits. The frequency response calculations reveal high consistency between the relaxation method and results from the sparse matrix method, tearing algorithm, and node voltage method, confirming the method's robustness in intricate scenarios.

Keywords

Relaxation Method, Transformer Windings, Equivalent Circuit, Frequency Response

1. 引言

变压器作为电能转换与传输的核心设备，在现代电力系统和通信网络中发挥着不可替代的作用[1] [2]。然而，由于其复杂的结构、高电压特性以及封闭式设计，变压器在实际运行中易受环境干扰，并频发绕组变形等故障，导致严重的经济损失与安全隐患[3] [4]。频率响应分析(Frequency Response Analysis, FRA)技术凭借其高灵敏度、无损检测和操作便捷等优势，已成为变压器绕组状态监测与故障诊断的重要手段[5] [6]。然而，变压器的高压特性与实验成本限制了实验室条件下的实物验证，使得基于等效电路模型的仿真研究成为主流方法。

在等效电路建模领域，集总参数模型因其结构简单和有效表征高频特性而被广泛应用于 FRA 驱动的故障诊断研究。自 Ralph Rudenberg 提出该模型以来，其通过集中化电阻、电感和电容参数，显著提升了瞬态和非线性工况下的分析能力。然而，随着变压器绕组阶数的增加，传统矩阵算法如节点电压法、状态空间法面临计算复杂度高、存储需求大等瓶颈。王松等[7]通过双绕组变压器案例验证了节点电压法的精度，但指出其内存占用随阶数平方增长。文献[8]将电路方程转化为状态空间模型，利用数值积分求解时域响应，再通过傅里叶变换得到频响曲线，高阶系统需处理大规模矩阵，计算效率低，且频域转换引入额外误差。目前，学者们尝试通过撕裂法[9]、稀疏列表法[10]、混合分析法[11]、改进矩阵运算[12]等方法进行优化，在中小规模网络中表现良好，面对高阶变压器绕组时仍存在计算效率低的问题。其中，撕裂法将网络分解为多个子块，独立求解子块方程后通过边界条件耦合结果，降低单个矩阵维数，内存需求减少，但是分块策略依赖人工经验，块间耦合迭代可能降低收敛速度。稀疏列表法仅存储非零矩阵元素，适合稀疏网络，但是对密集耦合矩阵(如含互感的等效电路)优化效果有限。混合分析法结合节点法与改进的矩阵运算，提升求解效率，但是需定制化编程，对超大规模网络仍不适用。

为解决这一问题，本文以双绕组变压器集总参数等效电路为研究对象，提出了一种基于松弛法的频

率响应计算方法。松弛法作为一种大规模网络求解策略，通过迭代更新节点状态值，避免了传统矩阵求逆的高计算负载，为高饼数变压器绕组的频率响应计算提供了新的思路[13] [14]。首先，基于电网络拓扑理论构建线性化模型，通过规范化节点与支路编号生成关联矩阵，结合广义支路定义建立关联矩阵与支路导纳矩阵；其次，推导节点电压方程并引入松弛迭代法进行求解，过程中结合频率连续性优化初始值选择策略，显著提升大规模网络的收敛速度，同时通过优化松弛因子与初值选取策略，进一步提升其收敛效率；此外，针对传统实数松弛法在频域分析中的局限性，提出复数域自适应松弛因子调整策略，以应对不同频率下的计算需求；最后，结合 Multisim 仿真验证，对比 Multism 仿真与所提算法的 FRA 曲线，证实其精度与可靠性；此外，对高阶模型进行了多种算法频率响应曲线对比，结果同样具有较高的准确率。

2. 松弛法的理论基础

2.1. 松弛法的原理

松弛法(Relaxation Method)是一种通过多次迭代更新变量值以逐步逼近方程组解的数值求解方法。其核心思想是在每次迭代中，结合已知值和约束条件，更新未知量的估计值，直至收敛到目标解。以下是松弛法的基本流程及其具体解释(图 1)。

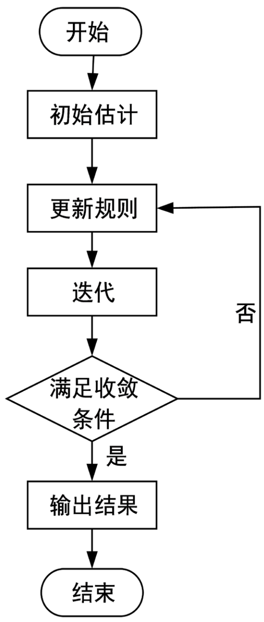


Figure 1. Conceptual flowchart of relaxation method
图 1. 松弛法的思想流程图

(1) 初始估计：首先对未知量进行初始估计，这些值可以是任意选择的，作为迭代的起点。

(2) 更新规则：根据系统方程和已知变量值，通过特定的更新规则计算新的估计值。此过程通常涉及一个“松弛因子”，用于控制每次迭代的步长和收敛速度。通过调整松弛因子，可以在收敛速度和解的准确性之间取得平衡。

(3) 迭代过程：在每次迭代中，根据更新规则和已知值，计算新的估计值。该过程会重复进行，直到满足停止条件(例如，达到指定的收敛精度)。

(4) 收敛判断：在每次迭代后，通过比较新旧估计值的差异来判断是否满足收敛条件。如果差异小于

预设的阈值，则认为求解已收敛。

松弛法通过不断迭代更新变量的值，并根据约束条件逐步逼近方程组的解，能够有效解决线性和非线性问题。其简单而有效的迭代方式使其成为一种常用的求解方法，对于求解大型稀疏系统方程组具有明显优势，在工程计算中得到广泛应用。

2.2. 线性代数方程的松弛迭代技术

在处理大规模线性网络方程时，往往会遇到高阶方程组。松弛迭代技术可以将这些高阶方程转化为多个低阶子方程，从而降低计算复杂度和存储需求。这一方法适用于网络的稳态分析、瞬态分析以及非线性分析[15]。

设线性大网络方程组为：

$$AX = B \tag{1}$$

式中：A 为 $n \times n$ 矩阵，且主对角线元素 $a_{ii} \neq 0\left(i = 1, 2, \cdots, n\right)$，令

$$A = D + L + U \tag{2}$$

式中：D 为对角阵，其元素与 A 阵的对角线元素相同，L 和 U 分别为 A 的严格下三角阵和严格上三角阵。

将式(2)带入式(1)可得：

$$X = -\left(L + D\right)^{-1} UX + \left(L + D\right)^{-1} B \tag{3}$$

其迭代式为：

$$\begin{aligned} X^{(k)} &= -\left(L + D\right)^{-1} UX^{(k-1)} + \left(L + D\right)^{-1} B \\ &= P_{GS} X^{(k-1)} + \left(L + D\right)^{-1} B \end{aligned} \tag{4}$$

式中：$P_{GS} \triangleq -\left(L + D\right)^{-1} U$，式(7)的第 i 个分量为：

$$\overline{x}_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), i = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

式中：b_i 为 B 的第 i 个分量，通过迭代将式(1)将 n 阶方程组“解耦”成 n 个一元方程，上述方法称为高斯－赛德尔(Gauss-Seidel, GS)迭代。

逐次超松弛(Successive Over Relaxation, SOR)迭代法，它是在 GS 法基础上为提高收敛速度，采用加权平均而得到的新算法，由 $x_i^{(k)}$ 与 $\overline{x}_i^{(k+1)}$ 加权平均得到：

$$x_i^{(k+1)} = \left(1 - \omega\right) x_i^{(k)} + \omega \overline{x}_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \omega\left(\overline{x}_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right), i = 1, 2, \cdots, n \tag{6}$$

这里 $\omega > 0$ 称为松弛参数因子，将式(5)代入式(6)得

$$x_i^{(k+1)} = \left(1 - \omega\right) x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right), i = 1, 2, \cdots, n \tag{7}$$

式(7)称为 SOR 迭代法，$\omega > 0$ 称为松弛因子，当 $\omega = 1$ 时，式(7)即为 GS 法。

令

$$G_\omega = \left(D - \omega L\right)^{-1}\left[\left(1 - \omega\right) D + \omega U\right] \tag{8}$$

$$f_\omega = \omega\left(D - \omega L\right)^{-1} b \tag{9}$$

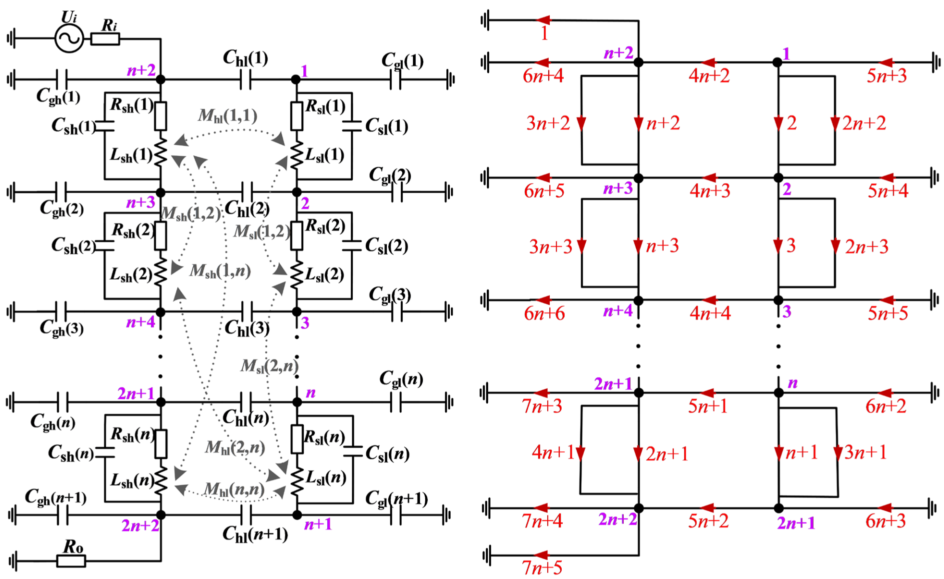
将式(7)写成矩阵形式：

$$x^{(k+1)} = G_{\omega} x^{(k)} + f_{\omega} \tag{10}$$

3. 双绕组变压器等效电路频率响应计算

3.1. 集总参数等效模型建立

除双绕组变压器等效电路模型如图 2(a)所示，以线饼为单元，包含高、低压绕组自感 L_{sh} 与 L_{sl}；高压绕组线饼间互感 M_{sh}，低压绕组线饼间互感 M_{sl}，高低压绕组线饼间互感 M_{hl}；高压与低压绕组的串联电阻 R_{sh} 与 R_{sl}；高压与低压绕组串联电容 C_{sh} 与 C_{sl}、对地电容 C_{gh} 与 C_{gl}，高低压绕组间的并联电容 C_{hl}。此外，等效电路的始端有输入电压源，其内阻为 R_i，末端电阻 R_o 为匹配电阻，R_o 两端的电压即为输出电压。该等效电路由 n 个线饼单元组成，共有 $2n + 2$ 个节点(零电位的参考节点未编号)，以及 $7n + 5$ 条支路，按高压至低压的顺序编号，图 2(b)中有向图标注了支路标号与电流流向。



(a) 等效电路　　(b) 有向图

Figure 2. Two-winding transformer lumped-parameter equivalent model

图 2. 双绕组变压器集总参数等效模型

3.2. 频率响应分析原理

频率响应分析中的传递函数用于描述线性时不变系统的输入与输出之间的关系。传递函数通常用 $H(s)$表示，其中 s 是复变量，代表频率。具体而言，传递函数反映系统对不同频率输入信号的响应情况。通过传递函数，可以计算系统的频率响应，包括幅频响应和相频响应。在基于变压器双绕组的等效电路模型中，已知输入电压 U_i。通过提取节点电压向量中第 $2n+2$ 个节点电压 $U_n(2n+2)$，可以利用公式(11)计算双绕组集总参数等效电路模型的幅频响应。

$$H(s) = 20\lg\left|\frac{U_n(n+2)}{U_i}\right| \tag{11}$$

3.3. 节点电压法求解节点电压列向量

基于基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律可得的关联矩阵形式分别为[16]：

$$\begin{cases} AI = 0 \\ A^{\mathrm{T}} U_n = U_b \end{cases} \tag{12}$$

式中：I 是支路电流列向量；U_n 是 n 维节点电压列向量；U_b 是支路电压列向量；A 是关系矩阵，行对应节点，列对应支路，当支路 k 与节点 j 关联且电流方向背离节点 A 中元素 $a_{jk} = 1$，当支路 k 与节点 j 关联且电流方向指向节点 $a_{jk} = -1$；当支路 k 与节点 j 无关联 $a_{jk} = 0$。

在建立支路导纳矩阵时，高低压电感之间、高压电感之间，低压电感之间会存在耦合电感，利用电流控制的电压源 U_{jm} 进行表征，建立第 m 条广义支路，如图 3 所示。

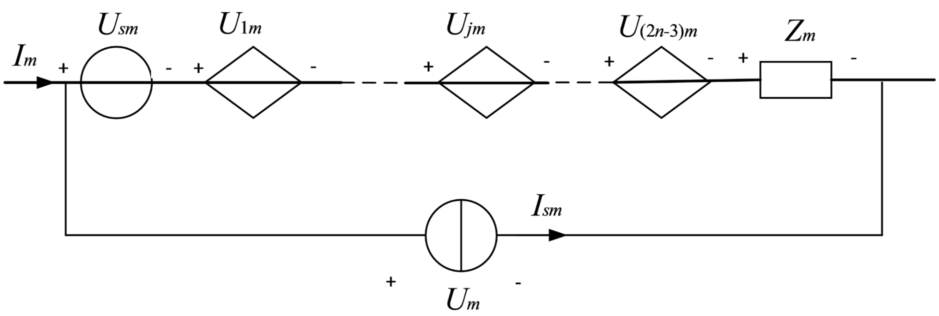


Figure 3. Generalized branch establishment
图 3. 广义支路的建立

图中 U_m、I_m 分别表示第 m 条广义支路的支路电压与支路电流，U_{sm}、I_{sm} 分别表示支路的独立电压源和独立电流源，Z_k 表示受控源元件上的阻抗，U_{1m}、U_{jm} 与 $U_{(2n-3)m}$ 表示第 1、j、$2n-3$ 条电感支路与 m 条电感支路的互感电压，其中 $j \neq m$；U_{1m}、U_{jm} 与 $U_{(2n-3)m}$ 也就等于第 1、j、$2n-3$ 条电感支路的支路电流乘以相应的互感值，第 m 条支路受第 j 条支路电流影响的互感电压如式(13)所示。

$$U_{jm} = sM_{jm} I_m \tag{13}$$

式中：M_{jm} 为互感，I_m 为第 m 条支路的电流。

根据基尔霍夫电压定律，并叠加所有耦合支路的互感电压，可推出支路方程：

$$U_m(s) = Z_m(s) I_m(s) - Z_m(s) I_{sm}(s) + U_{sm}(s) + U_{1m}(s) + \cdots + U_{jm}(s) + \cdots + U_{(2n-3)m}(s) \tag{14}$$

进而推广到整个集总参数等效电路中的 $7n + 5$ 条支路，写成矩阵形式：

$$U = ZI - ZI_s + U_s \tag{15}$$

式中：U 与 I 分别为支路电压与支路电流向量；U_s 与 I_s 分别为支路电压源和电流源向量；Z 为支路阻抗矩阵，根据图 2(b)中各支路的编号顺序列写，具体为：

$$Z = \begin{bmatrix} R_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_{HLM} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_o \end{bmatrix}_{(7n+5)\times(7n+5)} \tag{16}$$

式中：Z_C 为各电容支路的支路阻抗矩阵，Z_{HLM} 为高、低压绕组各串联电感支路的阻抗及其互感阻抗矩阵。

具体的 Z_C 的表达式为：

$$Z_C = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{sC_{sl}}, \frac{1}{sC_{sh}}, \frac{1}{sC_{hl}}, \frac{1}{sC_{gl}}, \frac{1}{sC_{gh}}\right] \tag{17}$$

其中：C_{sl} 为低压绕组纵向电容矩阵；C_{sh} 为高压绕组纵向电容矩阵；C_{hl} 为高低压绕组之间的并联电容矩阵；C_{gl} 为低压绕组对地电容矩阵；C_{gh} 为高压绕组对地电容矩阵，s 为拉普拉斯算子。

具体的低压绕组的 C_{sl}、C_{gl} 矩阵如下：

$$\begin{cases} C_{sl} = \mathrm{diag}\left(C_{sl}(1),\cdots,C_{sl}(n)\right) \\ C_{gl} = \mathrm{diag}\left(C_{gl}(1),\cdots,C_{gl}(n+1)\right) \end{cases} \tag{18}$$

同理可得高压绕组的 C_{sh}、C_{gh} 矩阵。而高低压绕组之间的 C_{hl} 矩阵如下：

$$C_{hl} = \mathrm{diag}\left(C_{hl}(1),\cdots,C_{hl}(n+1)\right) \tag{19}$$

由于支路之间存在电感，Z_{HLM} 矩阵的书写并不是简单的对角矩阵的罗列，把该矩阵分块书写[8]：

$$Z_{HLM} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} sL_{sl}(1)+R_{sl}(1) & \cdots & sM_{sl}(1,n) & sM_{hl}(1,1) & \cdots & sM_{hl}(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sM_{sl}(n,1) & \cdots & sL_{sl}(n)+R_{sl}(n) & sM_{hl}(n,1) & \cdots & sM_{hl}(n,n) \\ \hline sM_{hl}(1,1) & \cdots & sM_{hl}(n,1) & sL_{sh}(1)+R_{sh}(1) & \cdots & sM_{sh}(1,n) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ sM_{hl}(1,n) & \cdots & sM_{hl}(n,n) & sM_{sh}(n,1) & \cdots & sL_{sh}(n)+R_{sh}(n) \end{array}\right] \tag{20}$$

由于绕组集总参数等效电路各支路不含电流源，即 $I_s = 0$，且 Z 方阵是可逆的，式(15)可简化为：

$$I = Y_b U - Y_b U_s \tag{21}$$

式中：Y_b 为支路导纳矩阵，且 $Y_b = Z^{-1}$。

将式(12)代入式(21)，可得节点电压方程为：

$$A Y_b A^{\mathrm{T}} U_n = A Y_b U_s \tag{22}$$

式中：Y_b 为支路导纳矩阵；U_n 为节点电压列向量；I_s 与 U_s 分别为电流源列向量与电压源列向量。

式(22)可简化为：

$$Y_n U_n = J_n \tag{23}$$

式中：注入各节点的电流列向量为 $J_n = A Y_b U_s$，其中的元素 j_k 注入节点 k 的等效电流源的代数和，以流入节点为正；节点导纳矩阵 $Y_n = A Y_b A^{\mathrm{T}}$。

3.4. 模型的线性特性分析与松弛法迭代求解

变压器作为静止元件，集总参数模型将变压器绕组的分布参数(如漏感、层间电容、电阻)近似为集中式线性元件(电阻 R、电感 L、电容 C)。这些元件的阻抗值在固定频率下为常数，与电压或电流幅值无关。

节点导纳矩阵 Y_n 由线性元件的导纳(如 $Y_L = 1/(j\omega L)$、$Y_C = j\omega C$)按拓扑结构组合而成。由于所有元件参数与节点电压 U_n 无关，矩阵 Y_n 为对称正定矩阵，满足收敛条件，且仅由角频率 ω 决定，与 U_n 无关，因此方程为线性。向量 J_n 表示外部注入节点的电压源(如测试信号源或故障电流)。在频域分析中，这些电流源的幅值与相位独立于节点电压 U_n，满足叠加原理，注入电流源的独立性。若模型中不含非线性元件(如铁芯饱和电感或电弧电阻)，则 J_n 与 U_n 之间不存在非线性耦合关系，方程保持线性。此时式(23)的待求量为 U_n，Y_n 即为线性大网络方程组 $AX = B$ 中的 A，J_n 即为线性大网络方程组 $AX = B$ 中的 B，迭代求解 X。

3.5. 松弛法参数调整

在利用松弛法求解复数矩阵时，可能出现结果与真实结果相差几十个数量级的情况，主要原因包括：

(1) 迭代收敛性差：松弛法作为迭代方法，需多次迭代才能逼近真实解。如果迭代次数不足或初始猜测值不合适，可能导致结果偏离真实值[17]。若收敛性较差，误差无法有效减小，最终结果可能发散。

(2) 松弛因子选择不当：松弛法的收敛性和结果精度与松弛因子有关，选择不合适的松弛因子会影响迭代的稳定性和精度。若松弛因子设置过大或过小，可能导致迭代过程震荡或缓慢收敛，使结果与真实值相差较大。

(3) 舍入误差和数值稳定性：在计算机数值计算过程中，舍入误差会积累，并可能对最终结果产生较大影响。矩阵运算中可能涉及数值不稳定性问题，如病态矩阵，会导致迭代法结果偏离真实解。

(4) 矩阵特性和初始参数：复数矩阵的特性复杂，包括奇异矩阵、病态矩阵等情况，可能对迭代法的收敛性和结果精度产生影响。初始猜测值的选取也会影响迭代过程和结果，若初始猜测值远离真实解，可能导致结果与真实值相差较大。

为改善迭代结果的精度，可以尝试以下方法：调整松弛因子、增加迭代次数、优化初始猜测值的选择，甚至考虑使用更稳定和精确的求解方法(如直接法)。在调整时，应关注数值稳定性和舍入误差的影响。针对每个频率点的矩阵，需找到合适的松弛因子、迭代次数和初始值，以提高迭代的收敛速度和稳定性。由于手动调整每组矩阵的这些参数难度较大，需要设置程序自动选择合适的松弛因子、迭代次数和初始值。

3.5.1. 迭代因子的选择

在数值算法中，松弛因子通常设定为实数，因为大多数迭代方法和矩阵运算基于实数域。然而，本研究涉及复数矩阵，考虑使用复数松弛因子可能带来特殊的收敛性能优势。由于每组矩阵的数值不同，需编写程序自动选择最合适的松弛因子。

初始设定松弛因子 $\omega_0 = 1.0$，并初始化迭代计数器和最大迭代次数 $k_{\max}$ 限制，计算初始残差 $r_0 = \left\| Ax^{(0)} - b \right\|_2$，通过循环迭代逐步调整松弛因子并评估收敛性，迭代更新如式(24)所示。

$$\omega_{k+1} = \omega_k \cdot \left(1 + \alpha \cdot \frac{\left\| r_k \right\|_2 - \left\| r_{k-1} \right\|_2}{\left\| r_{k-1} \right\|_2} \right) \tag{24}$$

式中：α 为调整系数，用于控制松弛因子变化幅度。

在每次迭代中，使用当前松弛因子进行计算，监测残差变化：在式(24)基础上，若残差减小则增加松弛因子，若残差增大则减小。监测残差变化趋势，当满足收敛条件 $\left\| r_k \right\|_2 < \epsilon$ 或达到 $k_{\max}$ 时，停止迭代并输出最终松弛因子值。

3.5.2. 初始数值的选择

在使用松弛法解决线性方程组时，选择合适的初始值对算法的收敛性和准确性至关重要。许多文献将未知数向量的初始值设为随机数，这通常用于初步测试算法性能，但在实际应用中，更稳定的初始值选择更为有效。常见且简单的方法是将未知数向量的初始值设置为复数全零向量。尽管在某些情况下可能收敛，但对于复杂问题通常不够有效。本研究是基于复数矩阵进行求解，初始值的选择应考虑复数矩阵的特性，设置为复数全零向量，即 $x^{(0)} = 0 + j0$。

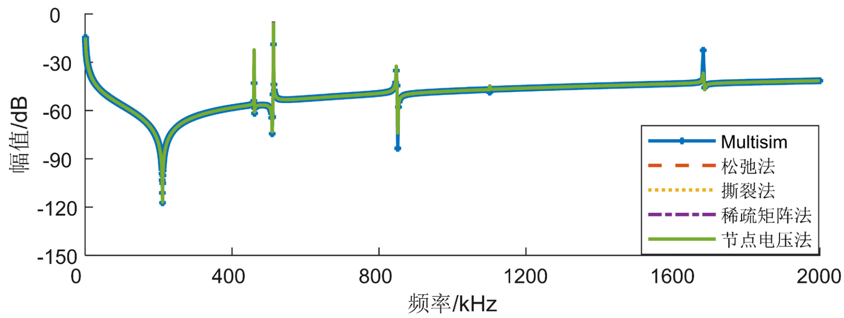
4. 频率响应曲线的仿真验证与结构分析

4.1. 基于 Multisim 的仿真

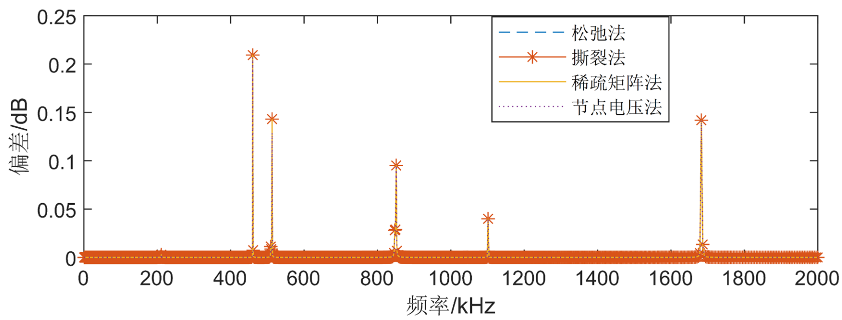
为了验证所提方法的准确性，利用 NI Multisim 14.0 平台建立了双绕组四阶、六阶和八阶集总参数等效电路模型，本研究选取的频率响应扫频范围为 1 kHz 至 2 MHz，在这个范围内选取 3302 个频率点，在

FRA 仿真测试中，将一系列正弦低压信号注入绕组的一端，并从同一绕组的另一端测量输出电压信号。通常施加小幅度扫频电压信号(1 V)，确保铁芯工作在线性区(无饱和)，电容与电感参数保持恒定，保持模型的线性。根据式(11)计算每个扫频点下的频率响应幅值，然后画出传递函数的幅值关于所有扫频点的关系曲线，即可得出绕组等效电路模型的 FRA 曲线，4 阶、6 阶、8 阶 FRA 曲线如图 4(a)、图 5(a)和图 6(a)所示。

为了定量地描述本文所提方法的计算结果与实际结果的偏差，直观地感受该方法的正确性，将本文所述方法以及常用的大网络分析方法(撕裂法和稀疏矩阵法)和传统的节点电压法计算的等效电路频率响应曲线与仿真曲线相减，计算偏差。通过 Multisim 和所提方法得到的 4 阶、6 阶、8 阶集总参数等效模型的 FRA 曲线及其偏差分布如图 4(b)、图 5(b)和图 6(b)所示，图示偏差均低于 0.25 dB，相比频率响应幅值范围 150 dB 相差很小。

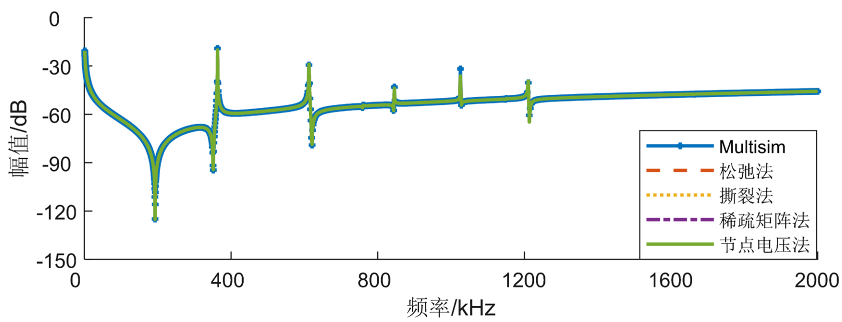


(a) 频率响应曲线

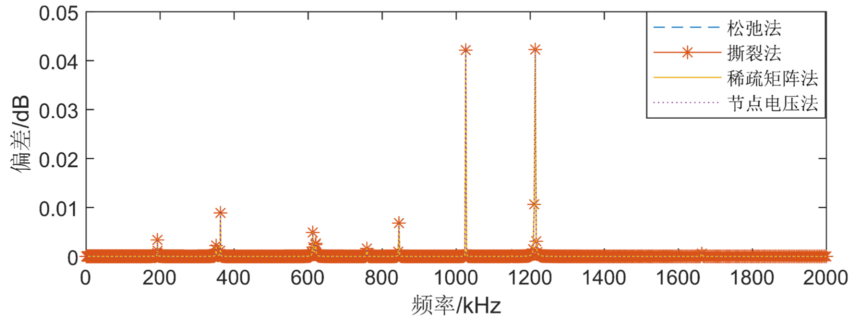


(b) 偏差对比

Figure 4. 4th-order case study
图 4. 4 阶案例

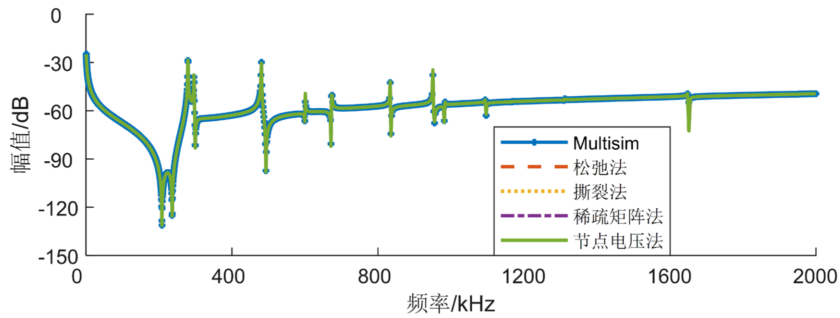


(a) 频率响应曲线

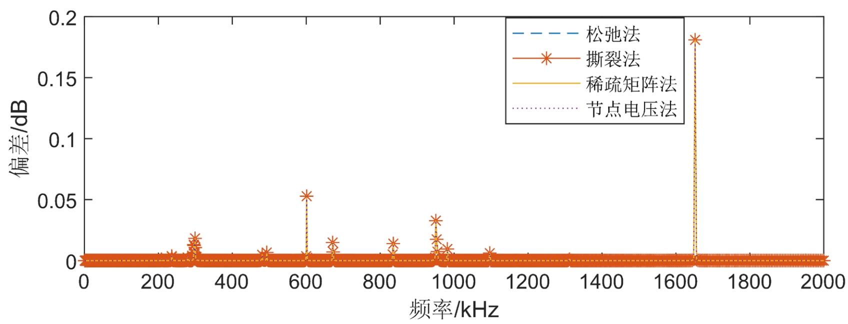


(b) 偏差对比

Figure 5. 6th-order case study
图 5. 6 阶案例



(a) 频率响应曲线



(b) 偏差对比

Figure 6. 8th-order case study
图 6. 8 阶案例

由上述图可知，可以看出，松弛法和撕裂技术算法、稀疏矩阵算法、节点电压法得到的 FRA 结果重叠明显，与 Multisim 软件得到的 FRA 结果吻合较好。只有峰谷轻微的差异，这是由于 Multisim 中的互感模块需要通过输入互感系数来设置，而不是直接指定互感值。在互感系数的计算中，仅保留 8 位有效数字会造成曲线产生微小的差异，但是这并不影响算法的准确性。同时，迭代终止条件残差阈值设定不够小也会造成一定差异。因此 Multisim 得到的 FRA 曲线与本文方法得到的 FRA 曲线之间存在轻微差异，主要是由互感系数的有效位数与设置的迭代终止阈值造成的。总的来说，所提出的方法是准确的。

4.2. 高阶数频率响应计算

上述选用的案例均是小阶数双绕组变压器，并非大网络，因此选取饼数分别为 50、100 的双绕组变

压器等效电路模型进行频率响应计算，对比松弛法、撕裂法、稀疏列表法与节点电压法的 FRA 曲线，以验证本文所提方法在大网络分析中的适用性，FRA 曲线如图 7、图 8 所示。由图可知，在计算 50 阶、100 阶双绕组变压器集总参数等效电路模型时，以上算法的结果几近一致，也进一步证明了松弛法适用于大网络分析。

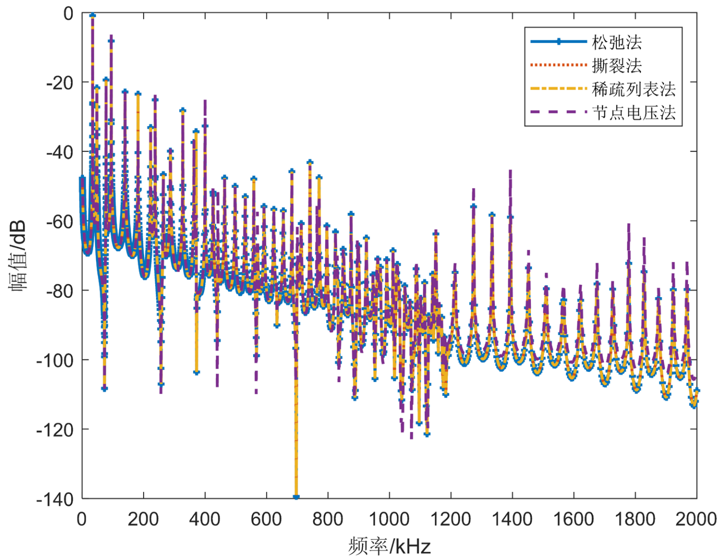


Figure 7. 50th-order frequency response curve case study
图 7. 50 阶频率响应曲线仿真结果

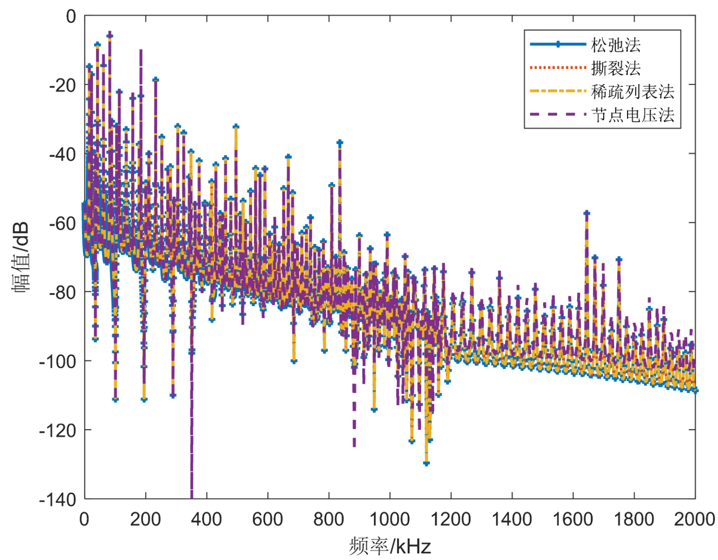


Figure 8. 100th-order frequency response curve case study
图 8. 100 阶频率响应曲线仿真结果

5. 结论

本研究针对变压器绕组频响特性计算问题，提出了一种基于松弛法的计算方法。通过适配变压器集总参数等效电路的结构特征，构建了双绕组变压器的高阶网络模型；以节点电压法为基础，求解关联矩

阵与支路导纳矩阵，进而构建节点电压方程，并利用松弛法实现 n 阶等效电路矩阵的求解。为验证算法的有效性，研究分别在 Multisim 仿真平台中建立了 4 阶、6 阶和 8 阶等效电路模型，通过对比松弛法与 Multisim 仿真、传统方法的频响曲线，结果表明最大偏差低于 0.25 dB，验证了算法的准确性。此外，本研究将所提算法与稀疏矩阵法、撕裂算法、节点电压法进行对比分析，发现四种方法在 50 阶、100 阶大规模等效电路中的频响计算结果具有高度一致性，进一步证实了松弛法在复杂网络中的适用性。

基金项目

陕西省自然科学基金项目(2023-JC-QN-0438)。

参考文献

[1] 孙鹏. 基于多传感信息融合的电力变压器绕组故障诊断方法[J]. 电工技术, 2024(4): 99-101.

[2] 张寿岩, 史卫刚, 杨利国, 等. 改进 BiLSTM 在电力变压器故障诊断中的应用研究[J]. 电测与仪表, 2024, 61(5): 160-165.

[3] 包金山, 杨定坤, 张靖, 等. 基于特征提取与 INGO-SVM 的变压器故障诊断方法[J]. 电力系统保护与控制, 2024, 52(7): 24-32.

[4] Wang, G., Qiu, S., Xie, F., Luo, T., Song, Y. and Wang, S. (2024) Diagnosing Fault Types and Degrees of Transformer Winding Combining FRA Method with SOA-Kelm. *IEEE Access*, **12**, 50287-50299. https://doi.org/10.1109/access.2024.3385229

[5] 黄凤洁. 变压器绕组故障模拟及故障诊断技术[J]. 电气技术与经济, 2023(10): 184-185, 191.

[6] 时东伟, 王志鑫, 毛庆波, 等. 500 kV 母线电磁干扰下变压器绕组变形频率响应分析法的研究[J]. 变压器, 2020, 57(8): 49-51.

[7] 王松, 王薇, 曾鑫海, 等. 双绕组变压器集总等效电路频率响应的电路矩阵算法研究[J]. 西安交通大学学报, 2022, 56(8): 113-121.

[8] Wang, S., Yuan, Z. and Wang, S. (2021) The Comparison of Nodal Voltage Matrix and State Space Methods for Calculating the FRA Curve of the Transformer Winding. 2021 *International Conference on Advanced Electrical Equipment and Reliable Operation* (*AEERO*), Beijing, 15-17 October 2021, 1-4. https://doi.org/10.1109/AEERO52475.2021.9708319

[9] 杨丰野, 王松, 陈冲, 等. 基于撕裂法的变压器绕组集总参数等效电路频率响应计算方法[J]. 电气技术, 2023, 24(7): 26-33.

[10] 王薇, 王松, 曾鑫海, 等. 变压器绕组梯形等效电路频率响应的稀疏列表算法研究[J]. 智慧电力, 2023, 51(7): 102-107.

[11] 王薇, 王松, 曾鑫海, 等. 基于混合分析法的变压器集总参数等效电路频率响应计算研究[J]. 大电机技术, 2023(3): 58-65.

[12] 任富强, 汲胜昌, 祝令瑜, 等. 双绕组电力变压器梯形网络频率响应的矩阵算法[J]. 西安交通大学学报, 2018, 52(2): 89-95.

[13] 李雪涛, 罗向东. 基于松弛法的 TIADC 综合误差的自适应估计与校准[J].电子器件, 2023, 46(5): 1174-1179.

[14] Ito, R., Fujie, T., Suyama, K. and Hirabayashi, R. (2002) New Design Methods of FIR Filters with Signed Power of Two Coefficients Based on a New Linear Programming Relaxation with Triangle Inequalities. 2002 *IEEE International Symposium on Circuits and Systems. Proceedings* (*Cat. No*. 02*CH*37353), Phoenix-Scottsdale, 26-29 May 2002, 1. https://doi.org/10.1109/ISCAS.2002.1009965

[15] 程少庚, 崔杜武, 刘小河. 电网络分析[M]. 北京: 机械工业出版社, 1993.

[16] 陈希有. 电路理论教程[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2020.

[17] 刘水霞, 陈国庆. 求解互补约束优化问题的乘子松弛法[J]. 运筹学学报, 2014, 18(4): 119-130.