

紧支撑帕塞瓦尔小波框架的分解与重构

成宇珠, 李万社

陕西师范大学, 数学与统计学院, 陕西 西安

收稿日期: 2024年3月26日; 录用日期: 2024年4月16日; 发布日期: 2024年4月25日

摘要

本文构造出性质良好的紧支撑帕塞瓦尔小波框架。利用小波框架及其相关尺度函数的数量关系式, 在分辨率分析思想下以小波框架为基础定义一般的空间序列, 得到紧支撑帕塞瓦尔小波框架的分解与重构定理, 进而得出信号分解与重构的框图, 并对算法进行总结。实验结果表明, 与Haar小波函数的分解重构算法相比, 本文算法具有更好的性能。

关键词

扩张矩阵, 帕塞瓦尔小波框架, 分解与重构

Decomposition and Reconstruction of Tightly Supported Parseval Wavelet Frame

Yuzhu Cheng, Wanshe Li

School of Mathematics and Statistics, Shaanxi Normal University, Xi'an Shaanxi

Received: Mar. 26th, 2024; accepted: Apr. 16th, 2024; published: Apr. 25th, 2024

Abstract

In this paper, a compact supported Parseval wavelet frame with good properties is constructed. We apply the idea of multi-resolution analysis to define a general spatial sequence based on the wavelet frame by using the quantitative relation of the wavelet frame and the relevant scale function, and get the decomposition and reconstruction theorem of the compact support Parseval wavelet frame, and then make the block diagram of signal decomposition and reconstruction, and summarize the algorithm. The experimental results show that compared with the decomposition and reconstruction algorithm of Haar wavelet function, the proposed algorithm has better performance.

Keywords

Expansion Matrix, Parseval Wavelet Frame, Decomposition and Reconstruction

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

信号处理是现代科学技术中重要一环, 是许多应用的一个基础性工作。对于相对平稳的信号, 一般利用傅里叶变换进行处理, 而非平稳信号大多数使用小波分析。由于小波函数具有较好的时间和频率的局部特性, 小波的分解与重构在信号处理与图像处理中的应用十分广泛。近年来, 研究并构造性质良好的紧支撑小波框架已经越来越成为人们关注的焦点。紧小波不仅更容易构造, 而且也可以像正交小波一样易于计算和应用。

在一维并具有二进扩张中构造了具有任意阶的消失矩和任意正则度的紧支撑小波[1]。在二维中 Ron 和 Shen 构造了紧支撑的紧仿射框架, 还描述了在任意 d 维和任意扩张矩阵中构造紧支撑紧仿射框架算法[2]。在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中构造了与任意扩张矩阵相关联的具有任意正则度的紧支撑小波框架。在这些构造中, 生成器的数量随着正则度的增加而增加[3]。Han [4]的论文提供了与一般扩张矩阵相关的紧小波框架的存在性的证明, 框架的生成器具有任意给定的正则度、任意固定的消失矩阶数和固定数目的生成器, 而且生成器的数量也有限制。[5]中构造形成了与扩张矩阵 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$, $d \geq 1$ 相关的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中的一族紧支撑帕塞瓦尔小波框架, 其中生成器是紧支撑的, 有任意想要的消失矩的阶数, 也可以给定任意的正则性, 而且生成器的数量不超过 $|\det A| + d$ 个。这一族紧支撑帕塞瓦尔小波框架较于正交小波更易于构造、性质更好, 计算和应用同样有优势。构造时简单高效, 在性质上也有很大优势: 不仅有确定的消失矩的阶数, 使尽量多的小波系数为零或者产生尽量少的非零小波系数, 利于消除噪声, 尤其是在分析突变信号时能更有效地检测出奇点; 而且还能设定确定的正则性, 使得信号或图像的重构中获得较好的平滑性, 减少量化或舍入误差的视觉影响。因此本文在文献[5]的基础上, 研究具体的一类小波框架的分解与重构算法。

本文其余部分结构安排如下: 在第二节中, 介绍了紧支撑帕塞瓦尔小波框架的定义及相关定理、多分辨率分析, 还有具体扩张矩阵相关的 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上紧支撑帕塞瓦尔小波框架的由来。在第三节中, 推导出了本文所提出的紧支撑帕塞瓦尔小波框架相关的信号分解与重构问题。在第四节中, 给出了紧支撑帕塞瓦尔小波框架的分解与重构算法。在第五节中, 给出了实验结果分析。在第六节中, 给出了结论。

2. 准备工作

2.1. 紧支撑帕塞瓦尔小波框架的定义及相关定理

首先给出紧支撑帕塞瓦尔小波框架的定义及相关定理。

定义 2.1. [5] 设 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ 是可分希尔伯特空间 H 中元素的序列, 如果存在常数 $C_1, C_2 > 0$, 使得 $C_1 \|h\|^2 \leq \sum_{n=1}^\infty |\langle h, \phi_n \rangle|^2 \leq C_2 \|h\|^2, \forall h \in H$, 则称序列 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ 为 H 中的一个框架。常数 C_1 和 C_2 称为框架界。若 $C_1 = C_2$, 那么 $\{\phi_n\}_{n=1}^\infty$ 为紧框架。

定义 2.2. [5] 在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 中, 若一个框架为 $\{\psi_{l,j,k}(x); j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq l \leq N\}$, 其中

$\psi_{l,j,k}(x) := |\det A|^{j/2} \psi_l(A^j x + k)$, 则称其为与扩张矩阵 A 相关的小波框架。若它为紧框架, 那么 $\{\psi_{l,j,k}(x); j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d, 1 \leq l \leq N\}$ 被称为紧小波框架。若函数是线性无关的, 则成为一族小波框架的生成器。

若帧常数等于 1, 则称其为帕塞瓦尔小波框架。从而就有, $\sum_{l=1}^N \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left| \langle f, \psi_{l,j,k}(x) \rangle \right|^2 = \|f\|^2, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ 。

定义 2.3. [5] 在 $L^1(\mathbb{R}^d)$ 中, $\hat{f}$ 表示函数的傅里叶变换。定义为 $\hat{f} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i x \cdot t} dx$, 其中 $x \cdot t$ 为向量的点积。可以将其推广到 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中。

假设 A 为整数项的可逆矩阵, 那么 A 可以进行施密特正交化, 即 $A = USV$, 其中 U 和 V 为整数矩阵且 $|\det U| = |\det V| = 1$, $S = \text{diag}(s_1, s_2, \dots, s_r, \dots, s_d)$ 为对角矩阵。存在一个整数 $r \leq d$, 当 $1 \leq i \leq r$ 时, $s_i > 1$, 当 $i > r$ 时, $s_i = 1$ 。在 $r = d$ 的情况下, 所有的 s_i 都将大于 1, 如果 $i \leq r$, 则 s_i 可被 s_{i-1} 整除。

在施密特正交化后, 易得到商群 $\mathbb{Z}^d / AZ^d$ 以及 $(A^*)^{-1} \mathbb{Z}^d / \mathbb{Z}^d$ 的完整集合形式。令

$$\Gamma = \left\{ \frac{0}{s_1}, \frac{1}{s_1}, \dots, \frac{s_1-1}{s_1} \right\} \times \dots \times \left\{ \frac{0}{s_r}, \frac{1}{s_r}, \dots, \frac{s_r-1}{s_r} \right\} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}, \text{ 从而有}$$

$$\Gamma_A := \{r_a\}_{a=0}^{|\det A|-1} := \left\{ (U^*)^{-1} \gamma : \gamma \in \Gamma \right\} \in (A^*)^{-1} \mathbb{Z}^d / \mathbb{Z}^d, \Delta_A := \{q_a\}_{a=0}^{|\det A|-1} \in \mathbb{Z}^d / AZ^d。$$

引入 $\mathbb{R}$ 上的三角多项式 $p_{s,m}(t) := \frac{1}{s^{2m}} \left| 1 + e^{2\pi i t} + \dots + e^{2\pi i (s-1)t} \right|^2 \sum_{j=0}^{m-1} q_{s,m}^{(j)} (1 - \cos 2\pi t)^j$, 其中当 $b = s/2$ 时,

$$q_{s,m}^{(j)} := \sum_{k_1+k_2+\dots+k_b=j} \left\{ \prod_{c=1}^{b-1} \binom{2m+k_c-1}{2m-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi c}{s} \right)^{-k_c} \right\} \times \binom{2m+k_b-1}{2m-1} (1 - \cos \pi)^{-k_b}; \text{ 当 } b = (s-1)/2 \text{ 时,}$$

$$q_{s,m}^{(j)} := \sum_{k_1+k_2+\dots+k_b=j} \left\{ \prod_{c=1}^b \binom{2m+k_c-1}{2m-1} \left(1 - \cos \frac{2\pi c}{s} \right)^{-k_c} \right\}。$$

定理 2.1. [5] 令 $D := |\det A|$, $\hat{\theta}(A^* t) = |H(t)|^{2n} \hat{\theta}(t) = P(t) \hat{\theta}(t)$, 其中 $P(t) = |H(t)|^{2n}$ 、 $H(t) := Q(U^* t)$ 、

$Q(t) = Q(t_1, t_2, \dots, t_d) := \prod_{j=1}^r h_{s_j, m_j}(t_j)$, 满足 $|h_{s,m}(t)|^2 = p_{s,m}(t)$ 。 P 为前面式子中定义的 $\mathbb{R}^d$ 上的实值三角多项式。令 θ 满足 $\hat{\theta}(t) := |\hat{\phi}(t)|^{2n}$, 且此时 θ 傅里叶变换是非零的, 可细化和紧支撑的。定义

$\hat{\psi}_\ell(A^* t) := D^{-\frac{1}{2}} \left[e^{2\pi i q_\ell \cdot t} - P(t) \left(\sum_{\alpha=0}^{D-1} e^{2\pi i q_\ell \cdot (t+r_\alpha)} \right) P(t+r_\alpha) \right] \hat{\theta}(t), \forall \ell \in \{0, \dots, D-1\}$, 且

$\hat{\psi}_\ell(A^* t) := P(t) F_{\ell-D+1}(t) \hat{\theta}(t), \forall \ell \in \{0, \dots, D+r-1\}$, 其中定义 $F_\ell(t) := G_\ell(U^* t), \forall \ell \in \{1, \dots, r\}$ 。让

$\Psi = \{\psi_\ell : \ell = 0, \dots, D+r-1\}$ 为上述恒等式中定义函数的傅里叶逆变换的集合。那么 Ψ 是 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 中与扩张矩阵 A 相关的紧支撑帕塞瓦尔小波框架, 其消失矩为 m_0 阶。

定理 2.2. [5] 对于任何包含积分项的扩张矩阵 $A \in R^{d \times d}, d \geq 1$, 可以在 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 构造一族帕塞瓦尔小波框架。这一族小波框架的生成器依赖于扩张矩阵 A 与维数 d , 但不超过 $|\det A| + d$ 。

2.2. 多分辨率分析的拓展

将多分辨率分析拓展到框架域中, 给出其概念。

定义 2.4. [6] 设函数 $\theta_l(x) \in L^2(\mathbb{R})$, $V_j, j = \dots, -1, 0, 1, \dots$ 为 $L^2(\mathbb{R})$ 的一系列闭子空间, 且满足 $V_j = \text{span}\{2^{j/2} \theta(2^j \cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}, j \in \mathbb{Z}$, 如果有以下的条件成立:

- 1) $V_j \subset V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$;
- 2) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j = L^2(\mathbb{R}), \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$;

- 3) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}, \forall j \in \mathbb{Z}$;
 4) $f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t-n) \in V_j, \forall j, n \in \mathbb{Z}$;
 5) 存在函数 $\theta \in V_0$, 使得 $\{\theta(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ 构成空间 V_0 的一个框架,

则称函数 $\theta(x)$ 生成 $L^2(\mathbb{R})$ 的框架多分辨率分析, 也称其为尺度函数。

定义 2.5. [6] 设 $\psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^s\} \subset L^2(\mathbb{R})$ 是由尺度函数 $\theta(x)$ 定义的小波函数序列, V_j 是由张成的空间。定义系统 $X(\psi) := \left\{ \psi_{j,k}^i = 2^{\frac{j}{2}} \psi^i(2^j \cdot -k), i=1, 2, \dots, s, j, k \in \mathbb{Z} \right\}$, 对于任意的 $f \in L^2(\mathbb{R})$, 如果 $\psi \subset V_j$

满足: $\sum_{i=1}^s \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \left| \langle f, \psi_{j,k}^i \rangle \right|^2 = \|f\|^2$, 则称系统 $X(\psi)$ 是 $L^2(\mathbb{R})$ 的一个 MRA 紧小波框架, 函数序列

$\psi = \{\psi^1, \psi^2, \dots, \psi^s\}$ 称为紧小波框架的生成子合集。

类似地, 可以将多分辨率推广到 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 空间帕塞瓦尔小波框架中。

2.3. 具体化

最后对于具体的扩张矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 可以得到与 A 相关的在 $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上紧支撑帕塞瓦尔尺度函数和小波函数。

商群 $\mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$ 的集合为: $\Delta_A = \{q_0 = (0,0)^T, q_1 = (1,0)^T, q_2 = (2,0)^T\}$

商群 $(A^*)^{-1}\mathbb{Z}^d / \mathbb{Z}^d$ 的集合为: $\Gamma_A = \left\{ r_0 = (0,0)^T, r_1 = \left(\frac{1}{3}, 0\right)^T, r_2 = \left(\frac{2}{3}, 0\right)^T \right\}$

定义 $t = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^d$ 以及两个三角多项式, $P(t) = \frac{1}{9}(3 + 4\cos(2\pi t_1) + 2\cos(4\pi t_1))$,

$$F(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3^2}(1 - e^{6\pi i t_1}).$$

定义紧支撑可细化函数[7]为 $\theta \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 使得 θ 的傅里叶变换为 $\hat{\theta}(t) = \prod_{j=1}^{\infty} P\left((A^*)^{-j} t\right), t \in \mathbb{R}^2$ 。

定义紧支撑帕塞瓦尔小波框架为 $\Psi = \{\psi_l; l=0, 1, 2, 3\}$, 使得 ψ_l 的傅里叶变换为: 当 $l \in \{0, 1, 2\}$ 时, $\hat{\psi}_l(A^*t) := 3^{-1/2} \left[e^{2\pi i q_l \cdot t} - P(t) \left(\sum_{a=0}^2 e^{2\pi i q_l \cdot (t+r_a)} P(t+r_a) \right) \right] \hat{\theta}(t)$, 当 $l=3$ 时, $\hat{\psi}_3(A^*t) := P(t)F(t)\hat{\theta}(t)$ 。

代入经过计算可得,

$$\begin{cases} \hat{\psi}_0(A^*t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\theta}(t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{\theta}(A^*t) \\ \hat{\psi}_1(A^*t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{2\pi i t_1}\hat{\theta}(t) - \frac{1}{3\sqrt{3}}e^{6\pi i t_1}\hat{\theta}(A^*t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\hat{\theta}(A^*t) \\ \hat{\psi}_2(A^*t) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{4\pi i t_1}\hat{\theta}(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}e^{6\pi i t_1}\hat{\theta}(A^*t) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\hat{\theta}(A^*t) \\ \hat{\psi}_3(A^*t) = \frac{2\sqrt{3}}{3^2}\hat{\theta}(A^*t) - \frac{2\sqrt{3}}{3^2}e^{6\pi i t_1}\hat{\theta}(A^*t) \end{cases}$$

定义经过逆傅里叶变换有:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}_l(A^*t) e^{2\pi i x \cdot t} dt &= \psi_l(A^*x); \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(A^*t) e^{2\pi i x \cdot t} dt = \theta(A^*x); \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(t) e^{2\pi i x \cdot t} dt = \theta(x) \\ \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(t) e^{2\pi i t_1} e^{2\pi i x \cdot t} dt &= \theta(x + (1,0)^T); \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(t) e^{4\pi i t_1} e^{2\pi i x \cdot t} dt = \theta(x + (2,0)^T); \end{aligned}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\theta}(A^*t) e^{6\pi i t_1} e^{2\pi i x \cdot t} dt = \theta\left(A^*\left(x + (3, 0)^T\right)\right)$$

其中, $x = (x_1, x_2)^T$ 。

则将上述四个等式进行逆傅里叶变换将得到:

$$\begin{cases} \psi_0(A^*x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\theta(A^*x) \\ \psi_1(A^*x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta\left(x + (1, 0)^T\right) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(A^*\left(x + (3, 0)^T\right)\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\theta(A^*x) \\ \psi_2(A^*x) = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta\left(x + (2, 0)^T\right) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\theta\left(A^*\left(x + (3, 0)^T\right)\right) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta(A^*x) \\ \psi_3(A^*x) = \frac{2\sqrt{3}}{3^2}\theta(A^*x) - \frac{2\sqrt{3}}{3^2}\theta\left(A^*\left(x + (3, 0)^T\right)\right) \end{cases}$$

由此, 可以进行信号分解与重构问题的讨论。

3. 信号分解与重构问题

本章首先基于紧支撑帕塞瓦尔小波的构造定理得到性质良好的帕塞瓦尔小波框架及其相应尺度函数之间的数量关系, 然后利用多分辨率分析思想[8], 类似于 Haar 函数的分解与重构过程, 以小波框架为基础定义一般的空间序列, 最终得到紧支撑帕塞瓦尔小波框架的分解与重构定理[9][10]。

3.1. 信号分解问题

由于

$$\hat{\theta}(A^*t) = P(t)\hat{\theta}(t) = \frac{1}{9}(3 + 4\cos(2\pi t_1) + 2\cos(4\pi t_1))\hat{\theta}(t) = \frac{1}{9}(3 + 2e^{2\pi i t_1} + 2e^{-2\pi i t_1} + e^{4\pi i t_1} + e^{-4\pi i t_1})\hat{\theta}(t)$$

等式两边同时进行逆傅里叶变换, 有

$$\begin{aligned} \theta(A^*x) &= \frac{1}{9}\left(3\theta(x) + 2\theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 2\theta\left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \theta\left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{9}\left(3\theta(x) + 2\theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + 2\left(\theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\psi_3(x)\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{9}\left(\theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\psi_3(x)\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\theta(x) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3(x) \\ &= \frac{1}{3}\left(\theta(x) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\right) + \frac{1}{3}\theta(x) - \frac{1}{3}\theta\left(x + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{2}{3}\theta(x) + \frac{1}{3}\theta\left(x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3}\theta\left(x + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3}\theta\left(x + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

令 $B = (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$, 对上述等式进行整理即可得到;

$$\theta(x) = \frac{2}{3}\theta(Bx) + \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

且由上述四个等式经过变形化解可以得到:

$$\begin{cases} \theta(Bx) = \theta(x) + \sqrt{3}\psi_0(x) \\ \theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(x) + \sqrt{3}\psi_1(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3(x) \\ \theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(x) + \sqrt{3}\psi_2(x) - \sqrt{3}\psi_3(x) \\ \theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(x) + 2\sqrt{3}\psi_0(x) + \sqrt{3}\psi_1(x) + \sqrt{3}\psi_2(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\psi_3(x) \end{cases}$$

进一步地, 上式可以推广为

$$\begin{cases} \theta(B^l x) = \theta(B^{l-1}x) + \sqrt{3}\psi_0(B^{l-1}x) \\ \theta\left(B^l x + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(B^{l-1}x) + \sqrt{3}\psi_1(B^{l-1}x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3(B^{l-1}x) \\ \theta\left(B^l x + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(B^{l-1}x) + \sqrt{3}\psi_2(B^{l-1}x) - \sqrt{3}\psi_3(B^{l-1}x) \\ \theta\left(B^l x + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \theta(B^{l-1}x) + 2\sqrt{3}\psi_0(B^{l-1}x) + \sqrt{3}\psi_1(B^{l-1}x) + \sqrt{3}\psi_2(B^{l-1}x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\psi_3(B^{l-1}x) \end{cases}$$

通过上述等式, 发现可以对信号 $f_n(x)$ 进行逐级分解。

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k \theta(B^n x - k) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{0k} \theta(B^n x - Bk) + a_{1k} \theta\left(B^n x - Bk + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &\quad + a_{2k} \theta\left(B^n x - Bk + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + a_{3k} \theta\left(B^n x - Bk + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_{0k} \left(\theta(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}\psi_0(B^{n-1}x - k) \right) \\ &\quad + a_{1k} \left(\theta(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}\psi_1(B^{n-1}x - k) - \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_3(B^{n-1}x - k) \right) \\ &\quad + a_{2k} \left(\theta(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}\psi_2(B^{n-1}x - k) - \sqrt{3}\psi_3(B^{n-1}x - k) \right) \\ &\quad + a_{3k} \left(\theta(B^{n-1}x - k) + 2\sqrt{3}\psi_0(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}\psi_1(B^{n-1}x - k) \right) \\ &\quad + a_{3k} \left(\sqrt{3}\psi_2(B^{n-1}x - k) - \frac{3\sqrt{3}}{2}\psi_3(B^{n-1}x - k) \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sqrt{3}(a_{0k} + 2a_{3k})\psi_0(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}(a_{1k} + a_{3k})\psi_1(B^{n-1}x - k) \\ &\quad + \sqrt{3}(a_{2k} + a_{3k})\psi_2(B^{n-1}x - k) + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}a_{1k} - a_{2k} - \frac{3}{2}a_{3k}\right)\psi_3(B^{n-1}x - k) \\ &\quad + (a_{0k} + a_{1k} + a_{2k} + a_{3k})\theta(B^{n-1}x - k) \\ &= w_{n-1}(x) + f_{n-1}(x) \end{aligned}$$

类似上述过程一直分解下去, 就可以得到信号分解定理。

分解定理: 假设

$$f_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^l \theta(B^l x - k) \in V_l,$$

则 $f_l(x)$ 可以分解成下列形式

$$f_l(x) = w_{l-1}(x) + f_{l-1}(x)$$

其中

$$w_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^{l-1} \psi_0(B^{l-1}x - k) + b_{1k}^{l-1} \psi_1(B^{l-1}x - k) + b_{2k}^{l-1} \psi_2(B^{l-1}x - k) + b_{3k}^{l-1} \psi_3(B^{l-1}x - k) \in W_{l-1}$$

$$f_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^{l-1} \theta(B^{l-1}x - k) \in V_{l-1},$$

$$\text{满足 } b_{0k}^{l-1} = \sqrt{3}(a_{0k}^l + 2a_{3k}^l)/4, \quad b_{1k}^{l-1} = \sqrt{3}(a_{1k}^l + a_{3k}^l)/4, \quad b_{2k}^{l-1} = \sqrt{3}(a_{2k}^l + a_{3k}^l)/4,$$

$$b_{3k}^{l-1} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}a_{1k}^l - a_{2k}^l - \frac{3}{2}a_{3k}^l\right)/4, \quad a_k^{l-1} = (a_{0k}^l + a_{1k}^l + a_{2k}^l + a_{3k}^l)/4,$$

此分解可以一直进行下去, 得到下面的分解式:

$$f_n(x) = w_{n-1}(x) + w_{n-2}(x) + \cdots + w_1(x) + f_0(x)$$

其中 $w_l(x) \in W_l, \forall l=1, \dots, n, \quad f_0(x) \in V_0$ 。

3.2. 信号重构问题

设

$$f_n(x) = w_{n-1}(x) + w_{n-2}(x) + \cdots + w_1(x) + f_0(x), w_l(x) \in W_l$$

其中分量 $w_l(x), l=0, 1, 2, \dots, n-1$ 和 $f_0(x)$ 已知, 且

$$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^0 \theta(x - k) \in V_0$$

以及

$$w_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^l \psi_0(B^l x - k) + b_{1k}^l \psi_1(B^l x - k) + b_{2k}^l \psi_2(B^l x - k) + b_{3k}^l \psi_3(B^l x - k)。$$

信息重构的任务是根据这些已知的信息得到原始的采样信息值。

从信号分解问题中可以看到: $b_{3k}^l = -\frac{1}{2}b_{1k}^l - b_{2k}^l$

重构过程中所需要的公式:

$$\begin{cases} \theta(x) = \frac{2}{3}\theta(Bx) + \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \psi_0(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta(Bx) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \psi_1(x) - \frac{1}{2}\psi_3(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\theta(Bx) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ \psi_2(x) - \psi_3(x) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}\theta(Bx) - \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{2}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{3\sqrt{3}}\theta\left(Bx + B\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

从而有 $f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^0 \theta(x-k) \in V_0$

$$\begin{aligned} f_0(x) &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{2}{3} a_k^0 \theta(Bx - Bk) + \frac{1}{3} a_k^0 \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{3} a_k^0 \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) - \frac{1}{3} a_k^0 \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \tilde{a}_k^1 \theta(Bx - n) \end{aligned}$$

其中,

$$\tilde{a}_k^1 = \begin{cases} \frac{8}{3} a_k^0, n = Bk \\ \frac{4}{3} a_k^0, n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3} a_k^0, n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{4}{3} a_k^0, n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

类似地,

$$\begin{aligned} w_0(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^0 \psi_0(x-k) + b_{1k}^0 \psi_1(x-k) + b_{2k}^0 \psi_2(x-k) + \left(-\frac{1}{2} b_{1k}^0 - b_{2k}^0 \right) \psi_3(x-k) \\ &= 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^0 \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \theta(Bx - Bk) - \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^0 \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx + B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{1k}^0 \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}} \theta(Bx - Bk) + \frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{1k}^0 \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{2k}^0 \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}} \theta(Bx - Bk) - \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &\quad + 4 \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{2k}^0 \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \frac{1}{3\sqrt{3}} \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 - 2b_{1k}^0 - 2b_{2k}^0) \theta(Bx - Bk) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 + 2b_{1k}^0 - b_{2k}^0) \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 - b_{1k}^0 + 2b_{2k}^0) \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 + b_{1k}^0 + b_{2k}^0) \theta \left(Bx - Bk + B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\
& = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \tilde{b}_k^1 \theta(Bx - n)
\end{aligned}$$

其中,

$$\tilde{b}_k^1 = \begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 - 2b_{1k}^0 - 2b_{2k}^0), n = Bk \\ \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 + 2b_{1k}^0 - b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 - b_{1k}^0 + 2b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 + b_{1k}^0 + b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

由于 $w_0(x) + f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^1 \theta(Bx - k)$,
其中

$$a_k^1 = \tilde{a}_k^1 + \tilde{b}_k^1 = \begin{cases} \frac{8}{3} a_k^0 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 - 2b_{1k}^0 - 2b_{2k}^0), n = Bk \\ \frac{4}{3} a_k^0 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 + 2b_{1k}^0 - b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3} a_k^0 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^0 - b_{1k}^0 + 2b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{4}{3} a_k^0 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^0 + b_{1k}^0 + b_{2k}^0), n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

同理可得,

$$w_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^1 \psi_0(Bx - k) + b_{1k}^1 \psi_1(Bx - k) + b_{2k}^1 \psi_2(Bx - k) + \left(-\frac{1}{2} b_{1k}^1 - b_{2k}^1 \right) \psi_3(Bx - k) \in W_1$$

以及

$$f_0(x) + w_0(x) + w_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^2 \theta(Bx - k)$$

其中,

$$a_k^2 = \begin{cases} \frac{8}{3} a_k^1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^1 - 2b_{1k}^1 - 2b_{2k}^1), n = Bk \\ \frac{4}{3} a_k^1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^1 + 2b_{1k}^1 - b_{2k}^1), n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3} a_k^1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (-b_{0k}^1 - b_{1k}^1 + 2b_{2k}^1), n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{4}{3} a_k^1 + \frac{4}{3\sqrt{3}} (b_{0k}^1 + b_{1k}^1 + b_{2k}^1), n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

以此类推, 直到得到系数 a_k^n , 便可以得到信号重构定理。

重构定理: 假设 $f_l(x) = w_{l-1}(x) + w_{l-2}(x) + \cdots + w_1(x) + w_0(x) + f_0(x)$,

满足 $f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^0 \theta(x-k) \in V_0$ 与

$$w_i(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^i \psi_0(B^i x - k) + b_{1k}^i \psi_1(B^i x - k) + b_{2k}^i \psi_2(B^i x - k) + \left(-\frac{1}{2}b_{1k}^i - b_{2k}^i\right) \psi_3(B^i x - k),$$

$w_i(x) \in W_i, 0 \leq i \leq l-1$, 则 $f_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^l \theta(B^l x - k) \in V_l$ 的系数 a_k^l 可以按照以下的表达式递推实现

$$a_k^l = \begin{cases} \frac{8}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(b_{0k}^{l-1} - 2b_{1k}^{l-1} - 2b_{2k}^{l-1}), n = Bk \\ \frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(-b_{0k}^{l-1} + 2b_{1k}^{l-1} - b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(-b_{0k}^{l-1} - b_{1k}^{l-1} + 2b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(b_{0k}^{l-1} + b_{1k}^{l-1} + b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

4. 信号分解与重构的框图

信号的分解与重构方法可以通过流程框图的形式来描述, 将分解与重构过程清晰明了化[11]。

4.1. 信号分解框图

从信号分解算法开始讨论, 通过上述的信号分解算法, 可以将其转化为一维的运算, 通过卷积运算定义滤波运算 L 、 H_0 、 H_1 、 H_2 , (由于 b_{3k}^l 由 b_{1k}^l 和 b_{2k}^l 决定, 所以对应的高通滤波器只有三个), 它们分别对应的脉冲响应为 $l = \frac{1}{4}(\cdots, 0, \cdots, 0, \underset{k=-3}{1}, \underset{k=-2}{1}, \underset{k=-1}{1}, \underset{k=0}{1}, 0, \cdots)$, $h_0 = \frac{1}{4}(\cdots, 0, \cdots, 0, \underset{k=-3}{2\sqrt{3}}, \underset{k=-2}{0}, \underset{k=-1}{0}, \underset{k=0}{\sqrt{3}}, 0, \cdots)$, $h_1 = \frac{1}{4}(\cdots, 0, \cdots, 0, \underset{k=-3}{\sqrt{3}}, \underset{k=-2}{0}, \underset{k=-1}{\sqrt{3}}, \underset{k=0}{0}, \cdots)$, $h_2 = \frac{1}{4}(\cdots, 0, \cdots, 0, \underset{k=-3}{\sqrt{3}}, \underset{k=-2}{\sqrt{3}}, \underset{k=-1}{0}, \underset{k=0}{0}, \cdots)$ 。

对于序列 $x = \{x_m\}$, 则有 $L(x) = (l * x)$ (低通滤波器作用), $H_0(x) = (h_0 * x)$, $H_1(x) = (h_1 * x)$, $H_2(x) = (h_2 * x)$ (高通滤波器作用) [12]。

$$L(x)_k = (l * x)_k = \frac{1}{4}(x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3})$$

$$H_0(x)_k = (h_0 * x)_k = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_k + 2\sqrt{3}x_{k+3})$$

$$H_1(x)_k = (h_1 * x)_k = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_{k+1} + \sqrt{3}x_{k+3})$$

$$H_2(x)_k = (h_2 * x)_k = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_{k+2} + \sqrt{3}x_{k+3})$$

保留 4 的倍数部分有:

$$L(x)_{4k} = \frac{1}{4}(x_{4k} + x_{4k+1} + x_{4k+2} + x_{4k+3})$$

$$H_0(x)_{4k} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_{4k} + 2\sqrt{3}x_{4k+3})$$

$$H_1(x)_{4k} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_{4k+1} + \sqrt{3}x_{4k+3})$$

$$H_2(x)_{4k} = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x_{4k+2} + \sqrt{3}x_{4k+3})$$

下采样对应的算子记为 D , 于是第 n 层的尺度系数 a_k^n 分解为第 $n-1$ 层尺度系数 a_k^{n-1} 以及小波系数 b_{0k}^{n-1} 、 b_{1k}^{n-1} 、 b_{2k}^{n-1} 的过程可以表示为 $a_k^{n-1} = DL(a_k^n)$ 、 $b_{0k}^{n-1} = DH_0(a_k^n)$ 、 $b_{1k}^{n-1} = DH_1(a_k^n)$ 、 $b_{2k}^{n-1} = DH_2(a_k^n)$ 。利用记号 “ $\downarrow 4$ ” 表示下采样运算 D , 信号分解框图如图 1 所示。

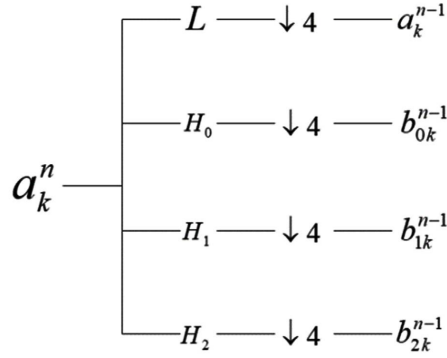


Figure 1. Signal decomposition block diagram
图 1. 信号分解框图

4.2. 信号重构框图

关于重构 $f_l(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^l \theta(B^l x - k) \in V_l$ 的系数 a_k^l 满足

$$a_k^l = \begin{cases} \frac{8}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(b_{0k}^{l-1} - 2b_{1k}^{l-1} - 2b_{2k}^{l-1}), n = Bk \\ \frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(-b_{0k}^{l-1} + 2b_{1k}^{l-1} - b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(-b_{0k}^{l-1} - b_{1k}^{l-1} + 2b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{4}{3}a_k^{l-1} + \frac{4}{3\sqrt{3}}(b_{0k}^{l-1} + b_{1k}^{l-1} + b_{2k}^{l-1}), n = Bk - B \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}, l = 1, 2, 3, \dots, n$$

关于重构定义算子 $\tilde{L}$ 、 $\tilde{H}_0$ 、 $\tilde{H}_1$ 、 $\tilde{H}_2$ 的脉冲响应 $\tilde{l}$ 、 $\tilde{h}_0$ 、 $\tilde{h}_1$ 、 $\tilde{h}_2$ 分别满足

$$\tilde{l} = 4 \times \left(\dots, 0, \dots, 0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \dots \right)_{\substack{k=-3 \\ k=-2 \\ k=-1 \\ k=0}}, \quad \tilde{h}_0 = 4 \times \left(\dots, 0, \dots, 0, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{1}{3\sqrt{3}}, 0, \dots \right)_{\substack{k=-3 \\ k=-2 \\ k=-1 \\ k=0}},$$

$$\tilde{h}_1 = 4 \times \left(\dots, 0, \dots, 0, \frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0, \dots \right)_{\substack{k=-3 \\ k=-2 \\ k=-1 \\ k=0}}, \quad \tilde{h}_2 = 4 \times \left(\dots, 0, \dots, 0, \frac{1}{3\sqrt{3}}, \frac{2}{3\sqrt{3}}, -\frac{1}{3\sqrt{3}}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}, 0, \dots \right)_{\substack{k=-3 \\ k=-2 \\ k=-1 \\ k=0}}.$$

对于序列 $x = \{x_m\}$ 直接计算有

$$\tilde{L}(x)_k = (\tilde{l} * x)_k = 4 \times \left(\frac{2}{3}x_k + \frac{1}{3}x_{k+1} + \frac{1}{3}x_{k+2} - \frac{1}{3}x_{k+3} \right)$$

$$\tilde{H}_0(x)_k = (\tilde{h}_0 * x)_k = 4 \times \left(\frac{1}{3\sqrt{3}}x_k - \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+1} - \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+3} \right)$$

$$\tilde{H}_1(x)_k = (\tilde{h}_1 * x)_k = 4 \times \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}x_k + \frac{2}{3\sqrt{3}}x_{k+1} - \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+3} \right)$$

$$\tilde{H}_2(x)_k = (\tilde{h}_2 * x)_k = 4 \times \left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}x_k - \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+1} + \frac{2}{3\sqrt{3}}x_{k+2} + \frac{1}{3\sqrt{3}}x_{k+3} \right)$$

在进行运算时, 需要进行插值, 即构造 $x = \{x_m\}$ 满足上采样
 $(\cdots, 0, \cdots, 0, x_0, 0, 0, 0, x_1, 0, 0, 0, x_2, 0, 0, 0, x_3, 0, \cdots)$
 从而有

$$\begin{aligned} \tilde{L}(x)_k = (\tilde{l} * x)_k &= \begin{cases} \frac{8}{3}x_{4k}, & l = 4k \\ \frac{4}{3}x_{4k}, & l = 4k + 1 \\ \frac{4}{3}x_{4k}, & l = 4k + 2 \\ -\frac{4}{3}x_{4k}, & l = 4k + 3 \end{cases} \\ \tilde{H}_0(x)_k = (\tilde{h}_0 * x)_k &= \begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 1 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 2 \\ \frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 3 \end{cases} \\ \tilde{H}_1(x)_k = (\tilde{h}_1 * x)_k &= \begin{cases} -\frac{8}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k \\ \frac{8}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 1 \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 2 \\ \frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 3 \end{cases} \\ \tilde{H}_2(x)_k = (\tilde{h}_2 * x)_k &= \begin{cases} -\frac{8}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k \\ -\frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 1 \\ \frac{8}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 2 \\ \frac{4}{3\sqrt{3}}x_{4k}, & l = 4k + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

上采样算子记为 U , 则有

$$a^m = \tilde{L}U\tilde{a}^{m-1} + \tilde{H}_0U\tilde{b}_0^{m-1} + \tilde{H}_1U\tilde{b}_1^{m-1} + \tilde{H}_2U\tilde{b}_2^{m-1}$$

利用“ $\uparrow 4$ ”来表示上采样算子, 则重构过程可以描述成下面流程图的形式。(图 2)

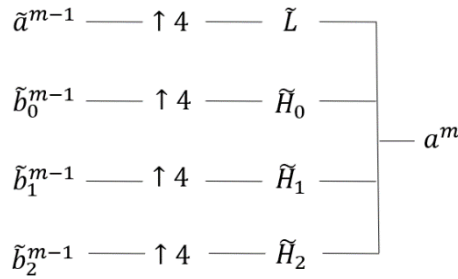


Figure 2. Signal reconstruction block diagram

图 2. 信号重构框图

5. 算法小结

本文小波框架的信号分解与重构过程可以总结为以下算法:

第一步采样: 待分解信号 $f_n(x)$, 得到采样值 $f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^n \theta(B^n x - k) \in V_n$, 对连续的信号进行高精度近似。

第二步分解: $f_n(x) = w_{n-1}(x) + w_{n-2}(x) + \dots + w_1(x) + w_0(x) + f_0(x)$, 且有

$$w_{l-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} b_{0k}^{l-1} \psi_0(B^{l-1}x - k) + b_{1k}^{l-1} \psi_1(B^{l-1}x - k) + b_{2k}^{l-1} \psi_2(B^{l-1}x - k) + b_{3k}^{l-1} \psi_3(B^{l-1}x - k) \in W_{l-1} \quad \forall l = 1, \dots, n.$$

$f_0(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^0 \theta(B^0 x - k) \in V_0$ 。系数 a_k^{l-1} 、 b_{0k}^{l-1} 、 b_{1k}^{l-1} 、 b_{2k}^{l-1} 按照上标从大到小的顺序从 $l = n$ 开始到 $l = 0$

结束, 递推得到 $a_k^{l-1} = DL(a_k^l)$ 、 $b_{0k}^{l-1} = DH_0(a_k^l)$ 、 $b_{1k}^{l-1} = DH_1(a_k^l)$ 、 $b_{2k}^{l-1} = DH_2(a_k^l)$ 。

第三步信号处理: 通过修正即可得到新的系数 $\tilde{a}^{m-1}$ 、 $\tilde{b}_0^{m-1}$ 、 $\tilde{b}_1^{m-1}$ 、 $\tilde{b}_2^{m-1}$ 。

第四步重构: 设重构后的信号值满足 $f_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} a_k^n \theta(B^n x - k) \in V_n$ 。信号值可以通过下面的递推过程得到 $a^m = \tilde{L}U\tilde{a}^{m-1} + \tilde{H}_0U\tilde{b}_0^{m-1} + \tilde{H}_1U\tilde{b}_1^{m-1} + \tilde{H}_2U\tilde{b}_2^{m-1}$ 。

6. 实验结果

本文在编程软件MATLABR2021b上对比了Haar小波以及新构造的紧支撑帕塞瓦尔小波框架对图像分解后的结果。为了评估本文算法的性能, 选取大小为 256×256 的灰度图像cameraman作为原始图像如图3所示。使用Haar小波一级分解后的图像如图4所示。使用本文构造出的紧支撑帕塞瓦尔小波框架分解算法后的图像如图5所示。



Figure 3. Cameraman

图 3. Cameraman 原始图像



Figure 4. Image after first level decomposition using Haar wavelet

图 4. 使用 Haar 小波一级分解后的图像

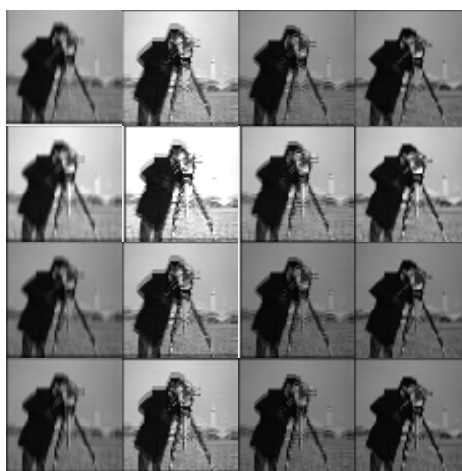


Figure 5. The image is decomposed using a tightly supported Parseval wavelet frame

图 5. 使用紧支撑帕塞瓦尔小波框架一级分解后的图像

对比图 4 和图 5, 从视觉感知上, 使用帕塞瓦尔小波框架分解图像在获取细节系数时更优于使用 Haar 小波分解图像。

7. 结束语

本文根据紧支撑帕塞瓦尔小波框架的构造方法, 结合多分辨率分析得到了小波框架及对应尺度函数, 得到新的图像分解与重构算法。通过与 Haar 小波函数的分解对比, 可以明显看出不仅构造时简单高效, 在性质上也有很大优势, 有确定的消失矩的阶数, 还能设定确定的正则性。

参考文献

- [1] Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>

- [2] Ron, A. and Shen, Z.W. (1998) Compactly Supported Tight Affine Frames in $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Mathematics of Computation*, **67**, 191-207. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-98-00898-9>
- [3] Gröchenig, K. and Ron, A. (1998) Tight Compactly Supported Wavelet Frames of Arbitrarily High Smooth Ness. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **126**, 1101-1107. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04232-4>
- [4] Han, B. (2003) Compactly Supported Tight Wavelet Frames and Orthonormal Wavelets of Exponential Decay with a General Dilation Matrix. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **155**, 43-67. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(02\)00891-9](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(02)00891-9)
- [5] San Antolín, A. and Zalik, R.A. (2022) Two Families of Compactly Supported Parseval Framelets in $L_2(\mathbb{R}^d)$. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **60**, 512-527. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2022.04.005>
- [6] 周洁. 多小波和小波框架的构造及相关问题研究[D]: [博士学位论文]. 西安: 西北工业大学, 2019.
- [7] Mohammadian, N. and Kamyabi Gol, R.A. (2022) Multiresolution Analysis from a Riesz Family of Shifts of a Refinable Function in $L_2(\mathbb{G})$. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, **46**, 945-953. <https://doi.org/10.1007/s40995-022-01316-3>
- [8] Pitchai Murugan, S. and Youvaraj, G.P. (2021) Frame Multiresolution Analysis of Continuous Piecewise Linear Functions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **19**, 211-232. <https://doi.org/10.1142/S0219691321500326>
- [9] 孙凌宇, 冷平, 彭宣戈. 一种基于 Haar 小波的塔式分解重构算法[J]. 井冈山大学学报: 自然科学版, 2008(1): 32-34.
- [10] 张子扬. 多分辨分析 Parseval 框架小波的研究与应用[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2020.
- [11] 冯晶晶, 陈文利, 董丹凤. 基于小波变换的图像信号分解与重构[J]. 电子设计工程, 2021, 29(16): 177-180.
- [12] Cotronei, M., Rossini, M., Sauer, T., et al. (2019) Filters for Anisotropic Wavelet Decompositions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **349**, 316-330. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.09.015>