

# Surface Reconstruction from Scattered Data Based on Variational Level Set Method

Yunyun Zhu, Huaping Zhu

Wuhan University of Technology, Wuhan Hubei  
Email: 469035934@qq.com

Received: Mar. 18<sup>th</sup>, 2016; accepted: Apr. 1<sup>st</sup>, 2016; published: Apr. 5<sup>th</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

A lot of problems in the field of engineering and medicine after abstraction can be converted into scattered data reconfiguration problems. We set initial contour near the scattered data, expressed as the zero level set of the level set function, which will eventually turn the evolution of initial active contour into the evolution of the level set function. We define an energy functional who takes the level set function as its independent variable, to measure approximation degree with the scattered data, and use the improved variational level set method to evolve the initial contour and achieve reconstruction. In this paper, firstly, putting forward an improved Heaviside function to make the initial contour can better converge in the target contour; secondly, the specific process of numerical calculation model is given, and a two-dimensional example illustrates the effect of the scattered data reconstruction.

## Keywords

Surface Reconstruction, Variational Level Set Method

---

# 基于变分水平集方法的散乱数据曲面重构研究

朱云云, 朱华平

武汉理工大学, 湖北 武汉  
Email: 469035934@qq.com

收稿日期: 2016年3月18日; 录用日期: 2016年4月1日; 发布日期: 2016年4月5日

## 摘要

工程学和医学等领域中的很多问题进行抽象后可转化为散乱数据的光滑曲面重构问题。在散乱数据附近设定初始轮廓, 将初始轮廓间接地表示为水平集函数的零水平集形式, 最终将初始活动轮廓的演化转化成水平集函数的演化。定义一个以水平集函数为自变量的能量泛函来度量它与散乱点的逼近程度, 利用改进的变分水平集方法演化初始轮廓, 达到重构目的。本文中, 一是对Heaviside函数进行改进, 使初始轮廓能更好的收敛于目标轮廓; 二是给出了模型数值计算的具体过程, 并以二维实例说明散乱数据重构的效果。

## 关键词

曲面重构, 变分水平集方法

## 1. 引言

散乱数据的重构技术作为逆向工程的关键技术之一, 其目的是重新构造一光滑曲面, 使其尽可能的忠实于原始曲面, 并插值或逼近于来自于原始曲面采样得到的精确的离散点集。

按照曲面表示形式的不同, 曲面重构大体可以分为显示曲面重构和隐式曲面重构两类。显示曲面重构方法便于用户与模型直接进行交互, 利于模型的快速实现, 然而, 在实际应用中, 采用显示曲面重构方法存在很多弊端。通常情况下, 对原始物体采样的数据量都非常大, 对其进行全局参数化是一个很困难的问题。又由于待重建曲面的拓扑结构未知, 难以根据获得的离散点确定它们之间的拓扑关系, 参数化方法难以处理拓扑结构的变化。近年来, 隐式曲面重构方法得到了广发的关注, 它无需对散乱数据进行参数化处理, 能够自然地处理拓扑结构的变化, 简化了对问题的处理过程。水平集方法是以隐含的形式表达待求解的未知曲面或者曲面, 将其内嵌到高一维的水平集函数中。Zhao等[1]将水平集方法应用到曲面重构模型中, 动态拟合散乱数据, 得到了较好的结果; 徐国良[2]在Zhao模型的基础上, 加入平滑项去除噪声, 使重构曲面具有更好的光滑性。

基于水平集方法的几何曲线或者曲面演化, 通常将水平集函数初始化为符号距离函数, 是因为符号距离函数满足性质 $|\nabla\phi|=1$ , 然而在演化的过程中, 水平集函数通常会偏离符号距离函数, 即发生退化。徐国良[2]通过求解 $\frac{\partial\phi}{\partial t} = \text{sign}(\phi^{(n)})(1-|\nabla\phi|)$ 的方式可实现重新初始化, 当方程达到稳定状态后, 方程的解显然满足 $|\nabla\phi|=1$ 。但是对于经过多少次迭代后需要重新初始化一次不得而知, 通常由实验来决定。

本文在徐国良[2]的基础上, 一是在模型中直接加入罚项控制水平集函数偏离符号距离函数的程度, 规避了重新初始化的需要, 利用改进的变分水平集的方法求解能量泛函, 极大的提高了水平集函数的演化效率; 二是对Heaviside函数进行改进, 使其能更好的收敛于目标轮廓; 三是给出了模型数值计算的具体过程, 并以二维实例说明该模型应用于散乱数据重构中的效果。

## 2. 改进的重构模型

曲面重构常通过定义一个度量函数来衡量重构曲面与待重构的散乱数据的逼近程度, 度量函数的值越小说明收敛于目标的效果越好, 即重构曲面的质量越高。徐国良[2]不同的是, 本文通过加入罚项直接控制水平集函数偏离符号距离函数的程度, 定义如下能量泛函来度量重建效果:

$$E(\phi) = E_d(\phi) + \omega E_s(\phi) + \lambda E_r(\phi) \quad (1)$$

式中

$$\begin{aligned} E_d(\phi) &= \int_{\Gamma} d^2(x) ds = \int_{\Omega} d^2(x) \delta(\phi) |\nabla \phi| dV \\ E_s(\phi) &= \int_{\Gamma} ds = \int_{\Omega} \delta(\phi) |\nabla \phi| dV \\ E_r(\phi) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla \phi - 1|)^2 dV \end{aligned}$$

$E_d(\phi)$  用来衡量重构曲面逼近散乱数据  $S = \{x_i\}_{i=1}^N$  的程度, 称之为数据项, 其中  $d(x)$  是散乱点到重构曲面的欧氏距离;  $E_s(\phi)$  是典型的几何约束项, 代表封闭曲面的面积, 其目的是为了光滑重构曲面, 称之为平滑项;  $E_r(\phi)$  是为避免重新初始化所使用的罚函数[3]。 $\delta(\phi)$  为狄利克雷函数, 为 Heaviside 函数的导数,  $\omega$ ,  $\lambda$  为大于 0 的可选常数。

式(2)对应的梯度下降流为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \delta_z(\phi) \left[ d^2(x) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \nabla(d^2(x)) \cdot \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} + \omega \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] \\ &+ \lambda \left[ \Delta \phi - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

### 3. Heaviside 函数的改进

与莫堃[4]中选用的正则化 Heaviside 函数  $H_\varepsilon(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{z}{\varepsilon} \right) \right]$  做对比, 本文选取  $H(z)$  的如下近似:

$$H_\alpha(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{z}{\alpha} \right) \quad (3)$$

其中  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$  是误差函数, 得到  $\delta_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \alpha} e^{-\left(\frac{z}{\alpha}\right)^2}$ 。

由图 1 左边知,  $H_\varepsilon(z)$  逼近 Heaviside 函数的效果不是特别理想, 当  $z$  趋近于零时,  $H_\varepsilon(z)$  不能很好的收敛于 0 和 1。比较图 1 左右两边, 当选取相同的参数时,  $H_\alpha(z)$  能更好地逼近 Heaviside 函数。

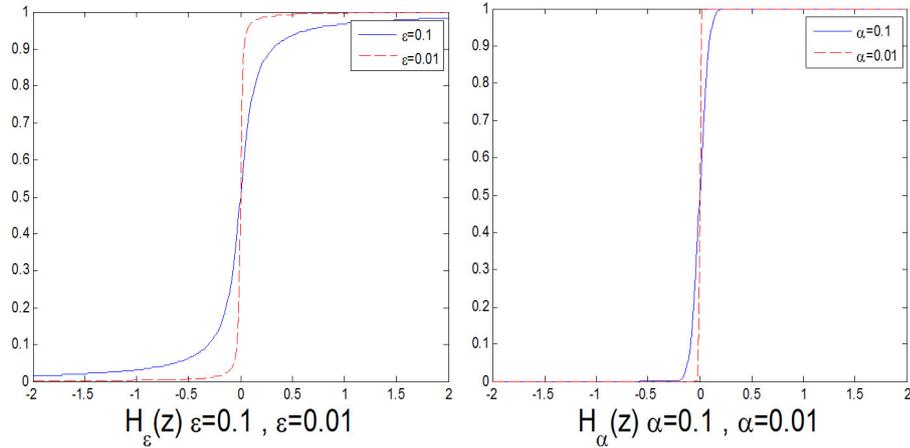
### 4. 模型的离散化算法[5]

为了对偏微分方程式(2)作数值计算, 首先要对式中的各项进行离散化。设选取网格大小为 1, 采用有限差分法和中心差分法相结合的离散化方案, 由

$$\operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\phi_z}{|\nabla \phi|} \right)$$

可得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) &= \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{i+\frac{1}{2}, j, k} - \left( \frac{\phi_x}{|\nabla \phi|} \right)_{i-\frac{1}{2}, j, k} + \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{i, j+\frac{1}{2}, k} - \left( \frac{\phi_y}{|\nabla \phi|} \right)_{i, j-\frac{1}{2}, k} \\ &+ \left( \frac{\phi_z}{|\nabla \phi|} \right)_{i, j, k+\frac{1}{2}} - \left( \frac{\phi_z}{|\nabla \phi|} \right)_{i, j, k-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$



**Figure 1.** The comparison of different regularized Heaviside function at the same parameters  
**图 1.** 不同正则化 Heaviside 函数在相同参数下的比较

以上式中的第一项为例

$$\begin{aligned}
 (\nabla\phi)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \left( (\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}, (\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k}, (\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right) \\
 (\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k} \\
 (\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \left( \phi_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - \phi_{i+\frac{1}{2},j-1,k} \right) / 2 = (\phi_{i+1,j+1,k} + \phi_{i,j+1,k} - \phi_{i+1,j-1,k} - \phi_{i,j-1,k}) / 4 \\
 (\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= \left( \phi_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - \phi_{i+\frac{1}{2},j,k-1} \right) / 2 = (\phi_{i+1,j,k+1} + \phi_{i,j,k+1} - \phi_{i+1,j,k-1} - \phi_{i,j,k-1}) / 4 \\
 \left( \frac{\phi_x}{|\nabla\phi|} \right)_{i+\frac{1}{2},j,k} &= (\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k} / \sqrt{[(\phi_x)_{i+\frac{1}{2},j,k}]^2 + [(\phi_y)_{i+\frac{1}{2},j,k}]^2 + [(\phi_z)_{i+\frac{1}{2},j,k}]^2}
 \end{aligned}$$

当  $|\nabla\phi| \rightarrow 0$  时, 通常会使得  $\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$  不连续, 针对这一问题, 本文选用一个比较小的正则化变量  $\delta$  做近似处理, 即令  $|\nabla\phi|_\delta = \sqrt{(|\nabla\phi|)^2 + \delta^2}$ 。

对于(3)式中的  $\Delta\phi$  是三维空间中的拉普拉斯算子, 按定义有:

$$\Delta\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz}$$

采用中心差分近似二阶偏导数有:

$$\Delta\phi_{i,j,k} = \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i-1,j,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j,k+1} + \phi_{i,j,k-1} - 6\phi_{i,j,k}$$

为了使  $\Delta\phi$  具有更好的旋转不变性, 可沿对角线的中心差分与沿  $x, y, z$  的中心差分通过加权平均结合起来, 可采用下式作为拉普拉斯算子的离散化格式:

$$\Delta\phi_{i,j,k} = \sum_{a=-1}^1 \sum_{b=-1}^1 \sum_{c=-1}^1 \frac{1}{3} \phi_{i+a,j+b,k+c} - \frac{27}{3} \phi_{i,j,k}$$

其中  $a, b, c$  均为整数。

本文的正则化 Heaviside 函数选择式(4), 用  $\phi$  代换  $z$ , 即可求得  $\delta_\epsilon(\phi)$ 。由上述数值计算的方法可得

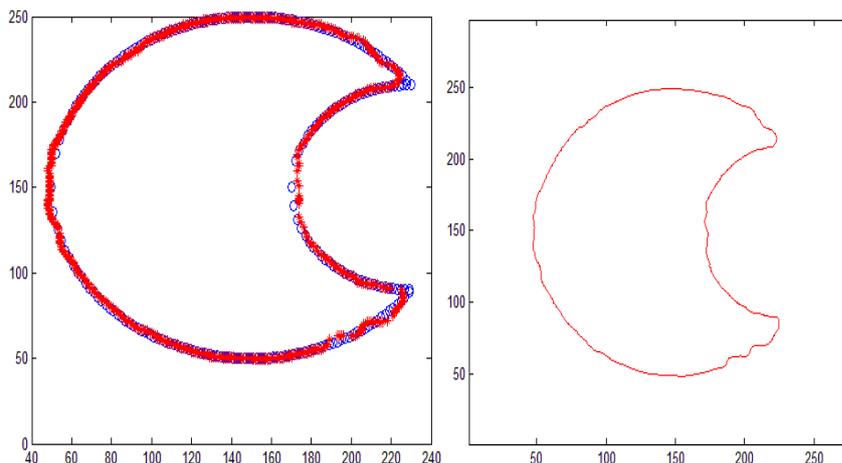


Figure 2. The reconstruction effect of scattered points  
图 2. 散乱点的重构效果

(3)式的离散化格式为:

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{n+1} = & \phi_{i,j,k}^n + \Delta t \left\{ \delta_z(\phi_{i,j,k}^n) \left[ d^2(x) \operatorname{div} \left( \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)_{i,j,k}^n \right) + \nabla(d^2(x)) \cdot \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)_{i,j,k}^n \right. \right. \\ & \left. \left. + \omega \operatorname{div} \left( \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)_{i,j,k}^n \right) \right] + \lambda \left[ \Delta \phi_{i,j,k}^n - \operatorname{div} \left( \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right)_{i,j,k}^n \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

## 5. 计算实例

下面对二维平面上的散乱点的做重构实验, 选取(3)式作为 Heaviside 函数的近似。如图 2 所示, 蓝色表示待重构的散乱点云, 用上述方法重构散乱点, 红色曲线表示通过演化后逼近目标的结果。

实验结果表明, 对于本文所给的能量泛函利用改进的 Heaviside 函数, 通过改进的变分水平集方法演化初始轮廓, 能够较好的逼近目标轮廓, 但是收敛速度很慢, 计算效率还有待进一步提高。

## 参考文献 (References)

- [1] Zhao, H.K., Osher, S., Merriman, B., *et al.* (2000) Implicit and Nonparametric Shape Reconstruction from Unorganized Data Using a Variational Level Set Method. *Computer Vision & Image Understanding*, **80**, 295-314. <http://dx.doi.org/10.1006/cviu.2000.0875>
- [2] 徐国良, 张琴, 刘丹. 带噪声散乱数据的光滑曲面重构——变分水平集方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(7): 840-848.
- [3] Li, C., Xu, C., Gui, C.F., *et al.* (2005) Level Set Evolution without Re-Initialization: A New Variational Formulation. *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Diego, 20-25 June 2005, 430-436.
- [4] 莫堃. 基于空间活动轮廓模型的缺陷点云重构[J]. 东方电气评论, 2014, 28(3): 12-16.
- [5] 王大凯, 侯青育, 彭进业. 图像处理的偏微分方程方法(附光盘) [M]. 北京: 科学出版社, 2009.