

# 随机傅里叶特征与自适应投影次梯度方法相结合的非线性波束形成

宋明宇, 宋爱民

大连交通大学基础部, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年3月21日; 录用日期: 2025年4月12日; 发布日期: 2025年4月23日

## 摘要

针对有限阵元场景下传统线性波束形成存在的分辨率低、抗干扰弱问题, 本文提出融合随机傅里叶特征映射与自适应投影次梯度法的非线性波束形成算法。该算法通过随机傅里叶特征将高斯核的无限维隐式计算转化为固定维显式特征向量, 既降低空间复杂度又避免核字典膨胀; 结合动态步长策略的凸集投影技术, 实现权重向量实时更新, 有效平衡收敛速度与稳态误差抑制。进一步将线性约束转化为投影约束矩阵, 利用正交投影算子引导迭代收敛至可行解空间, 精准控制波束图特性。实验结果表明, 与核递归最小二乘算法、Frost算法及基于再生核希尔伯特空间的自适应投影次梯度法相比, 所提方法在误码率、均方误差和主瓣增益等关键指标上展现出显著性能优势, 并为通信、雷达等领域的非线性波束形成问题提供了具有工程实用价值的解决方案。

## 关键词

随机傅里叶特征, 自适应投影次梯度法, 线性约束, 非线性波束形成

# Nonlinear Beamforming Integrating Random Fourier Features and Adaptive Projected Subgradient Method

Mingyu Song, Aimin Song

Basic Courses Department, Dalian Jiaotong University, Dalian Liaoning

Received: Mar. 21<sup>st</sup>, 2025; accepted: Apr. 12<sup>th</sup>, 2025; published: Apr. 23<sup>rd</sup>, 2025

## Abstract

To address the limitations of conventional linear beamforming in scenarios with limited array ele-

**文章引用:** 宋明宇, 宋爱民. 随机傅里叶特征与自适应投影次梯度方法相结合的非线性波束形成[J]. 图像与信号处理, 2025, 14(2): 271-283. DOI: 10.12677/jisp.2025.142025

ments—such as low spatial resolution and weak anti-interference capability—this paper proposes a nonlinear beamforming algorithm integrating Random Fourier Features (RFF) mapping with the Adaptive Projected Subgradient Method (APSM). The algorithm transforms the infinite-dimensional implicit computation of Gaussian kernels into fixed-dimensional explicit feature vectors through RFF, thereby reducing spatial complexity and mitigating kernel dictionary expansion. By integrating convex set projection techniques with dynamic step-size strategies within the APSM framework, it enables real-time updates of weight vectors while balancing convergence speed and steady-state error suppression. Furthermore, linear equality constraints are converted into projection constraint matrices for RFF, leveraging orthogonal projection operators to guide iterative convergence toward feasible solution spaces and achieve precise beam pattern control. Experimental results demonstrate that the proposed method exhibits significant performance advantages over Kernel Recursive Least Squares (KRLS), the Frost algorithm, and APSM based on Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS) across key metrics, including bit error rate, mean square error, and main lobe gain. This work provides an engineering-practical solution for nonlinear beamforming problems in communication and radar applications.

## Keywords

Random Fourier Features, Adaptive Projection Subgradient Method, Linear Constraints, Nonlinear Beamforming

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

在现代阵列信号处理领域, 智能天线的波束形成技术已成为核心技术手段[1], 其核心目标是提升目标方向上的信号增益并增强干扰抑制能力。在经典线性波束形成框架中, 通过构建零陷约束抑制干扰, 无失真约束保障主瓣信号完整性, 在理想阵列条件下展现出可靠的性能[1]-[3]。然而经典线性波束形成技术存在局限性: 根据线性约束优化理论,  $N$  元均匀线阵的有效空间自由度上限为  $N-1$ , 其中至少需要一个自由度用于主瓣约束(如无失真响应), 当约束数量  $M$  超过有效自由度时, 系统无法满足所有约束条件。此外, 阵列校准误差、阵元失效等非理想因素时会进一步消耗自由度资源, 加剧约束冲突[2] [3]。因此, 当约束数量超过自由度时, 在不影响分辨率的前提下, 传统方案需通过增加阵元扩展自由度, 但受限于硬件成本。

面对传统线性波束形成技术的自由度瓶颈与非理想阵列环境下的性能退化问题, Frost 在 1972 年提出的经典波束形成算法开创了递推约束优化的新范式, 该算法通过构建线性等式约束下的二次优化模型, 在保证主瓣信号无失真响应的同时, 实现了干扰方向零陷抑制, 其核心创新在于: 通过递推更新权值向量, 降低协方差矩阵求逆的计算复杂度; 通过松弛部分约束条件(如旁瓣抑制)为优化目标, 突破线性约束下自由度上限为  $N-1$  的限制; 利用实时数据生成动态零陷, 以抑制时变干扰。然而, 其性能严格依赖阵列校准精度, 阵元位置误差或信号方向偏差会导致主瓣畸变; 权值更新的固定步长需手动调参, 以平衡收敛速度与稳态误差; 且对脉冲噪声及非高斯干扰鲁棒性较差[4]。

尽管 Frost 算法通过松弛约束突破了自由度限制, 但其线性优化框架仍难以应对目标与干扰空间分布的非线性特性。基于再生核希尔伯特空间(Reproducing Kernel Hilbert Space, RKHS)的非线性映射技术为解决这一问题提供了新思路, 通过高斯核函数实现输入信号空间到无限维特征空间的隐式变换, 该技术

在保持阵列物理结构不变的前提下, 实现了信号空间到无限维再生空间的非线性转换[5][6]。核递归最小二乘(Kernel Recursive Least Squares, KRLS)算法作为典型代表, 通过递归更新核矩阵实现非线性自适应滤波, 尽管在信道估计中表现出色, 但在波束形成应用中存在双重缺陷: 首先, KRLS 算法是无约束的波束形成算法, 目标函数仅最小化均方误差, 缺乏显式方向图约束, 在干扰与目标方向接近时存在主瓣失真风险; 其次, 由于 KRLS 算法的核矩阵维度随样本数  $L$  呈平方增长  $\mathcal{O}(L^2)$ , 导致存储与计算成本不可持续, 为缓解这一问题, 稀疏化方案(如近似线性依赖 Approximate Linear Dependence, ALD)被广泛采纳于压缩字典规模[7]。

虽然 KRLS 算法通过核函数映射提升了非线性处理能力, 但其无约束优化特性与核矩阵的存储成本, 严重制约了其在波束形成领域的应用潜力, 为突破基于 RKHS 的约束自适应学习算法的技术瓶颈, 2009 年 Slavakis 团队开创性地将自适应投影次梯度法(Adaptive Projected Subgradient Method, APSM)引入波束形成领域, 该方法通过 RKHS 特征映射构建在线非线性波束形成框架, 并给出收敛性分析[8]。其核心创新在于: 首先, 将波束图规范、导向矢量误差鲁棒性及干扰抑制需求等先验知识, 转化为高维 RKHS 中的闭凸约束集; 其次, 采用鲁棒统计的  $\epsilon$  不敏感损失函数来构建凸优化模型; 最后, 利用不动点集理论将多约束条件统一表征为投影算子的交集。理论研究表明, 该算法能强收敛至满足所有约束的最优解, 并渐近最小化训练数据的累积损失。实验验证显示, 即使在传统线性方法失效的复杂电磁环境下, 该方法仍能保持高分辨率, 并通过约束优化显著提升抗干扰性能, 为阵列信号处理提供了新范式。然而, 该算法存在超参数敏感、稀疏化信息丢失及高维投影计算复杂等固有局限。

尽管 APSM 算法通过凸约束集投影实现了多目标优化, 但核自适应滤波算法在处理大规模数据时, 仍面临计算复杂度和内存消耗随数据规模增长而急剧上升的挑战。针对这一问题, 随机傅里叶特征(Random Fourier Features, RFF)技术提升计算效率提供了新路径[9][10]。RFF 的核心思想是通过蒙特卡洛采样近似核函数的傅里叶变换, 将无限维 RKHS 映射转换为固定维数  $D$  ( $D$  表示预设特征维度, 且  $D \ll L$ ) 的欧氏空间线性运算, 使模型复杂度恒定为  $\mathcal{O}(D)$ , 有效解决了核字典无限增长问题。然而, 传统的 RFF 方法因缺乏显式方向图约束, 导致波束控制能力受限。为此, 本文提出一种融合 RFF 和 APSM 的非线性波束形成算法: 结合 APSM 的凸集投影技术和动态步长策略, 实现了权重向量的实时更新; 并将线性等式约束转化为关于随机傅里叶特征的投影约束矩阵; 通过正交投影算子引导权重向量迭代收敛至可行解空间, 最终实现了对波束图的有效控制, 该算法不仅继承了 RFF 的低复杂度优势, 还通过 APSM 的约束优化机制实现了对波束图的精准控制, 为大规模非线性波束形成问题提供了兼具效率与精度的解决方案。

本文的后续章节的安排如下: 在第二章节中, 简要阐述波束形成的基本问题和数学模型以及 APSM 的基本原理, 为后续章节的算法设计提供理论基础, 第三章节中详细介绍 RFF 的理论基础, 以及如何在 RFF 的基础上引入等式约束, 同时深入剖析了 RFF 与 APSM 的结合机理, 通过算法的伪代码流程图帮助读者理解算法的核心逻辑和创新之处, 第四章节将通过模拟实验结果, 对前文所阐述的理论和方法进行实证检验。本文将详细展示实验结果, 并从多个角度深入分析, 以确凿的数据和图表证明该方法在实际应用中的有效性及其相较于其他方法的优越性。第五章节则对整篇论文进行全面而系统的总结, 回顾研究过程中的主要内容和取得的关键成果, 凸显本文所做出的重要贡献。在此基础上, 对未来的研究方向进行展望, 预测可能的发展趋势, 旨在为相关领域的后续研究提供有价值的参考和深刻的启示。

## 2. 波束形成问题建模与挑战

本节将深入探讨波束形成的基础问题及其数学模型, 着重分析阵列结构配置、波束指向确定以及干扰抑制等核心要素。在此基础上, 进一步引入 APSM 算法, 并详细阐述其在基于 RKHS 的在线非线性多约束优化问题中的应用场景与算法模型。本部分内容旨在为后续的算法设计构建坚实的理论框架。

## 2.1. 波束形成问题建模

首先, 考虑离散时间随机过程  $\{\mathbf{r}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}}$ , 其中  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  表示时间索引。令  $i = \sqrt{-1}$  表示虚部单位。尽管所提出的方法可以扩展到任意天线阵列几何结构, 但为简化分析, 本文采用常见的均匀线性天线 (Uniform Linear Array, ULA) 模型。ULA 由  $N \in \mathbb{Z}_{>0}$  个阵元构成, 阵元间距  $d > 0$ , 对于以波达方向 (Direction Of Arrival, DOA)  $\theta \in [0, \pi]$  入射的平面波, 其导向矢量定义为[1]

$$\mathbf{s} := \mathbf{s}(\theta, d, \lambda) := \left[ 1, e^{2\pi i \frac{d}{\lambda} \cos \theta}, \dots, e^{2\pi i (N-1) \frac{d}{\lambda} \cos \theta} \right]^T \in \mathbb{C}^N$$

其中  $\lambda > 0$  为载波波长,  $(\cdot)^T$  表示向量转置。特别地, 感兴趣信号 (Signal of Interest, SOI) 对应的导向矢量记为  $\mathbf{s}_0$ , 第  $j$  个干扰源对应的导向矢量记为  $\mathbf{s}_j (j \in \overline{1, J})$ 。ULA 接收信号可表示为:

$$\mathbf{r}(k) := [\mathbf{r}_1(k), \dots, \mathbf{r}_N(k)]^T := \sum_{j=0}^J a_j b_j(k) \mathbf{s}_j + \mathbf{n}(k) \in \mathbb{C}^N \quad (1)$$

符号序列  $\{b_j(k)\}$  采用 BPSK 调制, 即  $b_j(k) \in \{+1, -1\}$ , 复系数  $a_j \in \mathbb{C}, j \in \overline{0, J}$ , 包含了信号功率、信道衰减等各种参数。在这些参数已知时, 可以将其整合到导向矢量中, 即通过  $\mathbf{s}_j = a_j \mathbf{s}_j$  的形式, 将天线几何结构、载波波长、信号强度及信道衰减等参数统一纳入导向矢量建模。除此之外, 复随机过程向量  $\{\mathbf{n}(k)\} \subseteq \mathbb{C}^N$  表征加性噪声。

从式(1)可以看出, 阵列接收数据通常为复数形式。为便于后续处理, 本文采用实向量处理框架。具体而言, 在波束形成操作前进行预处理, 将复向量  $\mathbf{r}(k) \in \mathbb{C}^N$  转换为实向量

$$\mathbf{r}_1(k) := \begin{bmatrix} \Re(\mathbf{r}(k)) \\ \Im(\mathbf{r}(k)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \mathbf{r}_2(k) := \begin{bmatrix} \Im(\mathbf{r}(k)) \\ -\Re(\mathbf{r}(k)) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (2)$$

其中  $\Re(\cdot)$  和  $\Im(\cdot)$  分别表示复向量的实部和虚部。这种预处理技术在信号处理领域广泛应用, 通过将复数域问题映射到实数域, 可有效利用实数域的算法和理论体系。

在智能天线波束形成中, 由于实际环境中存在加性噪声、信道失真及多径干扰等因素, 精确获取 SOI 的 DOA 极具挑战性。为了增强波束形成器的鲁棒性, 本文采用误差导向矢量作为先验信息, 这在鲁棒 Capon 波束形成中尤为常见[2]。其核心思想是将真实导向矢量  $\mathbf{s}_0$  视为位于以估计导向矢量  $\tilde{\mathbf{s}}_0$  为中心, 半径为  $\zeta$  的闭球邻域内:  $U_{\tilde{\mathbf{s}}_0} \triangleq B[\tilde{\mathbf{s}}_0, \zeta] \subset \mathbb{C}^N$ , 其中  $B[\cdot, \cdot]$  表示闭球, 该方式赋予波束形成器一定的容错能力: 当 SOI 导向矢量存在误差时, 仍能保持有效工作。进一步考虑 SOI 的 BPSK 调制特性 (符号取值为  $\pm 1$ ), 由于无法精确获取  $\mathbf{s}_0$  的真实位置且  $\mathbf{s}_0 \in \mathcal{U}_{\tilde{\mathbf{s}}_0}$ , 本文通过约束波束形成器  $f$ , 使其对信号族  $\{\pm \mathbf{s}_0 : \mathbf{s}_0 \in \mathcal{U}_{\tilde{\mathbf{s}}_0}\}$  的输出尽可能逼近目标值  $[\pm 1, 0]^T$ , 这种设计策略确保了波束形成器在存在导向矢量误差时, 仍能维持较高的信号接收质量。

为简化问题处理, 本文将复数域  $\mathbb{C}^N$  中的误差导向矢量  $U_{\tilde{\mathbf{s}}_0}$  映射到实数域  $\mathbb{R}^{2N}$  中参考公式(2):

$$\tilde{\mathbf{s}}_{01} := \begin{bmatrix} \Re(\tilde{\mathbf{s}}_0) \\ \Im(\tilde{\mathbf{s}}_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}, \quad \tilde{\mathbf{s}}_{02} := \begin{bmatrix} \Im(\tilde{\mathbf{s}}_0) \\ -\Re(\tilde{\mathbf{s}}_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2N} \quad (3)$$

该预处理方法不仅降低了数学模型的复杂度, 还为后续基于凸优化的约束设计提供了便利。

## 2.2. 现有非线性波束形成算法的局限性

问题 1: (基于 RKHS 的在线非线性多约束优化问题) 在在线学习框架下, 面对时序数据序列

$\{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , 需在(RKHS)  $\mathcal{H}$ 中逐次构造函数序列  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , 使得每个  $f_n$  满足:

$$\begin{aligned} \min_{f_n} L_{\epsilon, n}(f_n) &= \max(0, f_n(x_n) - y_n - \hat{\epsilon}_n) \\ \text{s.t. } \langle f_n, \mathbf{h} \rangle &\leq \gamma_m, \text{ 其中 } \mathbf{h} \in B[\mathbf{h}_m, \delta_m], \quad \forall m = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $B[\mathbf{h}_m, \delta_m]$  表示以  $\mathbf{h}_m$  为中心、半径为  $\delta_m$  的闭球约束,  $\gamma_m = \pm 1 + \epsilon$ , 具体参考[8]。在提出了损失函数(3)和约束集(4)后, 采用 APSM 作为优化算法解决此问题, 以下是 APSM 的算法流程, 首先定义索引集确定并行处理  $q$  的范围:

$$\mathcal{J}_n = \begin{cases} \overline{0, n}, & \text{if } n < q-1 \\ \overline{n-q+1, n}, & \text{if } n \geq q-1 \end{cases} \quad (5)$$

当前估计状态  $u_n = (f_n, \tau_n) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{8+M}$  的更新映射为:

$$T_n(u) = u + \mu_n \left( \sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} P_{S(j)}(u) - u \right) \quad (6)$$

其中:

- 权重  $w_j^{(n)} \in [0, 1]$  满足  $\sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} = 1$
- 自适应步长  $\mu_n \in [0, 2M_n]$ , 其中  $M_n$  定义为:

$$M_n = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} \|P_{S(j)}(u_n) - u_n\|^2}{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} \|P_{S(j)}(u_n) - u_n\|^2}, & \text{if } u_n \notin \bigcap_{j \in \mathcal{J}_n} S(j) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

超夹层约束集  $S(j)$  定义为:

$$S(j) \triangleq \left\{ (f, \tau) \in \mathcal{H} \times \mathbb{R}^{8+M} : \left| \left\langle (f, \tau), (\kappa(\mathbf{r}_j, \cdot), 0) \right\rangle_{\mathcal{H} \times \mathbb{R}^{8+M}} - b_j \right| \leq \hat{\epsilon} \right\} \quad (8)$$

超夹层是损失函数的全局极小点集合, 通过这种方式, 将训练数据的信息融入到波束形成器的设计中, 使得波束形成器能够根据数据进行自适应调整, 由于函数  $\|\cdot\|^2$  的凸性, 可以证明  $M_n \geq 1$ , 因此步长  $\mu_n \leq 2M_n$ , 且当  $\mu_n$  较大时, 算法的收敛速度加快, 在特殊情况下, 当索引集  $\mathcal{J}_n = \{n\}$  时即只有单一索引, 此时算法退化成单投影, 步长设定为固定步长  $\mu_n := 1$ , 更新映射简化为单度量映射  $T_n(u) = P_{S(n)}(u)$ 。

公式(6)可等价表示为:

$$(f_{n+1}, \tau_{n+1}) = T \left( (f_n, \tau_n) + \mu_n \sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} \beta_j^{(n)} (\kappa(\mathbf{r}_j, \cdot), 0) \right) \quad (9)$$

其中投影系数:

$$\beta_j^{(n)} = \begin{cases} \frac{L_{\epsilon, n}(f, \kappa(\mathbf{r}_n, \cdot) - b_n)}{\kappa(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n)}, & \text{if } \langle f, \kappa(\mathbf{r}_n, \cdot) \rangle - b_n < -\hat{\epsilon} \\ 0, & \text{if } |\langle f, \kappa(\mathbf{r}_n, \cdot) \rangle - b_n| \leq \hat{\epsilon} \\ -\frac{L_{\epsilon, n}(f, \kappa(\mathbf{r}_n, \cdot) - b_n)}{\kappa(\mathbf{r}_n, \mathbf{r}_n)}, & \text{if } \langle f, \kappa(\mathbf{r}_n, \cdot) \rangle - b_n > \hat{\epsilon} \end{cases} \quad (10)$$

对应的  $M_n$  表达式为:

$$M_n = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} (\beta_j^{(n)})^2 \kappa(\mathbf{r}(j), \mathbf{r}(j))}{\sum_{j, j' \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} w_{j'}^{(n)} \beta_j^{(n)} \beta_{j'}^{(n)} \kappa(\mathbf{r}(j), \mathbf{r}(j'))}, & \text{if } (f_n, \tau_n) \notin \bigcap_{j \in \mathcal{J}_n} S(j) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

显然, APSM 算法具有处理复杂约束能力强、强收敛性及自适应步长策略等优势,但是它也存在一定的局限性,它的性能依赖  $q$ ,  $\gamma$ ,  $\delta_m$  等参数,在不同的信号环境和应用场景中,需要花费大量时间去进行参数调优,其次,即使通过引入稀疏化技术来减少内存需求和计算复杂度,但现有的稀疏化策略可能会误删历史关键信息,且保留系数的选择非最优,在大规模数据场景中,核函数计算与存储成本较高。为了克服上述不足,第三章将引入 RFF 技术,在保持核方法优势的同时,显著降低计算复杂度,提升实时处理能力。

### 3. 基于 RFF 与 APSM 的波束形成算法

在本节中,首先系统阐述了随机傅里叶特征(Random Fourier Features, RFF)的理论基础。针对实际工程应用中的特定约束条件,创新性地在 RFF 框架中引入等式约束机制,该设计有效保证了信号处理的准确性与可靠性。通过理论分析发现,APSM 算法与 RFF 技术存在天然互补性:APSM 的自适应步长策略可显著加速在线学习收敛,而 RFF 的低维特征映射特性能够避免传统稀疏化技术的复杂过程。

#### 3.1. RFF 理论基础

在机器学习领域,随着数据规模和复杂度的指数级增长,传统核方法在计算和存储上的瓶颈日益凸显。RFF 作为一种突破性技术,其理论体系融合了傅里叶分析、RKHS 理论及蒙特卡罗方法等多学科成果。

1) 傅里叶变换理论:为核函数的频域分析提供了数学工具,揭示了核函数与平稳随机过程协方差函数的内在联系;

2) RKHS 理论:通过再生性实现高维特征空间的低维模拟,为核方法的高效计算奠定基础;

3) 蒙特卡罗方法:解决了核函数频域积分的计算难题,在计算效率与近似精度间取得平衡。

RFF 的数学基础源于多维高斯分布的特征函数分析。考虑随机变量  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\Sigma}) \subset \mathbb{R}^D$ ,  $\boldsymbol{\rho}$  表示均值向量,  $\boldsymbol{\Sigma}$  表示协方差矩阵,它描述了各维度变量之间的二阶统计相关性且  $\boldsymbol{\Sigma} \in S_+^d$ ,  $S_+^d$  表示对称正定矩阵集合其特征函数定义为:

$$\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{E} \left[ e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{X}} \right] = \int_{\mathbb{R}^D} e^{i\boldsymbol{\omega}^T \mathbf{x}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (12)$$

根据 Bochner 定理,任何正定函数均可表示为某特征函数的形式。对于零均值高斯随机变量  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_D)$ ,其特征函数简化为:  $\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\omega}) = \exp \left( -\frac{\sigma^2}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\omega} \right)$ 。

为实现对高斯核的高效近似,引入  $R$  个独立同分布的随机变量  $\{\mathbf{W}_r\}_{r=1}^R \sim \mathcal{N}_D \left( 0, \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_D \right)$ ,通过蒙特卡罗采样实现:

$$\exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \right) \approx \mathbf{h}(\mathbf{X})^T \mathbf{h}(\mathbf{Y})^*$$

其中  $(\cdot)^*$  表示共轭转置,  $\mathbf{h}(\mathbf{X}) = \frac{1}{\sqrt{R}} \left[ e^{i\mathbf{W}_1^T \mathbf{X}}, \dots, e^{i\mathbf{W}_R^T \mathbf{X}} \right]^T$ 。进一步采用余弦函数近似,定义特征映射

$\mathbf{z}_{\Omega}(\mathbf{X}) = \sqrt{2} \cos(\mathbf{W}^T \mathbf{X} + b)$  其中  $b \sim \mathcal{U}[0, 2\pi]$ 。此时,高斯核的期望内积可近似为:

$$\mathbb{E}_{W,b} \left[ \mathbf{z}_{\Omega}(\mathbf{X})^T \mathbf{z}_{\Omega}(\mathbf{Y}) \right] \approx \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|_2^2 \right)$$

该近似将高斯核的  $\mathcal{O}(L^2)$  运算复杂度降为  $\mathcal{O}(DR)$ , 通过增加  $R$  可提升近似精度, 但需在计算效率与模型容量间权衡。

### 3.2. 等式约束下的 RFF 算法设计

在信号处理领域, RFF 映射作为一种高效的特征提取技术正获得日益广泛的应用。为满足波束形成场景下的约束条件, 本文提出一种融合文献[11]中提出的等式线性约束下的 RFF 算法。该方法通过约束矩阵构造、最小二乘优化、投影矩阵设计及权重更新策略的协同作用, 在保持 RFF 计算优势的同时, 实现对信号处理流程的精确控制。

- 正向约束向量: 通过 RFF 映射  $\mathbf{z}_{\Omega}(\cdot)$  将公式(3)中误差导向矢量的实部且携带正向 BPSK 调制信号的  $+\tilde{s}_{01}$  转换为特征向量  $\mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01})$ , 构成正向约束向量, 即  $\mathbf{C}_+ = \mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01}) \in \mathbb{R}^{D \times L}$ 。
- 反向约束向量: 通过 RFF 映射  $\mathbf{z}_{\Omega}(\cdot)$  将公式(3)中误差导向矢量的实部且携带反向 BPSK 调制信号的  $-\tilde{s}_{01}$  转换为特征向量  $\mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01})$ , 构成反向约束向量, 即  $\mathbf{C}_- = \mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01}) \in \mathbb{R}^{D \times L}$ 。
- 组合约束矩阵: 将这两个信号集组合起来得到约束矩阵  $\mathbf{C} = [\mathbf{C}_+, \mathbf{C}_-]$ 。
- 标签向量  $\mathbf{y} = [\mathbf{1}_L^T \quad -\mathbf{1}_L^T]^T$ , 其中  $\mathbf{1}_L \in \mathbb{R}^L$  为全 1 向量

约束矩阵  $\mathbf{C}$  的列向量  $\mathbf{z}_{\Omega}(\pm\tilde{s}_{01})$  在特征空间中构成正交基组, 确保:

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_+^T \mathbf{C}_+ & \mathbf{C}_+^T \mathbf{C}_- \\ \mathbf{C}_-^T \mathbf{C}_+ & \mathbf{C}_-^T \mathbf{C}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01})^T \mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01}) & \mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01})^T \mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01}) \\ \mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01})^T \mathbf{z}_{\Omega}(+\tilde{s}_{01}) & \mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01})^T \mathbf{z}_{\Omega}(-\tilde{s}_{01}) \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} L\mathbf{I}_D & 0 \\ 0 & L\mathbf{I}_D \end{bmatrix} \quad (13)$$

这种正交性使得约束矩阵  $\mathbf{C}$  自然满足列满秩的条件, 确保最小二乘解  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2L}$  的存在性和唯一性且可通过精确矩阵求逆获得:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{y} \quad (14)$$

该解在满足等式约束  $\mathbf{C}^T \mathbf{W}_{ep} = \mathbf{y}$  的前提下, 提供了权重向量  $\mathbf{W}_{ep} \in \mathbb{R}^D$  的最优估计, 为确保权重更新过程始终满足约束条件, 构造投影矩阵  $\mathbf{G}_p \in \mathbb{R}^{D \times D}$ :

$$\mathbf{G}_p = \mathbf{I}_D - \mathbf{C}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T$$

其中  $\mathbf{I}_D$  是  $D$  维单位矩阵。该投影矩阵将更新方向制约在约束矩阵  $\mathbf{C}$  的正交补空间, 避免违反等式约束, 设第  $k$  次迭代的权重增量为  $\Delta \mathbf{W}_{ep}^{(k)}$ , 参考公式(9) (10), 则基于投影矩阵的迭代更新公式为:

$$\mathbf{W}_{ep}^{(k+1)} = \mathbf{G}_p \left( \mathbf{W}_{ep}^{(k)} + \Delta \mathbf{W}_{ep}^{(k)} \right) + \mathbf{Q} \quad (15)$$

其中  $\Delta \mathbf{W}_{ep}^{(k)} = \mu_k \sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(k)} \beta_j^{(k)} \left( \mathbf{z}_{\Omega}(\mathbf{r}_j)^T \mathbf{z}_{\Omega}(\cdot) \right)$

其每个元素对应特征维度上的调整量, 类似于梯度下降中的梯度向量, 所以迭代公式等价表示为:

$$\mathbf{W}_{ep}^{(k+1)} = \mathbf{G}_p \left( \mathbf{W}_{ep}^{(k)} + \mu_k \sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(k)} \beta_j^{(k)} \left( \mathbf{z}_{\Omega}(\mathbf{r}_j)^T \mathbf{z}_{\Omega}(\cdot) \right) \right) + \mathbf{Q} \quad (16)$$

$\mathbf{Q}$  为初始最小二乘解确保每次迭代都在可行域内。在阵列信号处理中, 这种设计能够通过约束保证主瓣增益的提升, 并且 RFF 的线性复杂度使得在线并行处理成为可能。

### 3.3. RFF 与 APSM 相结合的波束形成算法

以下是本节算法的伪代码流程图, 帮助读者理解算法的核心逻辑和创新之处:

RFF 与 APSM 相结合的波束形成算法(RFFEQC)

初始化:  $\{\mathbf{W}_r\}_{r=1}^R \sim \mathcal{N}_D\left(0, \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{I}_D\right)$ ,  $b_r \sim B[0, 2\pi]$ ,  $\forall r=1, 2, \dots, R$

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}_+, \mathbf{C}_-] = [\mathbf{z}_\Omega(+\tilde{\mathbf{s}}_{01}), \mathbf{z}_\Omega(-\tilde{\mathbf{s}}_{01})]$$

$$\mathbf{G}_p = \mathbf{I}_D - \mathbf{C}(\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top$$

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{C}^\top \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^\top \mathbf{y}$$

输入: 训练数据序列  $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , 参数  $D, q, \hat{\epsilon}, \sigma, \mu$

$\mu_n^{RFF}$  表示自适应步长

for  $n = 1, 2, \dots, N$

$$\tilde{\mathbf{x}}_n \leftarrow [\Re(x_n), \Im(x_n)]$$

$$\mathcal{J}_n = \begin{cases} \overline{0, n}, & \text{if } n < q-1 \\ n-q+1, n, & \text{if } n \geq q-1 \end{cases}$$

$$\mathbf{X}_n \leftarrow \{\tilde{\mathbf{x}}_j\}_{j \in \mathcal{J}_n}$$

$$\mathbf{Y}_n \leftarrow \{y_j\}_{j \in \mathcal{J}_n}$$

$$\mathbf{z}_\Omega(\mathbf{X}_n) = \sqrt{\frac{2}{R}} [\cos(\omega_1^\top \mathbf{X}_n + b_1), \dots, \cos(\omega_R^\top \mathbf{X}_n + b_R)]^\top$$

$$\varepsilon_j = \mathbf{W}_n^\top \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j) - y_j, \forall j \in \mathcal{J}_n$$

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{-\hat{\epsilon} + y_j - \mathbf{W}_n^\top \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)}{\|\mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)\|^2}, & \text{if } \varepsilon_j < -\hat{\epsilon} \\ \frac{\hat{\epsilon} + y_j - \mathbf{W}_n^\top \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)}{\|\mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)\|^2}, & \text{if } \varepsilon_j > \hat{\epsilon} \\ 0, & \text{if } |\varepsilon_j| \leq \hat{\epsilon} \end{cases}$$

$$M_n = \begin{cases} \frac{\sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j \beta_j^2 \|\mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)\|^2}{\sum_{j, j' \in \mathcal{J}_n} w_j w_{j'} \beta_j \beta_{j'} \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j) \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_{j'})}, & \text{if } (f_n, \tau_n) \notin \bigcap_{j \in \mathcal{J}_n} S(j) \\ 1, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_n^{RFF} = \min(\mu M_n, 1)$$

$$\mathbf{W}_{n+1} = \mathbf{G}_p \left( \mathbf{W}_n + \mu_n^{RFF} \sum_{j \in \mathcal{J}_n} w_j^{(n)} \beta_j^{(n)} \left( \mathbf{z}_\Omega(\tilde{\mathbf{x}}_j)^\top \mathbf{z}_\Omega(\cdot) \right) \right) + \mathbf{Q}$$

end

输出:  $f_n(\cdot) = \mathbf{W}_{n+1}^\top \mathbf{z}_\Omega(\cdot)$

## 4. 实验结果与分析

### 4.1. 实验一

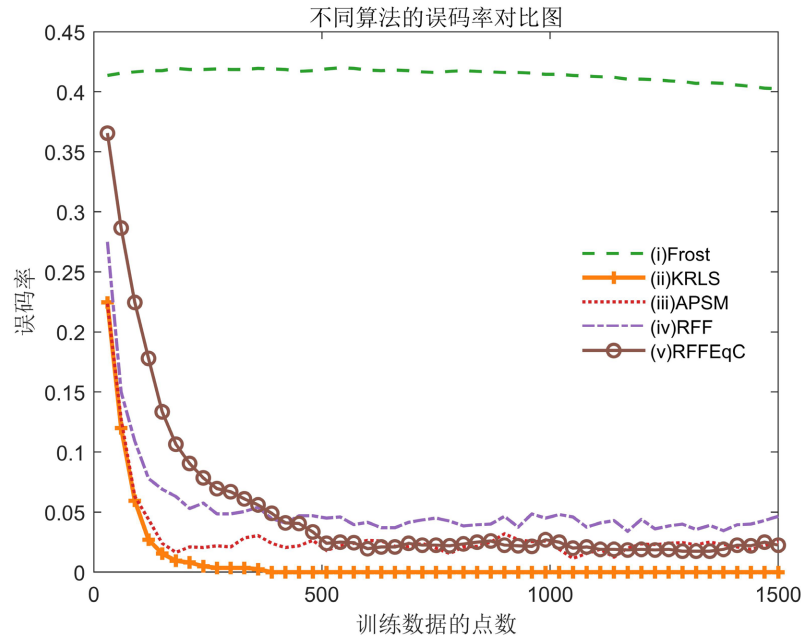
本次实验采用均匀线性阵列(ULA)开展性能验证, 具体参数设置如下: 阵列数量  $N=3$ ; 阵列元素间距与波长的比值  $\frac{d}{\lambda}=0.5$ ; SOI 方向为  $\theta_0=90^\circ$ , 但实际使用的误差导向矢量的信号方向为  $\tilde{\theta}_0=93^\circ$ , 感兴趣信号信噪比(Signal-to-Noise Ratio, SNR)为 10 (单位: dB); 存在五个干扰信号( $j=5$ ), 其角度分别为  $\theta_j=\{30^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 130^\circ, 160^\circ\}$ , 对应的干扰信号 SNR 分别为  $\{10, 30, 20, 10, 30\}$  (单位: dB); 实验中使用了 1500 个数据作为训练数据, 200 个数据作为测试数据。为确保实验结果的可靠性, 每种算法独立运行 10 次, 取平均结果以消除随机噪声影响, 硬件配置为 Intel Core i5-121490F CPU、32 GB 内存, 仿真平台 MATLAB R2018a (表 1)。

**Table 1.** Parameter setting of each algorithm

**表 1.** 各个算法的参数设置

| 算法     | 参数                                                                                               |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|
| KRLS   | $\sigma^2 = 0.5$ $\varrho = 0.25$ $q = 100$                                                      |
| Frost  | $\xi = 2 \times 10^{-6}$                                                                         |
| APSM   | $\sigma^2 = 0.5$ $\varrho = 0.25$ $\hat{\epsilon} = 0.01$ $\delta = 0.01$ $\mu = 1.95$ $q = 100$ |
| RFF    | $\sigma^2 = 1$ $D = 200$ $\hat{\epsilon} = 0.01$ $\mu = 1.95$ $q = 100$                          |
| RFFEqC | $\sigma^2 = 1$ $D = 200$ $\hat{\epsilon} = 0.01$ $\mu = 1.95$ $q = 100$                          |

根据上述参数的设置, 本文算法与各个算法进行比较, 下图展示各个算法的误码率、均方距离和波束图。



**Figure 1.** A comparison of the symbol error rates between the algorithm proposed in this paper and other algorithms

**图 1.** 本文算法和其他算法的误码率对比

从图 1 中可见, RFFEqC 算法的误码率随训练数据点数增加迅速下降, 在初始阶段(训练数据点数  $L > 500$ ), 误码率降幅明显优于 Frost、APSM 等算法, 体现其对训练数据的高效学习能力, 能快速优化信号处理模型, 当训练数据点数持续增加, RFFEqC 的误码率稳定在除 KRLS 以外的最低水平, 相比传统算法, 它能更有效地处理信号, 减少数据传输和处理过程中的错误, 极大地提高了信号处理的准确性和可靠性。

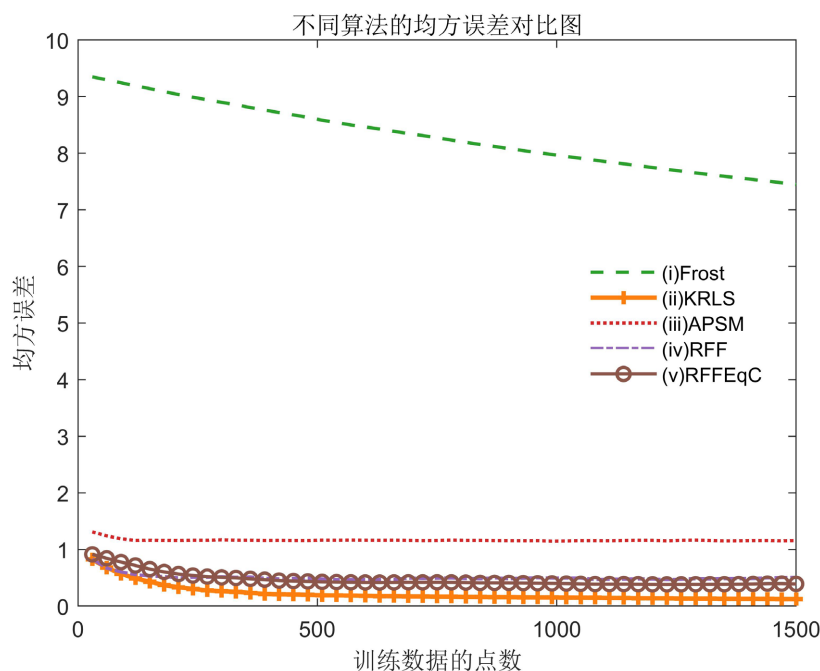


Figure 2. A comparison of the mean square errors between the algorithm proposed in this paper and other algorithms

图 2. 本文算法和其他算法的均方误差对比

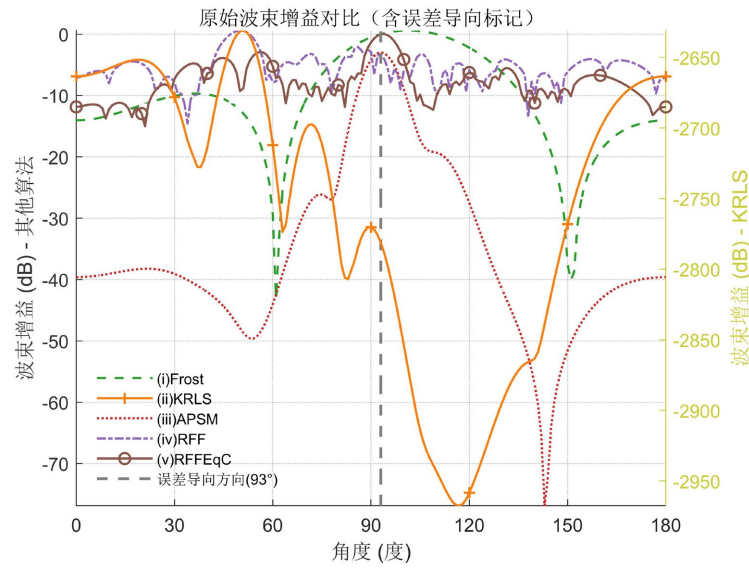
图 2 说明 RFFEqC 随着训练点数的增加, 其均方误差曲线表现出良好的稳定性和收敛特性。与其他算法相比, 它能更快地收敛到一个较低的均方误差水平, 说明该算法在训练过程中能够更准确地拟合数据, 模型的泛化能力更强, 对于不同数量的训练数据都能保持较好的性能。

图 3 中, KRLS 算法的波束增益数值与 Frost、APSM、RFF、RFFEqC 等算法存在显著量级差异。若采用单轴展示, 会严重压缩曲线细节, 导致算法性能特征难以清晰呈现。双 y 轴设计则化解这一难题: 左侧纵轴适配 Frost、APSM、RFF、RFFEqC 的增益范围, 右侧纵轴单独呈现 KRLS 的低增益特性, 既完整保留各算法波束增益特征, 又解决了数值跨度大导致的信息损耗。以 RFFEqC 为例, 其在期望信号方向附近展现出卓越的信号处理优势: 精准锁定目标方向信号, 显著增强主瓣波束增益, 相较传统算法, 能更高效地提升期望方向信号强度, 说明其在复杂电磁环境中展现出更出色的波束形成能力, 切实提升目标信号捕捉的精准度与可靠性。

表 2 中 RFFEqC 不仅实现了最大增益角度与目标方向的高度契合, 又以仅 6.7388 秒的运行时间显著优于传统算法, 体现了高效性与精准性的完美平衡。

## 4.2. 实验二

为确保实验结果的普适性, 在本次采用均匀线性阵列的实验中, 各项数据均随机选取。具体而言, 阵元数量  $N = 3$ ; SOI 的真实方向是  $\theta_0 = 72^\circ$ , 但因导向矢量存在误差, 实际使用的误差方向为  $\tilde{\theta}_0 = 75^\circ$ ,



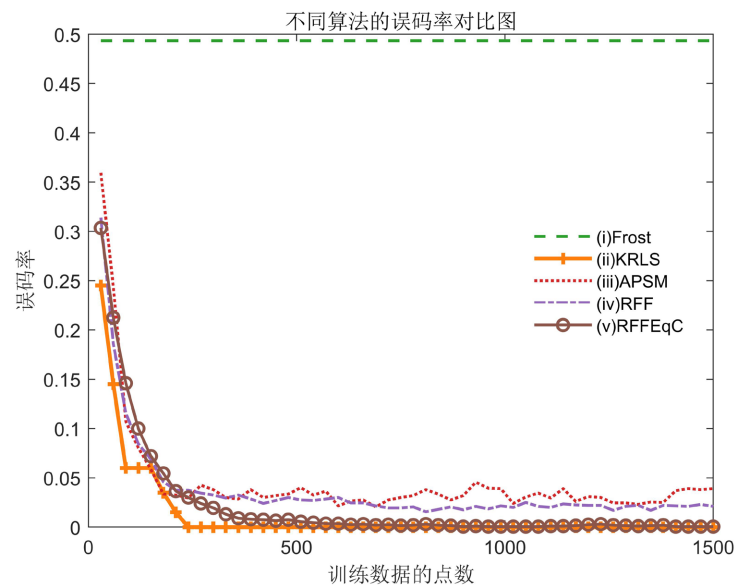
**Figure 3.** A comparison of the beampatterns between the algorithm proposed in this paper and other algorithms

**图 3.** 本文算法和其他算法的波束图对比

**Table 2.** Algorithm performance comparison

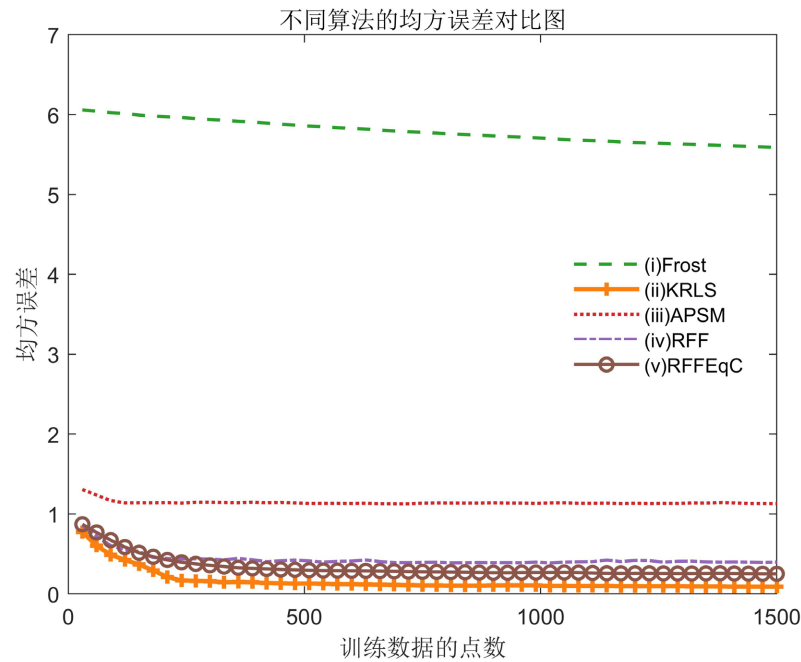
**表 2.** 各个算法的算法性能对比

| 算法     | 最大波束增益角度(°) | 运行时间(s)  |
|--------|-------------|----------|
| Frost  | 101         | 0.0514   |
| KRLS   | 51          | 942.8688 |
| APSM   | 93          | 637.2487 |
| RFF    | 50          | 6.8080   |
| RFFEQC | 93          | 6.7388   |



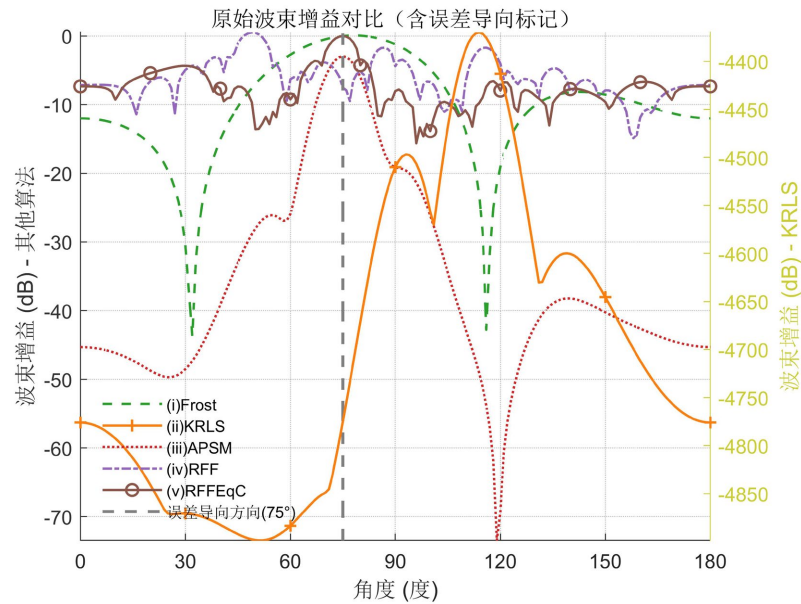
**Figure 4.** A comparison of the symbol error rates between the algorithm proposed in this paper and other algorithms under random data

**图 4.** 本文算法和其他算法在随机数据下的误码率对比



**Figure 5.** A comparison of the mean square errors between the algorithm proposed in this paper and other algorithms under random data

**图 5.** 本文算法和其他算法在随机数据下的均方误差对比



**Figure 6.** A comparison of the beam patterns between the algorithm proposed in this paper and other algorithms under random data

**图 6.** 本文算法和其他算法在随机数据下的波束图对比

5 个干扰信号源的角度分布为  $42^\circ$ ,  $115^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $65^\circ$ ,  $168^\circ$ , 对应的干扰信号 SNR 分别为  $\{25, 35, 18, 28, 15\}$  (单位: dB)。

在随机数据下, 对多种算法展开评估分析后, RFFEqC 算法依然保持卓越性能。从图 4 的误码率测试结果来看, RFFEqC 算法依然能够维持极低的错误率; 而图 5 所示的均方误差曲线表明, 该算法在迭

代过程中展现出优异的收敛特性,能够以极快的速度稳定在较低水平。从波束图 6 中可以清晰地观察到,即便对误差导向矢量的方向进行了更改,该算法依然能够确保主瓣精准定位,不受干扰,展现出极高的稳定性和准确性。

## 5. 总结

通过实验证明 RFFE<sub>q</sub>C 结合算法凭借对 RFF 与 APSM 核心优势的有机整合,在信号处理的关键性能指标上实现了对 Frost、KRLS 以及基于核函数的自适应波束形成等传统算法的显著超越。在波束性能方面,它能更精准地调控波束方向,高效增强期望信号并有力抑制干扰,极大提升了信号捕捉的准确性与可靠性;从均方误差指标来看,其快速且稳定的收敛特性,表明该算法能够在不同规模的训练数据下,始终保持出色的数据拟合能力和泛化性能;而在误码率表现上,RFFE<sub>q</sub>C 以更快的下降速度和更低的稳定值,表明其在数据处理过程中强大的抗干扰能力和极高的信号处理精度。随着信号处理应用场景的日益复杂和多样化,非线性约束条件在实际问题中广泛存在。当前 RFFE<sub>q</sub>C 算法已展现出强大的性能优势,若能进一步与非线性约束相结合,有望在处理复杂信号环境下的非线性问题时,突破传统算法的局限,实现更优的信号分离、特征提取与目标识别等功能。这不仅能为通信、雷达、人工智能等多个领域带来更高效、精准的信号处理解决方案,还将推动信号处理技术向更高水平发展,具有广阔的研究前景和巨大的应用价值。

## 参考文献

- [1] Van Trees, H.L. (2002) Optimum Array Processing: Part IV of Detection, Estimation, and Modulation Theory. John Wiley & Sons. <https://doi.org/10.1002/0471221104>
- [2] Li, J. and Stoica, P. (2005) Robust Adaptive Beamforming. John Wiley & Sons.
- [3] Slavakis, K. and Yamada, I. (2007) Robust Wideband Beamforming by the Hybrid Steepest Descent Method. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **55**, 4511-4522. <https://doi.org/10.1109/tsp.2007.896252>
- [4] Frost, O.L. (1972) An Algorithm for Linearly Constrained Adaptive Array Processing. *Proceedings of the IEEE*, **60**, 926-935. <https://doi.org/10.1109/proc.1972.8817>
- [5] Martinez-Ramon, M., Rojo-Alvarez, J.L., Camps-Valls, G. and Christodoulou, C.G. (2007) Kernel Antenna Array Processing. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, **55**, 642-650. <https://doi.org/10.1109/tap.2007.891550>
- [6] Koutroumbas, K. and Theodoridis, S. (2008) Pattern Recognition. Academic Press.
- [7] Engel, Y., Mannor, S. and Meir, R. (2004) The Kernel Recursive Least-Squares Algorithm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **52**, 2275-2285. <https://doi.org/10.1109/tsp.2004.830985>
- [8] Slavakis, K., Theodoridis, S. and Yamada, I. (2009) Adaptive Constrained Learning in Reproducing Kernel Hilbert Spaces: The Robust Beamforming Case. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57**, 4744-4764. <https://doi.org/10.1109/tsp.2009.2027771>
- [9] Rahimi, A. and Recht, B. (2007) Random Features for Large-Scale Kernel Machines. *Advances in Neural Information Processing Systems*, **20**, 1177-1184.
- [10] Bouboulis, P., Pougkakiotis, S. and Theodoridis, S. (2016) Efficient KLMS and KRLS Algorithms: A Random Fourier Feature Perspective. 2016 *IEEE Statistical Signal Processing Workshop (SSP)*, Palma de Mallorca, 26-29 June 2016, 1-5. <https://doi.org/10.1109/ssp.2016.7551811>
- [11] Arablouei, R., Doğançay, K. and Werner, S. (2015) On the Mean-Square Performance of the Constrained LMS Algorithm. *Signal Processing*, **117**, 192-197. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2015.05.011>