

结合高阶非凸全变差与重叠组稀疏性去除脉冲噪声

马宁宁, 贾小宁

长春理工大学数学与统计学院, 吉林 长春

收稿日期: 2026年9月22日; 录用日期: 2026年10月13日; 发布日期: 2026年10月27日

摘 要

为了消除脉冲噪声, 一种有效的方法是采用L1范数全变差模型。然而, 图像恢复总是会产生阶梯状伪影, 此外, L1范数容易对解进行过度惩罚, 且对脉冲噪声中的异常特征缺乏鲁棒性。因此, 本文提出了一种混合正则化方法, 旨在有效去除脉冲噪声并消除阶梯效应的同时, 又能保留更多边缘细节。本文方法使用L0范数数据保真项有效去除脉冲噪声, 重叠组稀疏全变差正则化项消除阶梯效应, 而非凸高阶全变差正则化项用于保持恢复图像的清晰度。为了求解这个模型, 我们分别采用了具有平衡约束的数学规划方法、逐次逼近最小化方法以及迭代重加权L1算法, 并配合交替方向乘子法进行求解。实验结果表明, 相较于几种现有方法, 在峰值信噪比和结构相似性两项指标上均取得了具有竞争力的性能结果。

关键词

图像复原, 脉冲噪声, L0范数, 重叠组稀疏, 交替方向乘子法

Removal of Impulse Noise by Combining Higher Order Non-Convex Total Variation and Overlapping Group Sparsity

Ningning Ma, Xiaoning Jia

School of Mathematics and Statistics, Changchun University of Science and Technology, Changchun Jilin

Received: September 22, 2026; accepted: October 13, 2026; published: October 27, 2026

Abstract

For eliminating impulse noise, an effective way is to use the L1-norm total variation model. However,

the image restoration always yields staircase artifacts. Additionally, the L1-norm tends to over penalize solutions and is not robust to outlier characteristics of impulse noise. Therefore, this paper proposes a hybrid regularization scheme aimed at effectively removing impulse noise and eliminating staircase artifacts while preserving more edge details. The method uses the L0-norm data fidelity to effectively remove impulse noise, the overlapping group sparse total variation regularization to eliminate the staircase artifacts, and the non-convex higher order total variation regularization is used to maintain the sharp restored image. To achieve the goal, we use mathematical program with equilibrium constraints method, the majorization-minimization method, and the iterative re-weighted L1 algorithm, combined with the alternating direction method of multipliers for solving. Experimental results show that, compared with several existing methods, competitive performance results are achieved in terms of both peak signal-to-noise ratio and structural similarity index measure.

Keywords

Image Restoration, Impulse Noise, L0-Norm, Overlapping Group Sparsity, Alternating Direction Method of Multipliers

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数字图像中常见的一种噪声类型是脉冲噪声。它是在成像过程中由于开关故障、传输错误、电磁干扰以及有噪声的成像传感器而产生的。典型的脉冲噪声是椒盐噪声，它会破坏所有具有最小或最大强度的像素的一部分，而其余像素不受影响[1] [2]。图像恢复是一个线性逆问题，也是成像科学中的基本问题之一。它在许多图像处理应用中发挥着重要作用。在数学上，图像退化模型可以表示为

$$\mathbf{b} = \mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{n} \quad (1)$$

其中， $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是退化图像， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ 是期望的原始干净图像， $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 是线性算子， $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ 是加性噪声。

图像复原是一个困难且不稳定的问题。为了克服这一问题并获得精确的解决方案，人们采用了正则化技术[3]-[5]。通常，图像复原被建模为以下优化问题

$$\min_{\mathbf{u}} \Theta(\mathbf{H}\mathbf{u}, \mathbf{b}) + \lambda \varphi(\mathbf{u}) \quad (2)$$

其中， $\Theta(\cdot)$ 是保真项， $\varphi(\mathbf{u})$ 是某个正则化函数， $\lambda > 0$ 是正则化参数。保真项取决于噪声分布的类型[6]，而正则化函数对图像的理想先验属性进行建模，如锐利边缘、平滑度、对比度等[7]。因此，正则化函数在实现所需图像属性方面起着至关重要的作用，并且已成为一个活跃的研究领域。

最早的正则化函数之一是由 Rudin 等人[8]提出的全变差(Total Variation, TV)模型，该模型是图像复原领域的里程碑式工作。TV 模型利用图像梯度域的稀疏性作为先验，能卓越地保持图像边缘。然而，其本质是假设图像由分段常数区域构成，这导致复原后的图像在平滑区域产生严重的阶梯效应，即本应平滑过渡的区域出现虚假的轮廓和块状伪影，严重影响了图像的视觉质量[9]。

为了抑制阶梯状伪影，研究者们提出了多种改进策略。其中，重叠组稀疏(OGS)的概念被证明是一种非常有效的工具[10] [11]。Selesnick 等人[12]首次将 OGS 用于一维信号处理，数值实验表明，他们的方

法有效减轻了阶梯伪影。Liu 等人[13]将其成功推广至二维信号处理, 提出了 OGSTV 模型。该模型不再孤立地惩罚单个梯度, 而是考虑一个邻域内(如 $K \times K$ 的块)的梯度组, 通过 L2 范数衡量该组的整体幅度。这种非局部的先验更符合自然图像的结构特征, 能有效促进平滑区域的平滑性, 从而显著减轻阶梯效应[14]。

除此之外, OGS 正则化器已成功用于混合的正则化方法中, 并在消除阶梯状伪影方面取得了显著成效。Adam 等人[15][16]提出的混合正则化方法在存在高斯噪声的情况下显示出非常有效的阶梯伪影去除效果。Papafitsoros 等人[17]提出的混合正则化方法在高斯噪声下也显示了类似有效性。受到混合正则化方法对阶梯伪影去除的有效性启发, Adam 等人[18]提出的混合非凸高阶全变差与重叠组稀疏模型用于去除脉冲噪声, 该模型能够有效消除阶梯状伪影, 同时平衡恢复图像的锐度和光滑度, 在高噪声水平建模中展现出巨大潜力[19][20]。Yuan 等人[21]提出一种结合 L0 范数数据保真项与全变差正则化的非凸稀疏优化模型。该模型利用 L0 范数直接刻画受脉冲噪声污染的像素数量, 能够充分利用脉冲噪声的稀疏分布特性。相较于 L1 范数, L0 范数不直接惩罚残差幅值, 可减轻图像有效信息的过度收缩, 从而更好地保持图像的边缘结构和细节纹理。实验结果表明, 该方法在高噪声密度条件下仍具有较好的恢复性能, 验证了 L0 范数数据保真项在脉冲噪声去除中的有效性。Yin 等人[22]用重叠组稀疏全变差取代了全变差, 提出了一种用于脉冲噪声图像恢复的 L0-OGSTV 优化模型, 该模型使用 L0 范数来有效去除脉冲噪声, 而重叠组稀疏全变差用于消除阶梯状伪影。实验结果表明, 在 90% 的高噪声下, 恢复图像的质量依旧很高。

受上述研究的启发, 本文提出一种重叠组稀疏全变差与非凸高阶全变差相结合的混合方法。该方法结合 L0 范数数据保真项, 旨在有效恢复经过脉冲噪声破坏的图像。重叠组稀疏全变差有效减少阶梯状伪影的同时, 非凸高阶全变差又能平衡恢复图像的锐度和平滑度, 保留更多边缘细节。

2. 预备知识

2.1. L0 全变差

Yuan 等人[21]提出的 L0-TV 模型考虑了以下图像复原模型

$$\min_{0 \leq \mathbf{o} \leq \mathbf{1}} \|\mathbf{o} \odot (\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b})\|_0 + \lambda \|\nabla \mathbf{u}\| \quad (3)$$

其中, $\odot$ 表示元素全向乘积, $\mathbf{o} \in \{0, 1\}^n$ 。当 $\mathbf{o}_i = 0$ 时, 表示位置 i 中的像素为异常值, 而当 $\mathbf{o}_i = 1$ 时, 表示位置 i 中的像素为潜在异常值。当 $\mathbf{b}_i = \mathbf{u}_{\min}$ 或 $\mathbf{u}_{\max}$ 时, $\mathbf{o}_i = 0$, 否则 $\mathbf{o}_i = 1$ 。

为了最小化涉及 L0 范数的优化问题, Yuan 等人[21]从原对偶的角度将问题(3)重新表述为一个等价的数学规划带平衡约束问题(MPEC)。为此, 引入了下面的引理来处理问题(3)中的 L0 范数。

引理 1. 对于任何给定的向量 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, 都成立

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}\|_0 &= \min_{0 \leq \mathbf{v} \leq \mathbf{1}} \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle \\ \text{s.t. } \mathbf{v} \odot |\mathbf{w}| &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4)$$

且 $\mathbf{v}^* = \mathbf{1} - \text{sign}(|\mathbf{w}|)$ 是问题(4)问题的唯一最优解。标准符号函数 sign 按分量计算, 且 $\text{sign}(0) = 0$ 。

引理 1 的结果表明, 问题(3)中的 L0 范数最小化问题等价于

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \mathbf{u}, \mathbf{v} \leq \mathbf{1}} & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle + \lambda \|\nabla \mathbf{u}\| \\ \text{s.t. } \mathbf{v} \odot |\mathbf{o} \odot (\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b})| &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5)$$

如果 $\mathbf{u}^*$ 是(3)式的全局最优解, 则 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{1} - \text{sign}(\|\mathbf{H}\mathbf{u}^* - \mathbf{b}\|))$ 就是(5)式的全局最优解。反之, 如果 $(\mathbf{u}^*, \mathbf{1} - \text{sign}(\|\mathbf{H}\mathbf{u}^* - \mathbf{b}\|))$ 是(5)式的全局最优解, 则 $\mathbf{u}^*$ 就是(3)式的全局最优解。

2.2. 重叠组稀疏性

Liu 等人[13]提出的二维图像 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ 的 $K \times K$ 点群由下所示

$$\tilde{\mathbf{u}}(i, j)_K = \begin{bmatrix} u(i-m_1, j-m_1) & u(i-m_1, j-m_1+1) & \cdots & u(i-m_1, j+m_2) \\ u(i-m_1+1, j-m_1) & u(i-m_1+1, j-m_1+1) & \cdots & u(i-m_1+1, j+m_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(i+m_2, j-m_1) & u(i+m_2, j-m_1+1) & \cdots & u(i+m_2, j+m_2) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{K \times K} \quad (6)$$

其中, $m_1 = \left\lfloor \frac{K-1}{2} \right\rfloor$, $m_2 = \left\lfloor \frac{K}{2} \right\rfloor$, $\lfloor x \rfloor$ 表示不小于 x 的最大整数。通过将矩阵 $\tilde{\mathbf{u}}(i, j)_K$ 的 K 列进行堆叠得到向量 $\mathbf{u}(i, j)_K$, 即 $\mathbf{u}(i, j)_K = \tilde{\mathbf{u}}(i, j)_K(:, :)$ 。然后, 二维中的重叠组稀疏正则化器可以紧凑地写为

$$\phi(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1} \|\mathbf{u}(i, j)_K\|_2. \quad (7)$$

3. 模型的建立与求解

本文提出的图像复原优化问题为

$$\min_{0 \leq \mathbf{u} \leq 1} \|o \odot (\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b})\|_0 + \lambda \phi(\nabla \mathbf{u}) + w \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_p^p \quad (8)$$

其中, $w > 0$ 是非凸高阶正则化参数, $\|\nabla^2 \mathbf{u}\|_p^p$ 表示非凸高阶正则化项, $0 < p < 1$ 。

根据引理 1, 问题(8)可以重新表述为

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \mathbf{u}, \mathbf{v} \leq 1} & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle + \lambda \phi(\nabla \mathbf{u}) + w \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_p^p \\ \text{s.t. } & \mathbf{v} \odot |o \odot (\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b})| = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (9)$$

使用变量拆分, 将问题重新表述为以下约束优化问题

$$\begin{aligned} \min_{0 \leq \mathbf{u}, \mathbf{v} \leq 1} & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle + \lambda \phi(\mathbf{x}) + w \|\mathbf{z}\|_p^p \\ \text{s.t. } & \nabla \mathbf{u} = \mathbf{x}, \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{y}, \mathbf{v} \odot |o \odot \mathbf{y}| = \mathbf{v} \odot o \odot |\mathbf{y}| = \mathbf{0}, \nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{z}. \end{aligned} \quad (10)$$

为了求解问题(10), 先得到问题(10)的增广拉格朗日函数

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \pi_x, \pi_y, \pi_z, \pi_v) = & \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle + \lambda \phi(\mathbf{x}) + w \|\mathbf{z}\|_p^p \\ & + \langle \nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}, \pi_x \rangle + \frac{\beta_x}{2} \|\nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 \\ & + \langle \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}, \pi_y \rangle + \frac{\beta_y}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 \\ & + \langle \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}, \pi_z \rangle + \frac{\beta_z}{2} \|\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 \\ & + \langle \mathbf{v} \odot o \odot |\mathbf{y}|, \pi_v \rangle + \frac{\beta_v}{2} \|\mathbf{v} \odot o \odot |\mathbf{y}|\|^2 \end{aligned} \quad (11)$$

其中, π_x 、 π_y 、 π_z 、 π_v 是拉格朗日乘子, β_x 、 β_y 、 β_z 、 $\beta_v > 0$ 是惩罚参数。

根据 ADMM 算法, 可以交替求解以下子问题:

$$\begin{cases}
\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \langle \nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}, \pi_x \rangle + \frac{\beta_x}{2} \|\nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 + \langle \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}, \pi_y \rangle \\
\quad + \frac{\beta_y}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 + \langle \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}, \pi_z \rangle + \frac{\beta_z}{2} \|\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2 \\
\mathbf{v}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{v}} \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} - \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v} \odot \odot \odot |\mathbf{y}|, \pi_v \rangle + \frac{\beta_v}{2} \|\mathbf{v} \odot \odot \odot |\mathbf{y}|\|^2 \\
\mathbf{x}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}} \lambda \phi(\mathbf{x}) + \langle \nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}, \pi_x \rangle + \frac{\beta_x}{2} \|\nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 \\
\mathbf{y}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{y}} \langle \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}, \pi_y \rangle + \frac{\beta_y}{2} \|\mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y}\|^2 \\
\quad + \langle \mathbf{v} \odot \odot \odot |\mathbf{y}|, \pi_v \rangle + \frac{\beta_v}{2} \|\mathbf{v} \odot \odot \odot |\mathbf{y}|\|^2 \\
\mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}} w \|\mathbf{z}\|_p^p + \langle \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}, \pi_z \rangle + \frac{\beta_z}{2} \|\nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z}\|^2
\end{cases} \quad (12)$$

1) (12)中的 $\mathbf{u}$ 子问题等价于

$$\mathbf{u}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{u}} \frac{\beta_x}{2} \left\| \nabla \mathbf{u} - \mathbf{x}^k + \frac{\pi_x^k}{\beta_x} \right\|^2 + \frac{\beta_y}{2} \left\| \mathbf{H}\mathbf{u} - \mathbf{b} - \mathbf{y} + \frac{\pi_y^k}{\beta_y} \right\|^2 + \frac{\beta_z}{2} \left\| \nabla^2 \mathbf{u} - \mathbf{z} + \frac{\pi_z^k}{\beta_z} \right\|^2 \quad (13)$$

根据一阶最优性条件, 这个问题要求我们求解一个线性方程组:

$$\left(\beta_x \nabla^\top \nabla + \beta_y \mathbf{H}^\top \mathbf{H} + \beta_z (\nabla^2)^\top \nabla^2 \right) \mathbf{u} = \nabla^\top (\beta_x \mathbf{x}^k - \pi_x^k) + \mathbf{H}^\top (\beta_y \mathbf{b} + \beta_y \mathbf{y}^k - \pi_y^k) + (\nabla^2)^\top (\beta_z \mathbf{z}^k - \pi_z^k) \quad (14)$$

在关于 $\mathbf{u}$ 的周期边界条件下, 矩阵 $\nabla^\top \nabla$, $\mathbf{H}^\top \mathbf{H}$ 和 $(\nabla^2)^\top \nabla^2$ 具有块循环和循环块(BCCB)结构, 可以通过二维离散傅里叶变换(FFT)进行求解 $\mathbf{u}$, 得解

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{\mathcal{F}(\nabla^\top) \odot \mathcal{F}(\beta_x \mathbf{x}^k - \pi_x^k) + \mathcal{F}(\mathbf{H}^\top) \odot \mathcal{F}(\beta_y \mathbf{b} + \beta_y \mathbf{y}^k - \pi_y^k) + \mathcal{F}((\nabla^2)^\top) \odot \mathcal{F}(\beta_z \mathbf{z}^k - \pi_z^k)}{\beta_y |\mathcal{F}(\mathbf{H})|^2 + \beta_x |\mathcal{F}(\nabla)|^2 + \beta_z |\mathcal{F}(\nabla^2)|^2} \right) \quad (15)$$

其中, $\mathcal{F}$ 为二维 FFT, $\mathcal{F}^{-1}$ 为二维 IFFT。

2) (12)中的 $\mathbf{v}$ 子问题等价于

$$\mathbf{v}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{v}} \frac{\beta_v}{2} (o \odot |\mathbf{y}^k|)^2 \odot \mathbf{v}^2 + (\pi_v^k \odot o \odot |\mathbf{y}^k| - \mathbf{1}) \mathbf{v} \quad (16)$$

$\mathbf{v}$ 的解可使用投影计算, 得闭式解

$$\mathbf{v}^{k+1} = \min \left(\mathbf{1}, \max \left(\mathbf{0}, -\frac{\pi_v^k \odot o \odot |\mathbf{y}^k| - \mathbf{1}}{\beta_v (o \odot |\mathbf{y}^k|)^2} \right) \right) \quad (17)$$

这个子问题是在一个凸集上的投影, 它确保恢复图像的像素值在 0 到 1 之间。

3) (12)中的 $\mathbf{x}$ 子问题等价于

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}^{k+1} &= \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{\beta_x}{2} \left\| \mathbf{x} - \left(\nabla \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\pi_x^k}{\beta_x} \right) \right\|^2 + \lambda \phi(\mathbf{x}) \\
&= \arg \min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2} \left\| \mathbf{x} - \left(\nabla \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\pi_x^k}{\beta_x} \right) \right\|^2 + \frac{\lambda}{\beta_x} \phi(\mathbf{x})
\end{aligned} \quad (18)$$

使用 MM 算法进行求解, 得

$$\mathbf{x}^{k+1} = \left(\mathbf{I} + \frac{\lambda}{\beta_x} \Lambda(\mathbf{x}^k)^\top \Lambda(\mathbf{x}^k) \right)^{-1} \left(\nabla \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\pi_x^k}{\beta_x} \right) \quad (19)$$

求解这个 OGS 子问题需要 MM 算法, 而 MM 算法本身就是一个迭代算法, 这意味着我们的整体算法(算法 1)有内部迭代。

4) (12)中的 $\mathbf{y}$ 子问题等价于

$$\mathbf{y}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{y}} \frac{\beta_y}{2} \left\| \mathbf{y} - \left(\mathbf{H} \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{b} + \frac{\pi_y^k}{\beta_y} \right) \right\|^2 + \frac{\beta_y}{2} \left\| \mathbf{v}^{k+1} \odot \odot |\mathbf{y}| + \frac{\pi_v^k}{\beta_v} \right\|^2 \quad (20)$$

展开(20)式并舍弃常数项, 通过四维收缩算子来计算(20)式, 得解

$$\mathbf{y}^{k+1} = \frac{\mathbf{H} \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{b} + \frac{\pi_y^k}{\beta_y}}{\left| \mathbf{H} \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{b} + \frac{\pi_y^k}{\beta_y} \right|} \odot \max \left(\frac{\beta_y \left| \mathbf{H} \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{b} + \frac{\pi_y^k}{\beta_y} \right| - \mathbf{v}^{k+1} \odot \odot |\pi_v^k|}{\beta_y + \beta_v (\mathbf{v}^{k+1} \odot \odot)^2}, 0 \right) \quad (21)$$

5) (12)中的 $\mathbf{z}$ 子问题等价于

$$\mathbf{z}^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{z}} \frac{\beta_z}{2} \left\| \mathbf{z} - \left(\nabla^2 \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\pi_z^k}{\beta_z} \right) \right\|^2 + w \|\mathbf{z}\|_p^p \quad (22)$$

使用 IRL1 算法求解, 记 $\tilde{\mathbf{z}} = \nabla^2 \mathbf{u}^{k+1} + \frac{\pi_z^k}{\beta_z}$, 其解为软阈值算子

$$\mathbf{z}^{k+1} = \text{sign}(\tilde{\mathbf{z}}) \odot \max \left(|\tilde{\mathbf{z}}| - \frac{\omega p}{\beta_z (|\mathbf{z}^k| + \varepsilon)^{1-p}}, 0 \right) \quad (23)$$

其中 ε 是一个小的正常数。

6) 乘子更新

$$\begin{aligned} \pi_x^{k+1} &= \pi_x^k + \beta_x (\nabla \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+1}) \\ \pi_y^{k+1} &= \pi_y^k + \beta_y (\mathbf{H} \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{b} - \mathbf{y}^{k+1}) \\ \pi_z^{k+1} &= \pi_z^k + \beta_z (\nabla^2 \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{z}^{k+1}) \\ \pi_v^{k+1} &= \pi_v^k + \beta_v (\mathbf{v}^{k+1} \odot \odot \mathbf{v}^{k+1}) \end{aligned} \quad (24)$$

本文图像复原算法的整体算法在算法 1 中给出。

4. 实验结果及分析

本节将通过实验来说明本文方法对脉冲噪声图像恢复的有效性。我们在开放数据集中选取六幅大小为 256×256 的灰度图像, 实验图像如图 1 所示。本文方法实验在 Matlab(R2019b)上进行, 且电脑配置为 Windows 11, Intel(R) Core(TM) i5-10210U CPU @2.11 GHz。

实验选用噪声水平为 30%、50%和 70%的椒盐噪声, 分别在 $\sigma = 5$, 7×7 的高斯模糊、 9×9 的平均模糊和 $\text{len} = 30$, $\theta = 15$ 的运动模糊下对六幅图像进行处理。并与其他现有方法进行了比较, 这些方法包

括 L0-TV [21], L0-OGSTV [22]和 OGS-WT [23]。恢复图像的质量采用峰值信噪比(PSNR)和结构相似性指(SSIM)进行评估[24]。所有图像均经过十次去模糊处理, 最终结果取十次的平均值。

算法 1: 结合高阶非凸全变差与重叠组稀疏性去除脉冲噪声

输入: 含有脉冲噪声的模糊图像 u , 正则化参数 λ , ω , 组大小, p , 惩罚参数 $\beta_x, \beta_y, \beta_z, \beta_v > 0$

输出: 复原后的图像 u

初始化: 初始图像 $u^0 = b$, 最大迭代次数 $N = 800$, $k = 0$, 拉格朗日乘数 $\pi_x, \pi_y, \pi_z, \pi_v = 0$

迭代: 根据(15)式更新 u
根据(17)式更新 v
根据(19)式更新 x
根据(21)式更新 y
根据(23)式更新 z
根据(24)式更新乘子

$k = k + 1$

停止收敛条件: $\frac{\|u_{k+1} - u_k\|}{\|u_k\|} \leq 1 \times 10^{-4}$



Figure 1. Test images used in the experiments
图 1. 实验所用的测试图像

不同模型在三种模糊下的评价指标结果在表 1~3 中展示, 从表中可以看出, 本文方法的 PSNR 和 SSIM 值均优于 L0-TV 和 L0-OGSTV 方法, 相较于 OGS-WT 方法, 图 *c* 和图 *f* 的恢复结果略差人意, 总体来说, 本文方法在性能上明显优于其他算法。

Table 1. Evaluation index results of different models under Gaussian blur
表 1. 不同模型在高斯模糊下的评价指标结果

Image	Noise level	L0-TV		L0-OGSTV		OGS-WT		proposed	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
<i>a</i>	30%	33.01	0.930	33.58	0.939	33.80	0.943	34.23	0.945
	50%	32.27	0.922	32.82	0.933	33.15	0.937	33.52	0.939
	70%	31.09	0.904	31.69	0.920	32.00	0.925	32.16	0.927
<i>b</i>	30%	34.62	0.899	34.74	0.894	35.07	0.894	35.91	0.919
	50%	34.01	0.889	34.09	0.886	34.48	0.888	35.04	0.907
	70%	32.80	0.873	32.80	0.872	33.45	0.876	33.74	0.889

续表

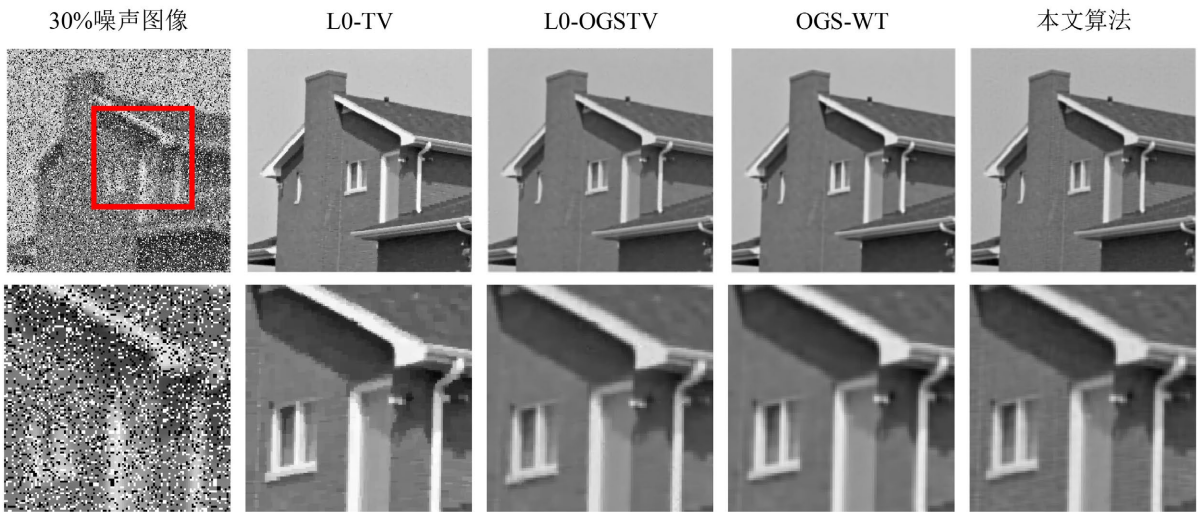
<i>c</i>	30%	30.67	0.865	31.20	0.874	31.42	0.879	31.63	0.884
	50%	30.05	0.852	30.83	0.867	31.01	0.870	31.11	0.875
	70%	29.07	0.830	29.83	0.847	30.20	0.853	29.47	0.850
<i>d</i>	30%	33.89	0.915	34.01	0.922	34.47	0.930	35.18	0.937
	50%	33.22	0.905	33.50	0.915	34.00	0.925	34.54	0.931
	70%	32.26	0.889	32.47	0.905	33.12	0.913	33.27	0.921
<i>e</i>	30%	30.47	0.874	30.67	0.877	30.65	0.877	31.10	0.891
	50%	29.75	0.954	29.99	0.860	30.12	0.863	30.40	0.875
	70%	28.38	0.813	28.91	0.829	29.06	0.833	29.14	0.843
<i>f</i>	30%	35.79	0.939	36.46	0.945	37.27	0.954	37.87	0.958
	50%	35.12	0.932	35.99	0.943	36.79	0.950	36.38	0.955
	70%	34.00	0.921	35.01	0.937	35.87	0.943	35.71	0.948

Table 2. Evaluation index results of different models under average blur**表 2.** 不同模型在平均模糊下的评价指标结果

Image	Noise level	L0-TV		L0-OGSTV		OGS-WT		proposed	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
<i>a</i>	30%	31.83	0.914	32.30	0.924	32.10	0.925	32.77	0.931
	50%	31.10	0.904	31.58	0.915	31.63	0.919	32.05	0.923
	70%	29.90	0.884	30.59	0.902	30.73	0.906	31.06	0.911
<i>b</i>	30%	33.80	0.884	34.27	0.881	34.39	0.884	35.17	0.905
	50%	33.36	0.876	33.70	0.877	33.96	0.879	34.49	0.895
	70%	32.50	0.864	32.54	0.864	32.91	0.866	33.34	0.878
<i>c</i>	30%	29.86	0.842	30.41	0.854	30.55	0.858	30.85	0.868
	50%	29.21	0.830	30.02	0.846	30.25	0.850	30.41	0.857
	70%	28.53	0.809	29.27	0.827	29.52	0.835	28.85	0.829
<i>d</i>	30%	32.58	0.892	32.87	0.900	32.80	0.906	33.73	0.921
	50%	32.06	0.882	32.33	0.895	32.39	0.900	33.11	0.913
	70%	31.17	0.864	31.46	0.882	31.67	0.888	32.04	0.899
<i>e</i>	30%	29.27	0.838	29.57	0.844	29.38	0.841	29.91	0.861
	50%	28.72	0.819	29.03	0.828	28.94	0.827	29.34	0.846
	70%	27.78	0.784	28.13	0.797	28.15	0.798	28.54	0.818
<i>f</i>	30%	34.78	0.925	35.72	0.938	35.85	0.942	36.80	0.950
	50%	34.22	0.919	35.12	0.934	35.51	0.939	36.18	0.946
	70%	33.46	0.908	34.26	0.927	34.77	0.931	35.11	0.937

Table 3. Evaluation index results of different models under motion blur
表 3. 不同模型在运动模糊下的评价指标结果

Image	Noise level	L0-TV		L0-OGSTV		OGS-WT		proposed	
		PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM	PSNR	SSIM
<i>a</i>	30%	32.14	0.918	32.23	0.923	32.28	0.926	32.33	0.928
	50%	31.08	0.904	31.37	0.911	31.49	0.915	31.53	0.917
	70%	29.42	0.873	29.83	0.887	30.09	0.894	30.14	0.896
<i>b</i>	30%	33.68	0.880	33.92	0.887	34.36	0.895	34.45	0.907
	50%	32.79	0.871	33.05	0.878	33.24	0.887	33.46	0.895
	70%	31.53	0.857	31.80	0.862	31.71	0.867	31.88	0.876
<i>c</i>	30%	29.63	0.833	29.94	0.841	30.20	0.849	30.46	0.860
	50%	28.89	0.814	29.24	0.823	29.55	0.837	29.78	0.843
	70%	27.66	0.786	28.20	0.793	28.28	0.809	28.34	0.814
<i>d</i>	30%	32.37	0.893	32.59	0.898	33.00	0.906	33.70	0.922
	50%	31.52	0.880	31.72	0.885	32.18	0.896	32.74	0.911
	70%	30.64	0.848	30.22	0.859	30.68	0.871	31.20	0.887
<i>e</i>	30%	29.49	0.831	29.71	0.843	30.00	0.860	30.03	0.863
	50%	28.46	0.811	28.77	0.816	29.05	0.829	29.13	0.839
	70%	27.09	0.752	27.30	0.766	27.59	0.781	27.72	0.793
<i>f</i>	30%	35.15	0.930	35.27	0.935	35.88	0.943	36.13	0.952
	50%	34.36	0.920	34.59	0.929	35.03	0.936	35.27	0.945
	70%	33.08	0.905	33.27	0.915	33.68	0.923	33.83	0.933



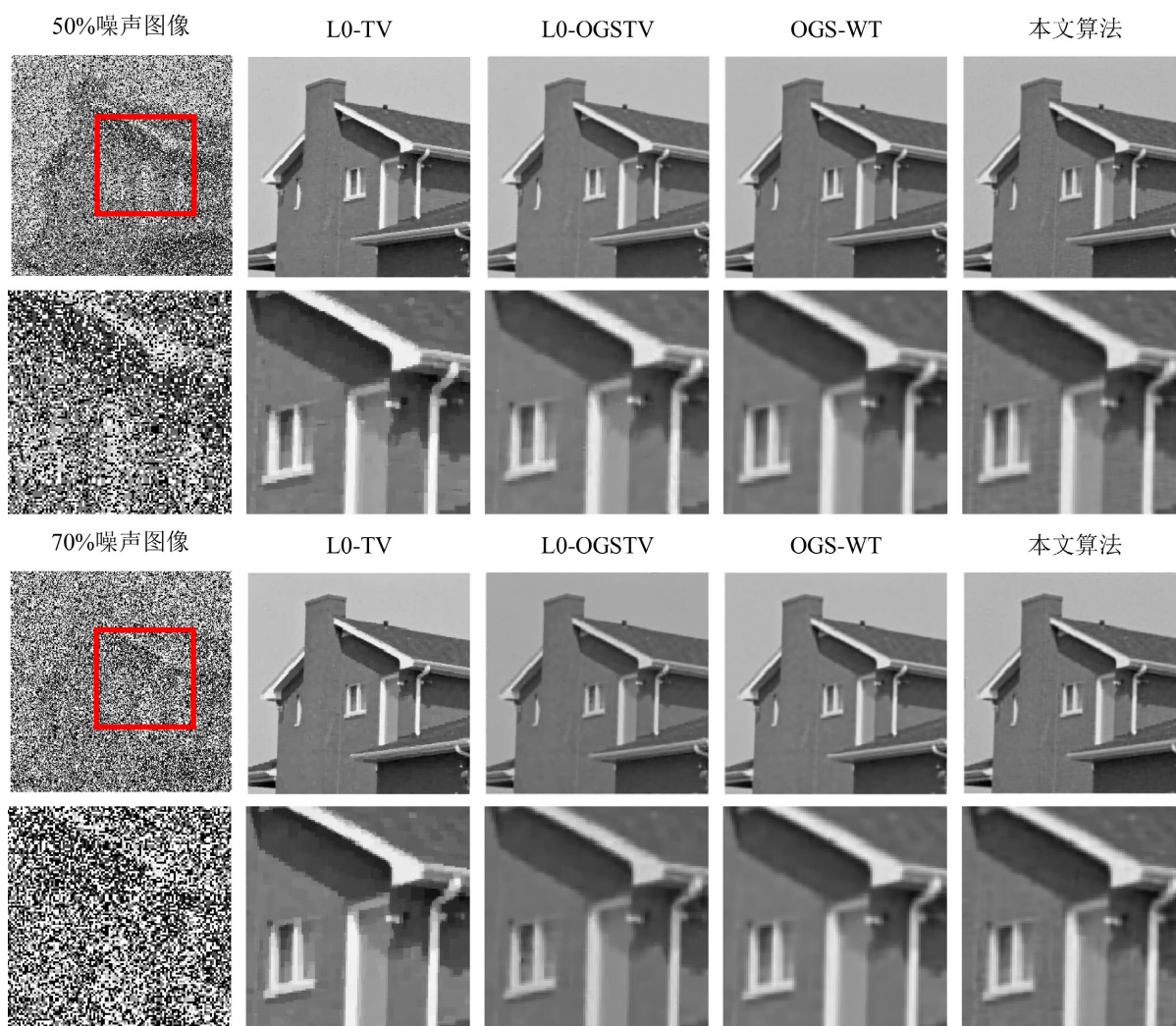


Figure 2. Deblurred images of image *b* under 30%, 50%, and 70% salt-and-pepper noise with Gaussian blur

图 2. 图 *b* 在 30%、50%和 70%的椒盐噪声和高斯模糊下的去模糊图像

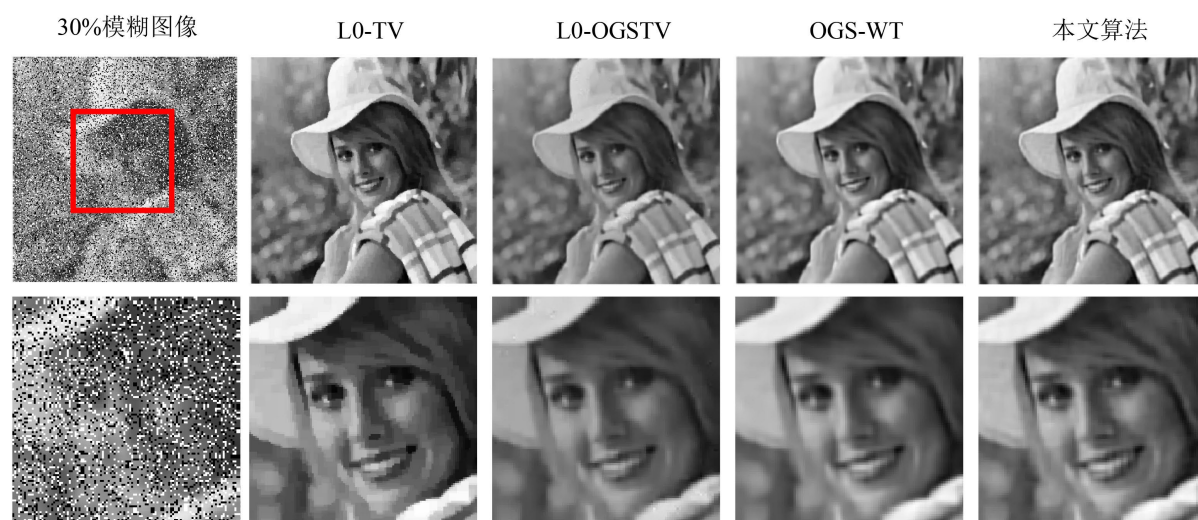




Figure 3. Deblurred images of image d under 30%, 50%, and 70% salt-and-pepper noise with average blur

图 3. 图 d 在 30%、50%和 70%的椒盐噪声和平均模糊下的去噪图像



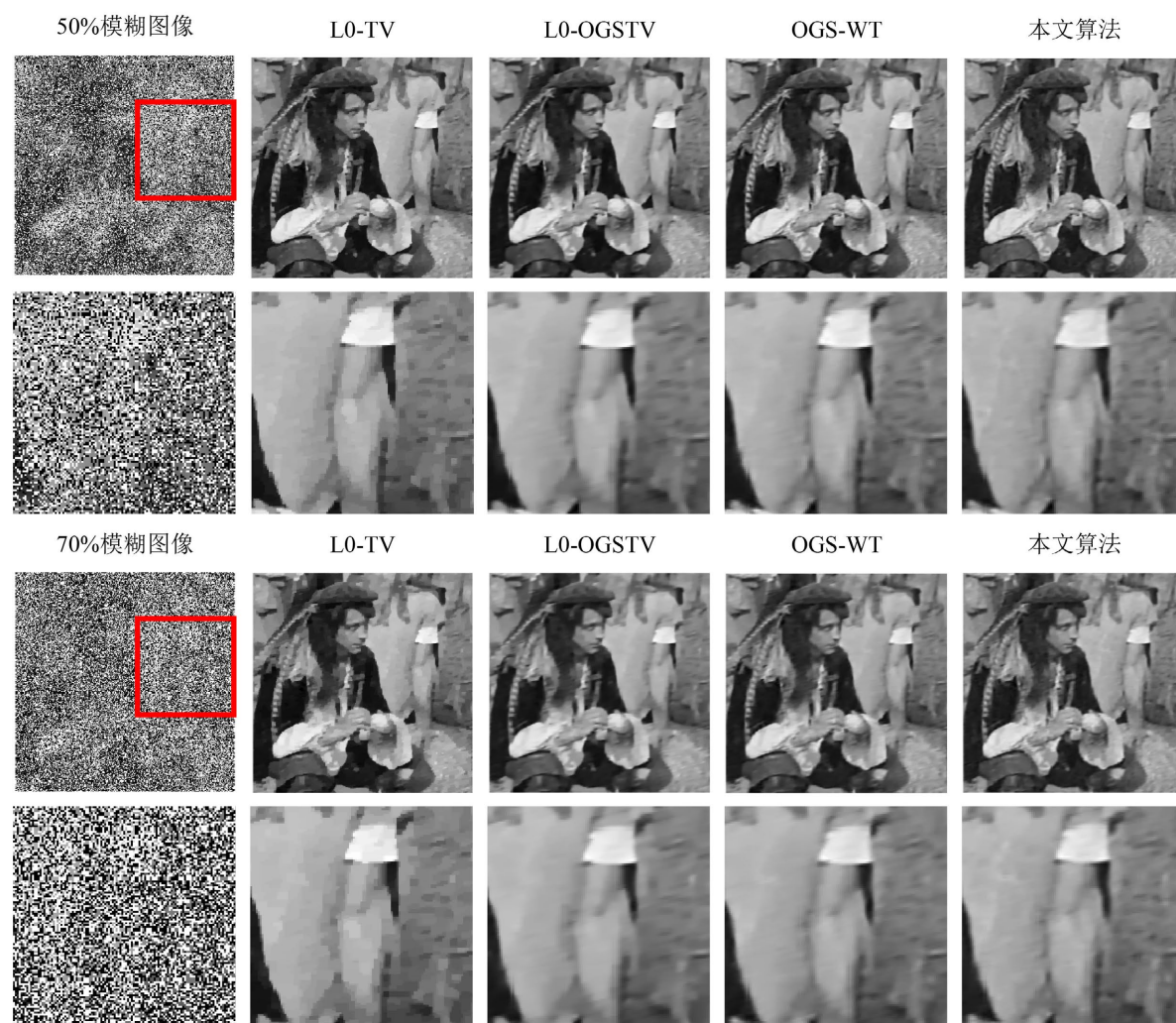
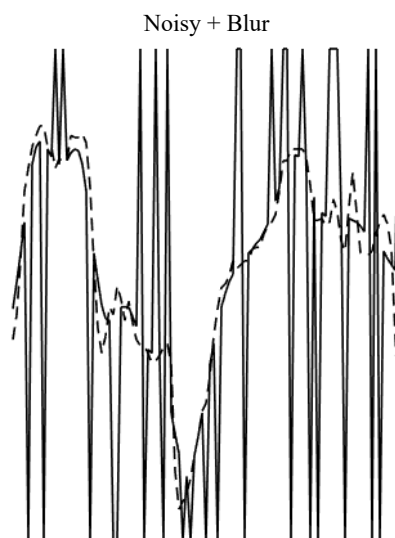


Figure 4. Deblurred images of image e under 30%, 50%, and 70% salt-and-pepper noise with motion blur

图 4. 图 e 在 30%、50%和 70%的椒盐噪声和运动模糊下的去噪图像



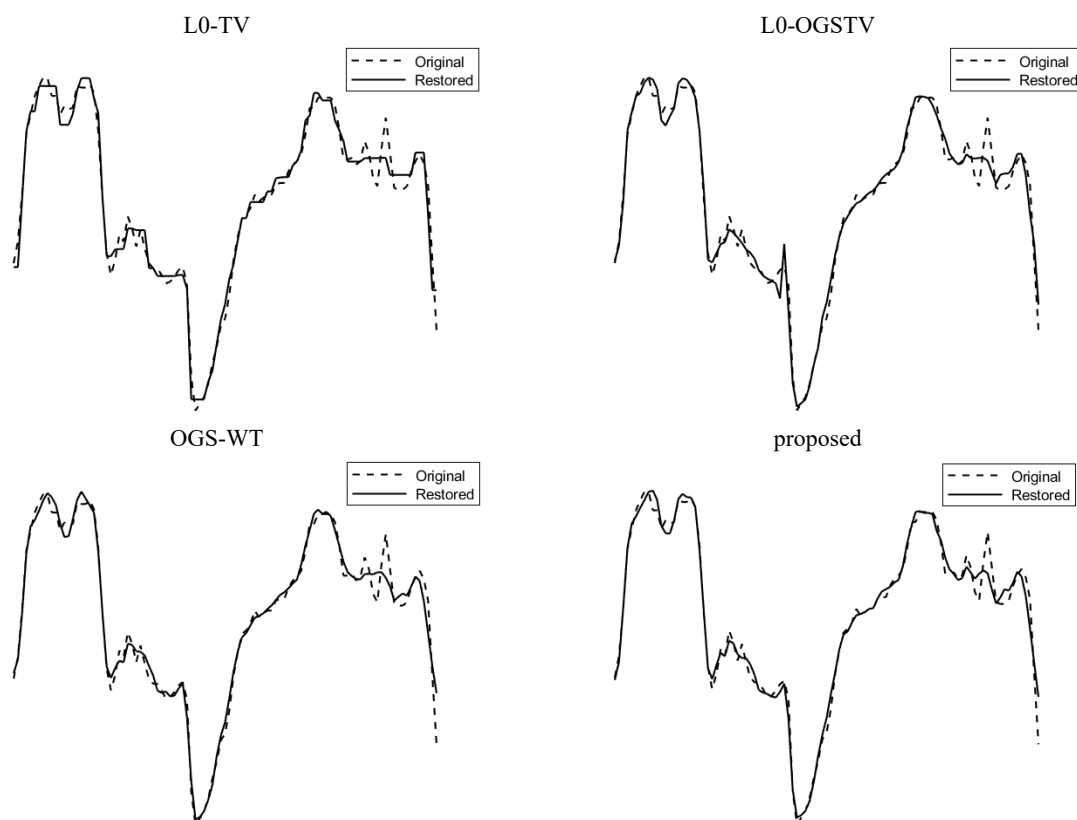


Figure 5. Slice of image *a* (the 65th row) and their corresponding deblurred results for 30% salt-and-pepper noise
图 5. 图 *a* 的切片(第 65 行)及其在 30%椒盐噪声下的相对应去模糊结果

不同模型下三种模糊的去模糊后的图像(图 *b*, 图 *d* 和图 *e*)如图 2~4 所示, 并对所有方法进行了放大后的区域展示。从放大的区域来看, 我们可以观察到 L0-TV 产生了很严重的阶梯伪影, 尤其是在噪声水平达到 70%时。但本文方法既没有产生明显的阶梯状伪影, 能够较好地保持物体边缘的锐利度, 也没有过度的平滑细节, 恢复后的图像的纹理区域更加清晰自然。因此, 本文方法从视觉上来看, 明显优于所对比的三种方法。

为了进一步展示本文算法的有效性, 图 5 绘制了图像 *a* 在标准差为 5, 大小为 7×7 的高斯模糊和 30%的椒盐噪声水平下的第 65 行的一维行切片。可以看出, 本文的方法可以更好地恢复信号的尖峰和谷底, 数据拟合能力更好。

5. 结束语

本文提出了一种重叠组稀疏性与非凸高阶全变差相结合的混合正则化方法, 并引入 L0 范数, 旨在有效恢复受脉冲噪声污染的图像。L0 范数数据保真项能够更有效地去除脉冲噪声, 而重叠组稀疏全变差与非凸高阶全变差则用于消除阶梯效应, 同时保持恢复图像的边缘清晰度。在实验部分, 我们测试了大量实验以验证所提方法的有效性。实验结果表明, 本文方法在恢复图像细节和抑制伪影方面具有明显的优势。

尽管本文方法具有一定优势, 但仍存在局限性。L0 范数数据保真项具有非凸、非光滑特性, 同时整体模型涉及内部迭代和高阶矩阵计算, 导致计算时间较长、收敛速度较慢, 限制了实际应用。未来拟引入即插即用(PnP)框架, 以预训练深度降噪器替代复杂正则化项, 降低非凸优化的求解难度; 同时采用硬

阈值操作简化 L0 项的处理, 替代 MPEC 中的辅助变量 v , 以提高计算效率并降低参数敏感性。

参考文献

- [1] Zhang, N., Yang, J.W., Li, Z.B., *et al.* (2025) Deep Learning-Based Image Denoising: A Comprehensive Survey. 2025 *5th International Conference on Artificial Intelligence and Industrial Technology Applications*, Xi'an, 28-30 March 2025, 896-910.
- [2] Wu, S.X., Guo, C.C. and Wang, X.H. (2024) Salt-and-Pepper Noise Reduction for Medical Images Based on Image Fusion. *Current Medical Imaging Formerly Current Medical Imaging Reviews*, **20**, 1-13. <https://doi.org/10.2174/1573405620666230525104841>
- [3] Tikhonov, A.N., Goncharksky, A.V., Stepanov, V.V. and Yagola, A.G. (1995) Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems. Springer.
- [4] Yagola, A.G. (2010) Ill-Posed Problems and Methods for Their Numerical Solution. In: *Optimization and Regularization for Computational Inverse Problems and Applications*, Springer, 17-34. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13742-6_2
- [5] Ren, D.W., Zhang, H.Z., Zhang, D. and Zuo, W.M. (2015) Fast Total-Variation Based Image Restoration Based on Derivative Alternated Direction Optimization Methods. *Neurocomputing*, **170**, 201-212.
- [6] Ren, W., Cao, X., Pan, J., Guo, X., Zuo, W., and Yang, M. H. (2016) Image Deblurring via Enhanced Low-Rank Prior. *IEEE Transactions on Image Processing*, **25**, 3426-3437. <https://doi.org/10.1109/tip.2016.2571062>
- [7] Gilton, D., Ongie, G. and Willett, R. (2020) Neumann Networks for Linear Inverse Problems in Imaging. *IEEE Transactions on Computational Imaging*, **6**, 328-343. <https://doi.org/10.1109/tci.2019.2948732>
- [8] Rudin, L.I., Osher, S. and Fatemi, E. (1992) Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **60**, 259-268. [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90242-f](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90242-f)
- [9] Hosseini, A. and Bazm, S. (2023) The Second-Order Shannon Total Generalized Variation for Image Restoration. *Signal Processing*, **204**, Article 108848. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2022.108848>
- [10] Jon, K., Sun, Y., Li, Q.X., Liu, J., *et al.* (2021) Image Restoration Using Overlapping Group Sparsity on Hyper-Laplacian Prior of Image Gradient. *Neurocomputing*, **420**, 57-69. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2020.08.053>
- [11] Zhang, C. and Yen, K.S. (2024) Denoising on Textured Image Using Total Generalized Variation with Overlapping Group Sparsity Based on Fast Split Bregman Method. *IEEE Access*, **12**, 19145-19157. <https://doi.org/10.1109/access.2024.3357835>
- [12] Selesnick, I.W. and Chen, P.Y. (2013) Total Variation Denoising with Overlapping Group Sparsity. 2013 *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Vancouver, 26-31 May 2013, 5696-5700. <https://doi.org/10.1109/icassp.2013.6638755>
- [13] Liu, J., Huang, T.Z., Selesnick, I.W., Lv, X.G. and Chen, P.Y. (2015) Image Restoration Using Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Information Sciences*, **295**, 232-246. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2014.10.041>
- [14] Li, R. and Zheng, B. (2022) The $\ell_{2,p}$ Regularized Total Variation with Overlapping Group Sparsity Prior for Image Restoration with Impulse Noise. *Numerical Algorithms*, **91**, 1779-1814. <https://doi.org/10.1007/s11075-022-01322-x>
- [15] Adam, T. and Paramesran, R. (2019) Image Denoising Using Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, **30**, 503-527. <https://doi.org/10.1007/s11045-018-0567-3>
- [16] Adam, T. and Paramesran, R. (2020) Hybrid Non-Convex Second-Order Total Variation with Applications to Non-Blind Image Deblurring. *Signal, Image and Video Processing*, **14**, 115-123. <https://doi.org/10.1007/s11760-019-01531-3>
- [17] Papafitsoros, K. and Schönlieb, C.B. (2014) A Combined First and Second Order Variational Approach for Image Reconstruction. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, **48**, 308-338. <https://doi.org/10.1007/s10851-013-0445-4>
- [18] Adam, T., Paramesran, R., Mingming, Y. and Ratnavelu, K. (2021) Combined Higher Order Non-Convex Total Variation with Overlapping Group Sparsity for Impulse Noise Removal. *Multimedia Tools and Applications*, **80**, 18503-18530. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-10583-y>
- [19] Wang, B. and Lan, Z.J. (2025) Nonconvex High-Order TV and ℓ_0 Norm-Based Method for Image Restoration. *Electronic Research Archive*, **33**, 3431-3449. <https://doi.org/10.3934/era.2025152>
- [20] Zeng, X.Y., Li, Y.C., Dong, Y.Q. and Li, S. (2025) An ℓ_1 - ℓ_0 Adaptive Detection Approach for Image Deblurring with Impulse Noise. *Inverse Problems*, **41**, Article 105009. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/ae131f>
- [21] Yuan, G. and Ghanem, B. (2019) ℓ_0 TV: A Sparse Optimization Method for Impulse Noise Image Restoration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **41**, 352-364. <https://doi.org/10.1109/tpami.2017.2783936>
- [22] Yin, M.M., Adam, T., Paramesran, R. and Hassan, M.F. (2022) An ℓ_0 -Overlapping Group Sparse Total Variation for

Impulse Noise Image Restoration. *Signal Processing: Image Communication*, **102**, Article 116620. <https://doi.org/10.1016/j.image.2021.116620>

- [23] 董伦, 基于稀疏先验的遥感图像复原方法研究[D]: [硕士学位论文]. 长春: 长春理工大学, 2024.
- [24] Wang, Z., Bovik, A.C., Sheikh, H.R. and Simoncelli, E.P. (2004) Image Quality Assessment: From Error Visibility to Structural Similarity. *IEEE Transactions on Image Processing*, **13**, 600-612. <https://doi.org/10.1109/tip.2003.819861>