

Singularity Detection Based on Two Dimensional Continuous Wavelet Transform

Jie Zhou¹, Zheng Li^{1*}, Jiyue Chen²

¹State Key Lab for Turbulence and Complex Systems, College of Engineering, Peking University, Beijing

²School of Mechanics & Civil Engineering, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing
Email: *lizheng@pku.edu.cn

Received: Mar. 21st, 2020; accepted: Apr. 6th, 2020; published: Apr. 13th, 2020

Abstract

Continuous wavelet transform is widely applied in damage detection methods based on vibration because of its excellent ability of singularity detection. In this paper, two kinds of two-dimensional wavelet functions, Morlet and Pethat, as anisotropic and isotropic wavelets, were studied for their abilities in singularity detection. Firstly, characteristics of these two wavelet functions were figured out. Then, the singularity detection of two-dimensional signal was conducted numerically by these two wavelet functions. Finally, a comparative analysis of these two wavelet functions was carried out for damage detection of composite laminate by mode shapes. Results show that these two wavelet functions have different singularity sensitivities, which can be developed in application of non-destructive testing method based on vibration.

Keywords

Singularity, Two-Dimensional Wavelet Transform, Non-Destructive Testing

基于两种二维连续小波变换的奇异性检测方法研究

周洁¹, 励争^{1*}, 陈霖月²

¹北京大学工学院湍流与复杂系统国家重点实验室, 北京

²中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京

Email: *lizheng@pku.edu.cn

*通讯作者。

摘要

连续小波变换由于其在信号奇异性检测中的出色表现，而被广泛地应用到基于振动的无损检测方法中。本文以二维Morlet小波和Pethat小波为例，分别对各向同性和各向异性二维连续小波变换在空间信号的奇异性检测中的应用进行了研究。首先，我们分别对两种小波函数各自处理空间信号的特点进行了分析；其次，我们采用数值分析方法，应用这两种小波函数对二维空间信号进行二维连续小波变换，并提取其小波系数进行奇异性识别。最后，针对含损伤的复合材料层合板的奇异性检测结果，分析比较两种小波函数在模态振型奇异性检测中的适用性，并为基于振动的无损检测方法提供技术支持。

关键词

奇异性，二维连续小波，无损检测

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

基于振动的无损检测方法以其独特的优势，成为了当今无损检测和结构健康监测领域里主流的方法之一[1]。其最大的优势在于可以实现大型工程结构的整体、高效、多损伤的同时检测，并通过发展振动信号的信号处理技术，提高对奇异性特征的提取能力，易于实现不依赖于基准信号的全局检测。这种不依赖于基准的损伤检测特性，是很多无损检测方法难以实现的。连续小波变换是时频分析领域最有效的信号处理技术之一，由于其出色的奇异性提取能力，近年来也将一维连续小波变换应用于基于振动模态振型及振型曲率的无损检测方法中[2] [3]。随着多普勒激光测振仪的发展，模态振型的测量精度得到很大提高，特别是对板类结构的高阶振型的精确测量不再是难题，二维空间小波变换逐渐开始应用到对板类结构的损伤检测中[4] [5]。然而，由于对二维连续小波变换的奇异性检测能力本身的探讨的缺乏，尤其缺乏对各向异性二维小波变换的研究，使得目前大多研究工作仅限于应用小波变换进行振动模态(曲率)中损伤信号的检测，而不对小波函数本身进行分析和适用性探讨，极大地限制了二维小波变换的推广应用。因而，本文旨在以典型的 Morlet 小波和 Pethat 小波为例，对各向异性和各向同性二维连续小波变换在空间信号奇异性特征提取中的应用进行比较性研究，为二维连续小波变换在损伤检测中的应用提供理论指导。

2. 二维连续小波变换

二维连续小波变换[6]是一种提取二维空间信号中的奇异性的重要方法，近年来也开始应用到处理基于振动的板壳类结构的损伤检测中。与一维连续小波变换相比，二维连续小波变换仍然需要有尺度因子和平移因子对小波母函数进行伸缩和平移，但是在此基础上二维连续小波变换还需要有转动因子对小波函数进行转动。典型的二维连续小波母函数 ψ 作用在空间某点 \mathbf{x} 处可表示为

$$\psi_{a,b,\theta}(\mathbf{x}) = a^{-1} \psi(a^{-1} \mathbf{r}_{-\theta}(\mathbf{x} - \mathbf{b})), \quad \mathbf{r}_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中, a 、 \mathbf{b} 和 θ 分别为小波变换的尺度因子、平移向量和转动因子。对于二维空间信号 f 进行二维连续小波变换, 可以得到小波系数为

$$C_f(a, \mathbf{b}, \theta) = \int_{R^2} f(\mathbf{x}) \overline{\psi}_{a, \mathbf{b}, \theta}(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} = \int_{R^2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \hat{\psi}_{a, \mathbf{b}, \theta}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\omega}} d^2 \boldsymbol{\omega} \quad (2)$$

其中 $\overline{\psi}$ 和 $\hat{\psi}$ 分别代表二维小波函数的共轭和傅里叶变换。从上述公式可以看出, 二维连续小波变换与一维连续小波变换最大的不同在于二维连续小波变换存在转动因子。对于各向同性二维小波函数, 转动因子对变换的结果没有影响; 而对于各向异性二维小波函数, 转动因子的影响不可忽略。本文分别用典型的二维 Morlet 小波和 Pethat 小波为例, 对这两种二维连续小波函数进行比较性研究。这两种小波母函数在频域中的表达式分别为

$$\hat{\psi}_{morlet}(\boldsymbol{\omega}) = \sigma^2 e^{-\frac{\sigma^2(|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_0|^2)}{2}}, \quad (3)$$

$$\hat{\psi}_{pethat}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{cases} \left[\frac{\cos(\pi \log|\boldsymbol{\omega}|)}{2 \log 2} \right]^2, & |\boldsymbol{\omega}| \in \left(\frac{1}{2}, 2 \right), \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

其中 Morlet 小波函数中的 $\boldsymbol{\omega}_0$ 是可调参数, 决定着二维 Morlet 小波各向异性的特性, 我们这里取 $\boldsymbol{\omega}_0 = (6, 0)$ 。这两种小波母函数在频域内的分布分别如图 1 所示。从图 1 中可以明显看出, Morlet 小波的各向异性特性以及空间频域集中在某一个方向上, 而 Pethat 小波在空间频率域有着各向同性的特性。

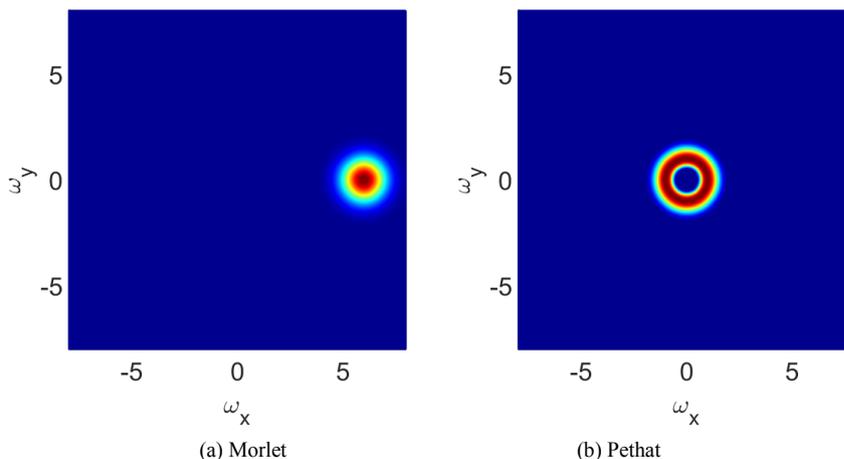


Figure 1. Two wavelet functions in spatial frequency domain
图 1. 两种小波函数在空间频率域中的图像

3. 空间信号的奇异性检测

空间信号中的奇异性检测是基于模态振型(曲率)的无基准的无损检测方法的基础, 为此, 我们将二维连续小波变换对空间信号中奇异性识别的敏感度进行研究。

针对振动模态的周期性特征, 我们采用 MATLAB 程序构建了周期性变化的二维光滑曲面, $f = \sin(2\pi x/25) + \cos(2\pi y/25)$, 并引入了两个细长矩形奇异性区域, 以局部增加曲面最大幅值的万分之五的扰动作为信号的奇异性, 如图 2 所示。为了研究转动因子对二维连续小波变换的影响, 这两个奇异性区域尺寸相同而方向不同。

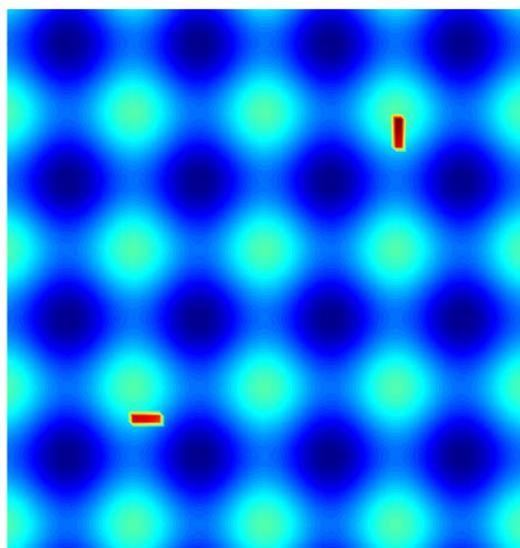


Figure 2. Spatial surface with local singularity
图 2. 含局部奇异性区域的空间曲面

针对图 2 中的空间信号，我们分别采用 Pethat 小波和 Morlet 小波进行二维连续小波变换分析。式(1)中的转动因子 θ 分别选为 0 、 $\pi/2$ 和 $\pi/4$ 。由于 Morlet 小波的小波系数为复数，因而选取小波系数的模作为小波变换的结果。这两种小波变换所得云图分别如图 3 和图 4 所示。从图 3 中 Pethat 小波的处理结果可以看出，Pethat 小波在各个转动因子下均能检测出空间信号中的奇异性，并且检测效果完全相同。图 3 的检测结果表明，Pethat 小波对奇异性区域的边界有很好的识别精度，而且没有方向性，对两个不同方向的奇异性区域识别结果一样。小波系数在奇异性区域的两个短边最高，在长边较低。这是因为信号中奇异性最强的部分在奇异性区域的边界，而由于短边长度短，在有限长度内信号奇异性变化最大。从图 4 中可以看出，Morlet 小波在各个转动因子下也能检测出空间信号中的奇异性，但是检测效果易受转动因子的影响。在图 4 中，当转动因子为 0 和 $\pi/2$ 时，两个奇异性区域检测的结果是严格相反的；而当转动因子为 $\pi/4$ 时，Morlet 小波对两个奇异性区域的检测结果是相同的，但都只识别出区域的短边界。

对比图 3 和图 4 可以看出这两种小波的特点：各向同性小波(Pethat 小波)在检测奇异性时不受损伤位置走向的影响，即检测结果不依赖于小波函数转动因子的影响，并且对奇异性区域的边界敏感，但是对奇异性的综合分辨能力较弱，只对小尺度的奇异性区域小波系数有较高的数值结果；各向异性小波(Morlet 小波)在检测奇异性时其小波系数在奇异性大部分区域里都会有较高的幅值，但是检测结果与转动因子密切相关。如图 4 当 $\theta=0$ 时，与转动因子的走向一致的奇异性区域检测效果明显，而不一致的奇异性区域检测效果较弱。值得注意的是，仅当转动因子为 $\pi/4$ 时，由于转动因子方向与两个奇异性区域的走向是对称的，两个奇异性区域的检测结果趋于一致。

基于上述讨论，这两种小波函数根据检测目标的不同，均可以用于奇异性检测。Pethat 小波可用于检测奇异性区域的边界，并且由于其各向同性特性，可以保证所有方向上的奇异性均可被检测；而 Morlet 小波可用于检测特定角度出现的奇异性，并且在特定角度上，可以保证测量结果有很高的精度。若 Morlet 小波能够在保证检测精度的前提下又能实现各向同性的检测，那么用 Morlet 小波进行奇异性检测的效果将会更好。为了达到这个目的，我们把不同转动因子下的二维 Morlet 小波变换的结果进行叠加，即把图 4 中三个角度的小波系数进行叠加，结果如图 5 所示。图 5 的结果显示两个奇异性区域可以完全被检测出来并且结果完全一致，这说明用多个角度的 Morlet 小波可以实现准各向同性的奇异性检测。

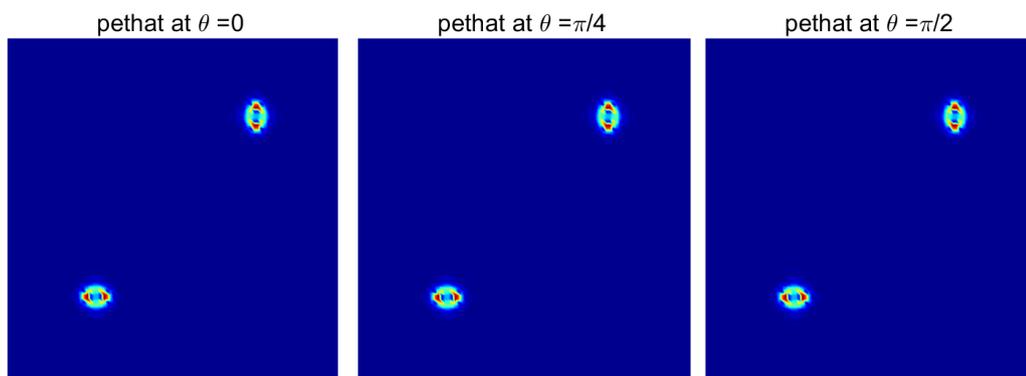


Figure 3. Singularity detection by Pethat wavelet with different rotational factors
图 3. 不同转动因子的 Pethat 小波的奇异性检测结果

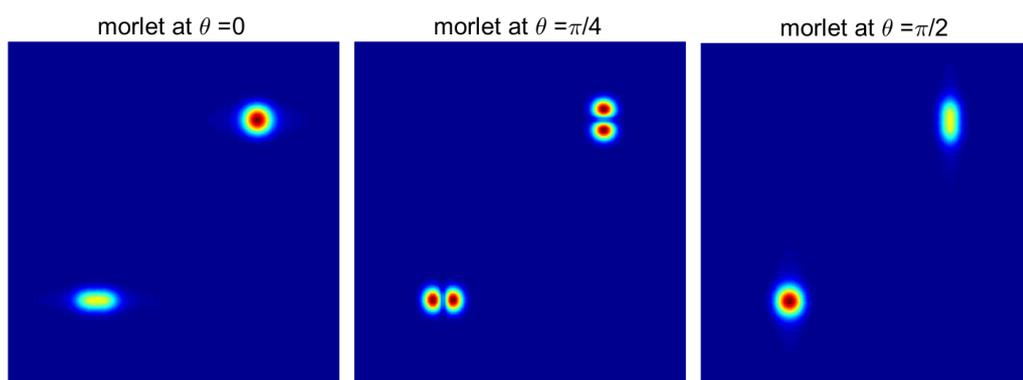


Figure 4. Singularity detection by Morlet wavelet with different rotational factors
图 4. 不同转动因子的 Morlet 小波的奇异性检测结果

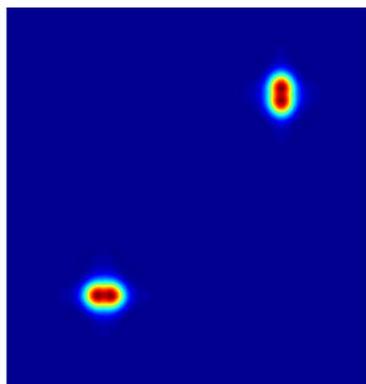


Figure 5. Singularity detection combined by Morlet wavelet with three rotational factors
图 5. 三个转动因子的 Morlet 小波叠加的奇异性检测结果

4. 基于振动模态的损伤识别

针对含损伤复合材料层合板,我们利用有限元软件 ABAQUS 计算其模态振型,并利用两种二维小波进行损伤检测。有限元模型采用边长为 800 mm 的方形复合材料层合板,按照[45/-45/0/0/-45/90/45/0]s的铺层方式,每层厚 0.2 mm,单层复合材料的材料参数如表 1 所示。由于损伤通常会引起局部的刚度衰减,因此,我们通过材料参数的折减来模拟损伤。这里我们选了两个除了位置和方向以外完全相同的损

伤, 损伤区域的 E_1 折减为原来的 70%, 计算模型如图 6 所示, 红色区域代表损伤位置。在自由边界的条件下, 进行模态振型的计算。根据选择的三阶模态振型, 利用中心差分的方法计算模态振型曲率, 然后用两种小波分别对三个模态进行奇异性提取, 并分别将三个模态的结果相加作为损伤指标以避免有些模态对损伤位置不敏感。

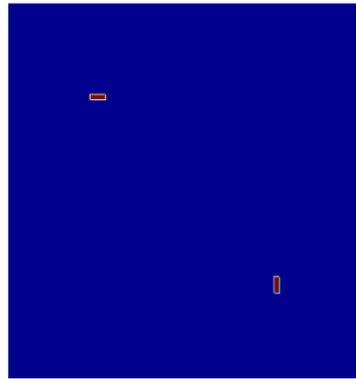
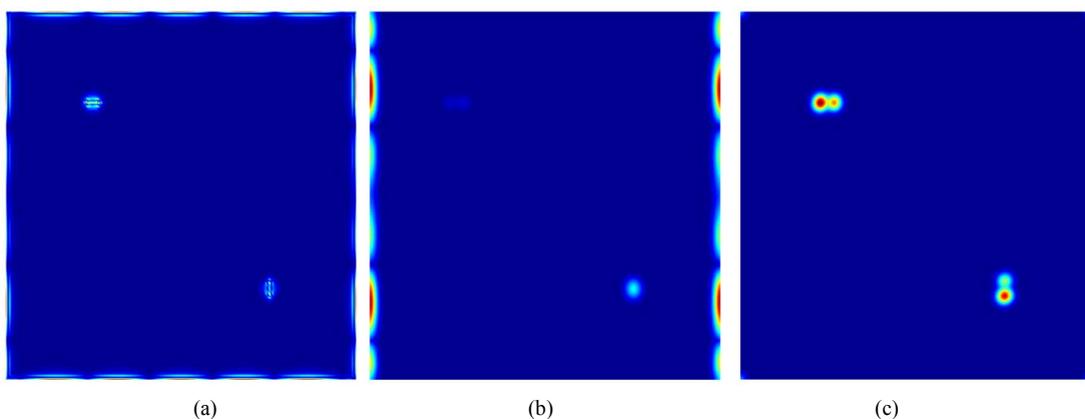


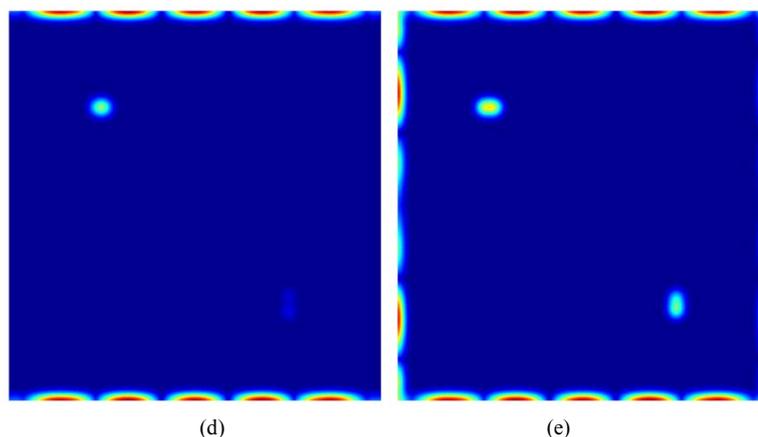
Figure 6. Composite laminate model with damage
图 6. 含损伤的复合材料层合板模型

Table 1. Material property of composite lamina
表 1. 单层复合材料材料参数

ρ (kg/m ³)	E_1 (GPa)	E_2 (GPa)	G_{12} (GPa)	G_{13} (GPa)	G_{23} (GPa)	μ_{12}
1520.7	174.6	10.3	6.21	6.21	3.64	0.26

图 7 列出了五种用不同处理方式的结果, 其中图 7(a)为利用 Pethat 小波的分析结果, 图 7(b)~(d)为用三种转动因子(0, $\pi/4$, $\pi/2$)的 Morlet 小波的分析结果, 图 7(e)为图 7(b)~(d)三者的叠加。从图 7 可以看出, 其损伤检测的结果和前面的结论吻合得很好。首先, Pethat 小波检测的结果不受转动因子影响而更稳定, Morlet 小波检测结果受到转动因子影响容易产生漏检。其次, Pethat 小波检测的结果灵敏度相对较低, 而使用 Morlet 小波在特定方向上灵敏度很高, 但是在某些特定方向上灵敏度很低(图 7(b)和图 7(d))。最后, 用多个转动因子叠加的 Morlet 小波分析的结果很接近各向同性, 且精度均较高。另外, 也可以发现复合材料层合板的弱各向异性性质, 使得 Pethat 小波对两个奇异性区域的检测精度有差别。而且在模态振型信号中, 复合材料层合板自由边界的奇异性变得不可忽略, 在图 7 中均有所体现。这是因为小波变换可以把板边界的不连续性也当作奇异性来识别。





(a): Pethat 小波; (b) (c) (d): Morlet 小波在转动因子 $(0, \pi/4, \pi/2)$; (e): (b) (c) (d)叠加。

Figure 7. Damage detection in different situations

图 7. 基于振动模态的损伤检测结果

5. 总结与展望

本文中我们用两种典型的二维连续小波(Pethat 小波和 Morlet 小波)对空间信号中的奇异性进行检测, 以此作为基于模态振型的损伤检测的基础。经过一系列的研究, 结合数值计算和有限元模拟的结果, 可以得到以下结论:

1) Pethat 小波和 Morlet 小波均可以实现对空间信号的奇异性的检测, 其中 Pethat 小波为各向同性检测, 结果不受转动因子的影响, 灵敏度较低; 而 Morlet 小波为各向异性检测, 结果受到转动因子的影响。

2) Morlet 小波能够灵敏检测某个方向的奇异性, 但是其他方向灵敏度低。因此, 利用多个角度叠加的 Morlet 小波可以在实现准各向同性的检测的同时, 也能保证检测有较好的精度。

3) 实际检测中结构边界的奇异性往往很强, 不可忽略。

本文虽然对两种小波尤其是各向异性 Morlet 小波进行深入的讨论并对小波检测方法进行了一定程度的改进, 但是这种改进还不是普适的, 后续的研究将集中在任意方向上实现 Morlet 小波的准各向同性检测。

致 谢

感谢国家自然科学基金项目(11521202, 11672004)的资助和支持。

基金项目

国家自然科学基金项目(11521202, 11672004)。

参考文献

- [1] 杨秋伟. 基于振动的结构损伤识别方法研究进展[J]. 振动与冲击, 2007(26): 86-91.
- [2] Douka, E., Loutridis, S. and Trochidis, A. (2003) Crack Identification in Beams Using Wavelet Analysis. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 3557-3569. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00147-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00147-1)
- [3] Yam, L., Yan, Y. and Jiang, J. (2003) Vibration-Based Damage Detection for Composite Structures Using Wavelet Transform and Neural Network Identification. *Composite Structures*, **60**, 403-412. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(03\)00023-0](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(03)00023-0)
- [4] Rucka, M. and Wilde, K. (2006) Application of Continuous Wavelet Transform in Vibration Based Damage Detection Method for Beams and Plates. *Journal of Sound and Vibration*, **297**, 536-550. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.04.015>

- [5] Fan, W. and Qiao, P. (2009) A 2-D Continuous Wavelet Transform of Mode Shape Data for Damage Detection of Plate Structures. *International Journal of Solids and Structures*, **46**, 4379-4395.
<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.08.022>
- [6] Antoine, J.-P., Murenzi, R., Vandergheynst, P. and Ali, S.T. (2008) *Two-Dimensional Wavelets and Their Relatives*. Cambridge University Press, Cambridge.