

水力压裂裂缝尖端应力强度因子研究

李雨晴¹, 王璐^{1,2}, 李雪晴¹, 李仁杰¹

¹辽宁石油化工大学石油天然气工程学院, 辽宁 抚顺

²中国石油大学(华东)储运与建筑工程学院, 山东 青岛

收稿日期: 2024年12月30日; 录用日期: 2025年2月21日; 发布日期: 2025年3月7日

摘要

基于断裂力学理论, 通过分析裂缝尖端应力场的裂缝扩展临界条件来确定裂缝可能发生破坏的方向和储层所能承受的极限荷载条件, 从而针对不同工况提出促进裂缝扩展的设计方法。当裂缝尖端的应力强度因子大于材料的断裂韧性时, 储层中的裂缝被认为是可以起裂并且延伸的。对于单裂缝来说, 随着初始裂缝角度不断增大, 裂缝尖端的K值不断减小, 当水力裂缝呈水平状态时, 裂尖位置的应力强度因子要大于倾斜状态下裂缝尖端的应力强度因子。当裂缝尖端在应力强度因子的作用下, 会造成裂缝改变其原有扩展方向。随着初始裂缝角度的不断增大, 裂缝偏转角度会不断增大。当应力强度因子较大时, 裂缝偏转角的角度变化较大, 当应力强度因子较小时, 裂缝偏转角的角度变化较小。对于垂直双裂缝来说, 当两条裂缝处于同轴状态下时, 裂缝两个尖端受裂缝相互作用的影响较小。此时, 当应力强度因子呈指数级上升时, 会造成裂缝尖端发生转向。当两条裂缝处于异轴状态下时, crack1受裂缝相互作用的影响小于crack2。相近的裂缝尖端因缝尖相互作用, 导致其应力强度因子的变化幅度大于较远的裂缝尖端。但此时, crack1的偏转角度变化大于crack2。

关键词

断裂力学, 水力压裂, 裂缝起裂扩展, 应力强度因子

Research on Stress Intensity Factor at the Tip of Hydraulic Fracture

Yuqing Li¹, Lu Wang^{1,2}, Xueqing Li¹, Renjie Li¹

¹College of Petroleum Engineering, Liaoning Petrochemical University, Fushun Liaoning

²College of Pipeline and Civil Engineering, China University of Petroleum (East China), Qingdao Shandong

Received: Dec. 30th, 2024; accepted: Feb. 21st, 2025; published: Mar. 7th, 2025

Abstract

Based on the theory of fracture mechanics, the direction in which fractures may fail and the ultimate

文章引用: 李雨晴, 王璐, 李雪晴, 李仁杰. 水力压裂裂缝尖端应力强度因子研究[J]. 石油天然气学报, 2025, 47(1): 9-23. DOI: 10.12677/jogt.2025.471002

load conditions that the reservoir can withstand are determined by analyzing the critical conditions for crack propagation at the crack tip stress field, thereby proposing design methods to prevent or promote crack propagation for different working conditions. When the stress intensity factor at the crack tip is greater than the fracture toughness of the material, the fractures in the reservoir are considered to be capable of initiating and extending. For a single fracture, as the initial fracture angle continuously increases, the K value at the crack tip continuously decreases. When the hydraulic fracture is in a horizontal state, the stress intensity factor at the crack tip is greater than that in the inclined state. When the crack tip is subjected to the stress intensity factor, it will cause the crack to change its original propagation direction. As the initial fracture angle continuously increases, the crack deflection angle will also continuously increase. When the stress intensity factor is large, the angle change of the crack deflection angle is large, and when the stress intensity factor is small, the angle change of the crack deflection angle is small. For vertical double fractures, when the two fractures are in the coaxial state, the influence of the interaction between the fractures on the two crack tips is small. At this time, when the stress intensity factor increases exponentially, it will cause the crack tip to turn. When the two fractures are in the eccentric state, the influence of the interaction between the fractures on crack1 is less than that on crack2. The stress intensity factor of the nearby crack tips changes more significantly due to the interaction between the crack tips than that of the distant crack tips. However, at this time, the angle change of the deflection of crack1 is greater than that of crack2.

Keywords

Fracture Mechanics, Hydraulic Fracturing, Crack Initiation and Propagation, Stress Intensity Factor

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

水力压裂裂缝的扩展是岩石力学、断裂力学、渗流力学等学科的综合运用体现,裂缝是否会失稳扩展进而导致储层体积变化一直是学者们重点关注的研究问题。传统的水力压裂理论认为当井筒内壁最大切向应力达到岩石的极限抗拉强度时裂缝起裂、扩展,最终导致岩石发生张拉破坏[1]。而线弹性断裂力学为目前大多数裂缝体的分析提供了基础,其主要任务是研究材料在受力条件下裂缝尖端附近区域应力场和位移场的变化情况,通过裂缝尖端应力场建立合适的裂缝扩展临界条件来确定裂缝可能发生破坏的方向和材料所能承受的极限荷载条件,从而针对不同工况提出阻止或促进裂缝扩展的设计方法。当裂缝尖端的应力强度因子大于材料的断裂韧性时,储层中的裂缝被认为是可以起裂并且延伸的[2]。因此,分析研究水力压裂裂缝尖端的应力强度因子,特别是多裂缝之间的相互作用规律具有重大现实意义。国内外许多学者已经对裂缝的扩展做出了大量的研究,张亚州等针对含预制裂缝单材料均质模型以及双材料界面模型数值算例,分别采用位移外推法和扩展有限元法计算了裂缝尖端的应力强度因子[3]。盛金昌等以应力强度因子为控制参量,给出了水力压裂的判据[4]。Fu P 等将应力强度因子作为起裂准则研究了二维水力裂缝的扩展路径,该方法可以实现任意路径的裂缝扩展[5]。

通过对岩石断裂力学、裂缝扩展路径及水力压裂技术国内外研究现状的分析表明,尽管在理论分析,室内实验及数值模拟等方面取得了较为丰富的研究成果,但是还存在一些需要深入理解和分析的问题。故本文将基于断裂准则,通过有限元软件对水力压裂裂缝尖端应力强度因子进行分析,计算不同裂缝长

度、角度及多裂缝之间相互作用下的 I 型应力强度因子值, 分析其变化规律。

2. 数学模型

根据裂缝的受力和断裂特征, 1957 年, Irwin [6] 根据裂缝的张开形态和方向将裂缝分为三种不同的类型: 张开型裂缝(I 型)、剪切型裂缝(II 型)和撕裂型裂缝(III 型), 如图 1 所示。在不同类型的裂缝表面, 存在三种不同的相对位移。这些裂缝受力的特点如下: 垂直于裂缝面的拉应力作用于张开型裂缝(I 型), 促使裂缝在平面内张开; 平行于裂缝面但垂直于裂缝前缘的剪应力作用于剪切型裂缝(II 型), 促使裂缝扩展方向呈现一定的角度; 平行于裂缝面和平行于裂缝前缘的剪应力同时作用于撕裂型裂缝(III 型), 促使裂缝在裂缝面沿错开的方向扩展。

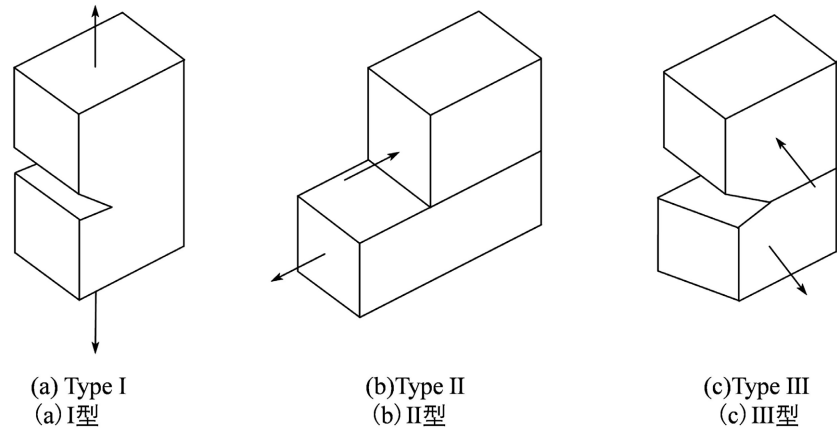


Figure 1. The three basic types of cracks
图 1. 裂缝的三种基本类型

2.1. 裂缝尖端附近的应力分析

对于裂缝的起裂及扩展研究主要集中在裂缝尖端, 故对裂缝尖端位置的应力场进行分析是其重要的组成部分。Irwin [6] [7] 等在通过求解裂尖应力应变场的表达式后阐述了应力强度因子的概念。在求解裂缝尖端的应力场时, 通常需要满足以下三个条件:

- (1) 裂缝所在的储层结构应当是无限大的;
- (2) 为了满足应力函数的边界条件, 需要假设裂缝尖端处的应力为有限值, 通过引入应力强度因子来描述;
- (3) 在求解裂缝尖端应力场时, 通常假设裂缝的尺寸相对于观察点的距离很小, 即 r 的数值要远远小于裂缝长度 $2a$ 。

根据《应力强度因子手册》[8]可知, 对于无限大平面内有一中心裂缝, 其长度为 $2a$, 在垂直裂缝方向受单向均匀分布正应力和剪应力作用, 裂缝尖端的应力强度因子表达式如式(1):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (1)$$

当裂缝与水平方向成 β 夹角时, 裂缝尖端的应力强度因子表达式如式(2):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta \quad (2)$$

其中, K_I 为 I 型裂纹应力强度因子; σ 为拉应力; a 为裂缝半长; β 为裂缝与水平方向倾角。

假设裂缝尖端所在的位置即为坐标轴的原点坐标 (r, θ) , 如图 2 所示:

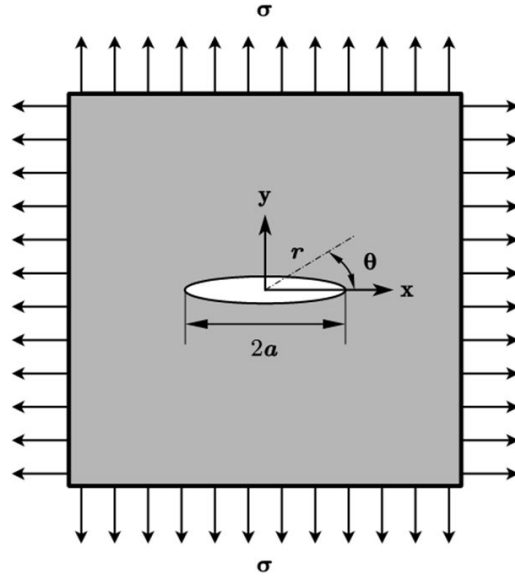


Figure 2. Diagram of stress state at the tip of type I crack
图 2. I 型裂缝尖端应力状态示意图

那么张开型裂缝(I 型)尖端应力场的大小, 用极坐标可以表达如式(3) [9]:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \text{平面应变} \\ \sigma_z = 0, \text{平面应力} \end{cases} \quad (3)$$

公式(3)可以用张量标记缩写为公式(4):

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (4)$$

其中, $f_{ij}(\theta)$ 为与裂纹所在的表面形成的角度 θ 相关的有界函数; r 、 θ 为裂缝尖端附近点的极坐; σ_x 、 σ_y 和 τ_{xy} 为应力分量; E 为弹性模量; τ_{xy} 、 τ_{yz} 表示对应的切应力分量。

2.2. 二维裂缝起裂准则

从断裂力学角度来看, 常见的断裂判据包括线弹性断裂力学理论中的应力强度因子判定法。在裂缝扩展过程中, 应力强度因子的变化可以准确预测裂缝扩展速率, 所以可以通过应力强度因子的大小来判断裂缝是否会达到起裂及扩展标准。 K_{IC} 表示的为临界应力强度因子, 当 K_I 达到一定的 K_{IC} 值时, 裂缝发生起裂并开始扩展。裂缝断裂的产生是一个由线弹性到非线性最后到失稳破坏三个阶段组成的。当裂缝尖端的应力强度因子到达岩石的断裂韧性时, 随后外部载荷的增大, 裂缝就会起裂并扩展。裂缝起裂扩展准则如式(5)所示[10]:

$$\begin{cases} K = K_{IC}^S, & \text{裂缝起裂} \\ K_{IC}^S \leq K \leq K_{IC}^T, & \text{裂缝稳定扩展} \\ K \geq K_{IC}^T, & \text{裂缝失稳扩展} \end{cases} \quad (5)$$

其中， K 为裂尖应力强度因子； K_{IC}^S 为起裂断裂韧度； K_{IC}^T 为失稳断裂韧度。

对于裂缝扩展过程中所造成的裂缝偏转问题，一般会在上述基础上运用最大切应力准则和最大能量释放率准则。

3. 有限元模型建立

以尺寸为 100 m × 100 m 的平面地层模型为研究对象，预制一条长度为 2a 的中心裂缝，在垂直裂缝方向受大小为 100 MPa 的均匀正应力作用。采用材料属性模块定义了地层的弹性模量、泊松比、渗透率以及孔隙比，具体参数如表 1 所示。该模型采用平面应变单元 CPE4R，并对其裂缝及裂缝尖端区域进行网格细化，网格划分结果如图 3 所示。

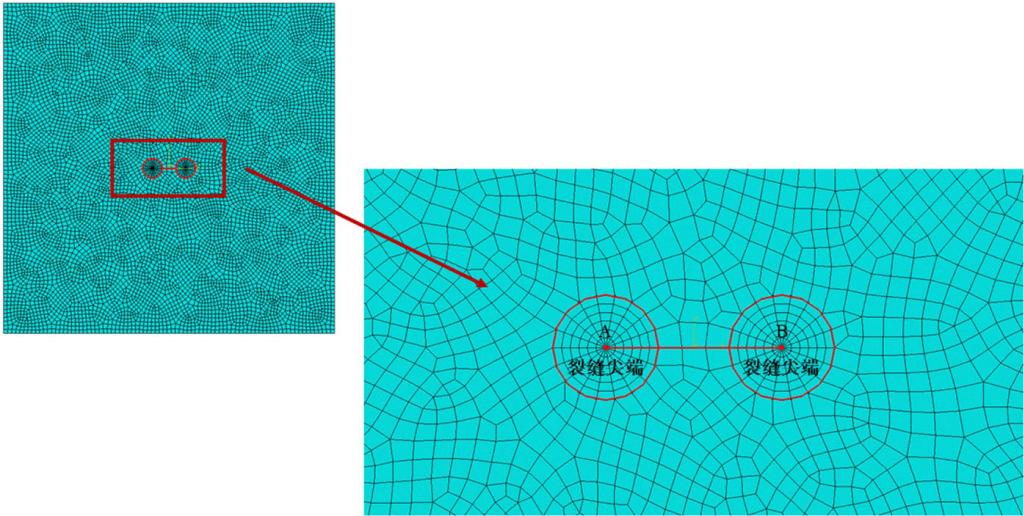


Figure 3. Plane stratigraphic grid division map
图 3. 平面地层网格划分图

Table 1. Formation rock and fracturing parameters
表 1. 地层岩石和压裂参数

输入参数	单位	值	输入参数	单位	值
弹性模型	GPa	15	初始孔隙比	/	0.1
抗拉强度	MPa	6	泊松比	/	0.25
岩石渗透率	m/s	1×10^{-7}	流体比重	/	9800
孔隙压力	MPa	0	孔隙比	/	0.1

模型假设：

在实际的水力压裂过程中，涉及到岩石的固体变形、裂缝中的液体流动、裂缝受岩石变形和流体流动产生的起裂和扩展方向的改变、流体在岩石基质的渗流作用导致的岩石孔隙压力的变化、诱导岩石应力场发生变化和人工裂缝和天然裂缝的交叉作用下导致裂缝方向和形态的改变。

除此之外,岩石的性质包括各向同性和各向异性两种性质。如果将所有的影响因素考虑到水力压裂裂缝扩展研究中去,分析的过程将会变得异常困难。为了准确描述水力压裂过程中裂缝尖端的应力强度因子变化规律,明晰压裂裂缝和扩展规律的影响,考虑模拟数据的合理性,对水力压裂模型做了下面假设:

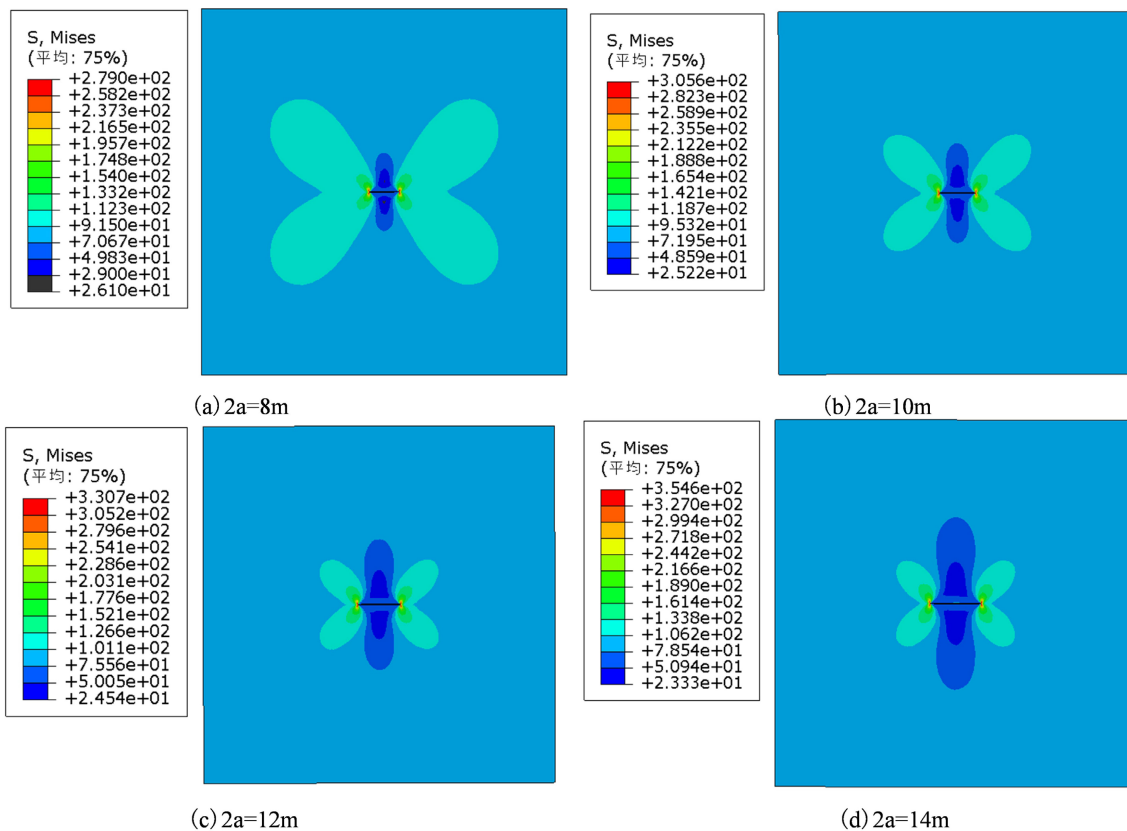
- (1) 地层中的岩石为各向同性和均质的;
- (2) 地层中的裂缝不随应力发生变形,变化为平面问题;
- (3) 不考虑地层和流体之间传热的影响;
- (4) 不考虑流体通过多孔介质时的加速效应和过度时间。

基于上述的假设条件,研究不同的裂缝形态以及裂缝数量对水力压裂裂缝尖端应力强度因子的影响,借助有限元软件建立水力压裂数值模型,通过围线积分求解模型。为了方便研究,本文将裂缝在三维的扩展转化为二维平面问题,在裂缝的高度上面不做深究。模拟水力压裂裂缝在储层中的扩展过程,总结裂缝的起裂和扩展规律。

4. 应力强度因子影响因素分析

4.1. 不同长度的水平单裂缝

在平面地层模型中心分别设置长度为 $2a=8\text{ m}$ 、 10 m 、 12 m 、 14 m 、 16 m 、 18 m 、 20 m 的水平裂缝,其应力分布云图如图 4 所示。在裂缝尖端区域,应力急剧上升,应力集中现象较为明显。随着裂缝长度的增加,裂缝尖端的应力增幅较大,缝中应力增幅较小,且缝尖附近的应力大小约为裂缝中心处应力大小的 4 倍。



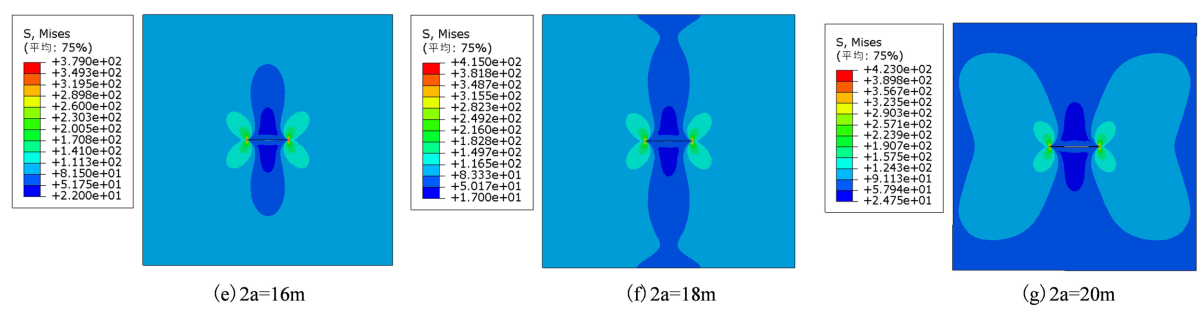


Figure 4. Stress distribution cloud map with different seam lengths
图 4. 不同缝长的应力分布云图

裂缝长度与裂缝尖端附近的最大应力以及应力强度因子关系如图 5 所示。随着裂缝长度的不断增加， K_I 值均匀增大。

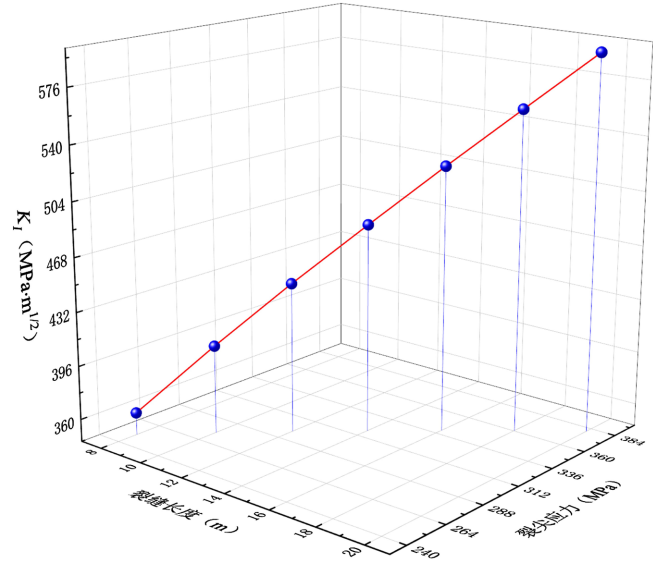


Figure 5. Distribution of stress intensity factors in cracks of different lengths
图 5. 不同长度的裂缝应力强度因子分布规律

根据《应力强度因子手册》[8]，针对水平裂缝 I 型裂缝尖端的应力强度因子，将有限元数值解与理论值解进行比较分析。如表 2 所示，有限元解与理论解误差低于 5.8%，有限元解无限接近理论解，故能够满足实际应用。

Table 2. Comparison of K_I finite element solution and theoretical solution
表 2. K_I 有限元解与理论解对比

裂缝长度(m)	有限元解(Mpa·m ^{1/2})	理论解(Mpa·m ^{1/2})	误差
8	359.9533	354.4908	1.50%
10	404.3843	396.3327	2.00%
12	445.8137	434.1608	2.60%
14	484.5913	468.9472	3.20%
16	522.5913	501.3257	4.10%
18	559.1627	531.7362	5.00%
20	595.1710	560.4991	5.80%

4.2. 不同倾角的斜向单裂缝

如图 8 所示, 在平面地层模型中建立长度为 8 m、14 m 和 20 m 的裂缝, 分别使其与水平方向呈 0° 、 15° 、 30° 、 45° 、 60° 、 75° 夹角, 分析初始裂缝角度对应力与应力强度因子的影响。其中, 三种缝长的模拟结果规律相同, 裂缝长度为 20 m 时的平面应力分布云图如图 6 所示。

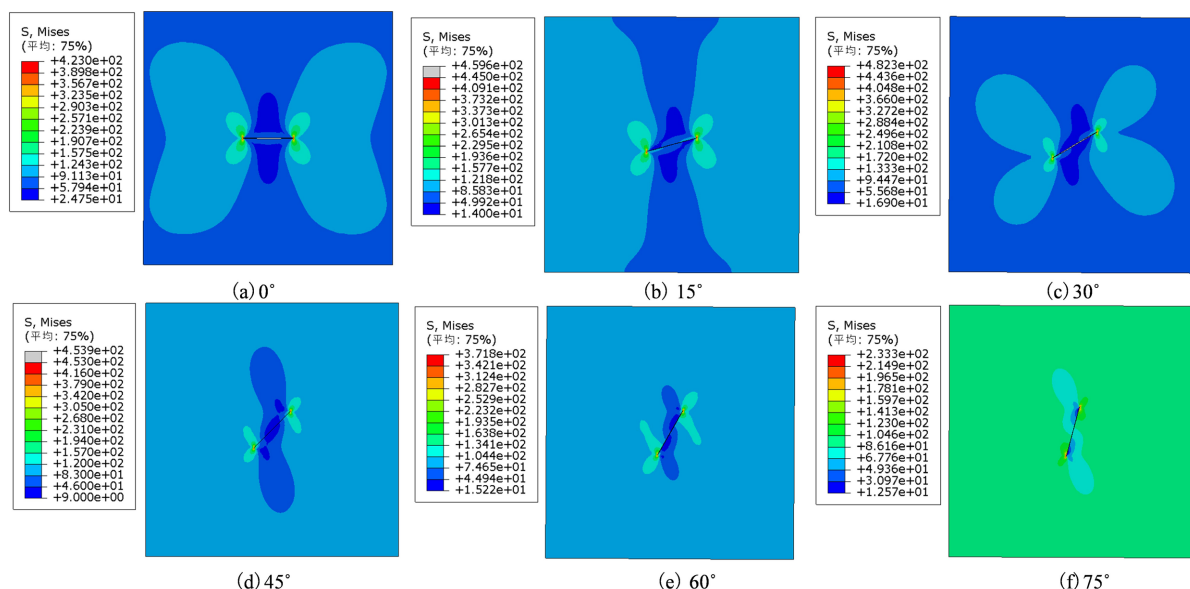


Figure 6. Stress distribution cloud map at different angles when $L = 20$ m

图 6. $L = 20$ m 时不同角度的应力分布云图

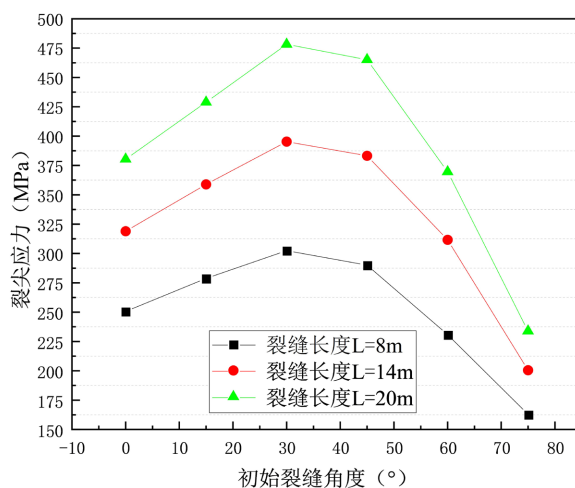


Figure 7. Stress distribution of cracks with different inclined angles

图 7. 不同倾斜角度裂缝的应力分布规律

由平面地层的应力分布云图图 6 分析可知, 裂缝在不同初始角度下的应力分布均呈中心对称, 两个裂缝尖端的应力分布情况完全相同。由图 7 分析可知, 裂缝尖端处的最大应力呈梯型分布。当初始裂缝角度在 0° 至 30° 区间内时, 裂尖应力稳步增大。当初始裂缝角度在 30° 至 75° 区间内时, 裂尖应力逐渐减小。同时, 对于同一初始裂缝角度但不同长度的水力裂缝, 裂缝越长, 裂缝尖端的应力越大。

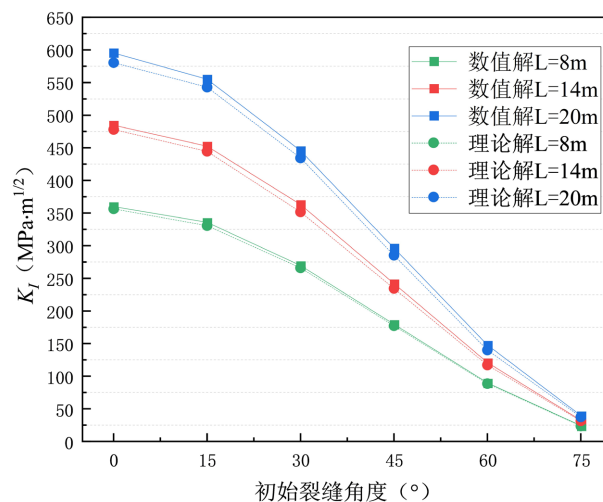


Figure 8. Stress intensity factor curves of different initial crack angles
图 8. 不同初始裂缝角度的应力强度因子变化曲线

如图 8 所示, 不同初始角度下的裂尖处的应力强度因子理论值曲线和有限元值曲线基本重合。随着初始裂缝角度不断增大, 裂缝尖端的 K 值不断减小。当水力裂缝初始角度为 0° 时 K 值最大, 即当裂缝呈水平状态时, 裂尖位置的应力强度因子要大于倾斜状态下裂缝尖端的应力强度因子。当裂缝存在初始倾斜角度时, 裂缝会因扩展而产生偏转角, 偏转角度与初始裂缝角度的关系变化如图 9 所示。当初始裂缝角度在 $0^\circ \sim 30^\circ$ 之间时, 裂缝偏转角度增幅较大, 大于 30° 后, 增幅逐渐变缓。在裂缝扩展及延伸过程中, 裂缝长度并不会影响缝尖的偏转角度。

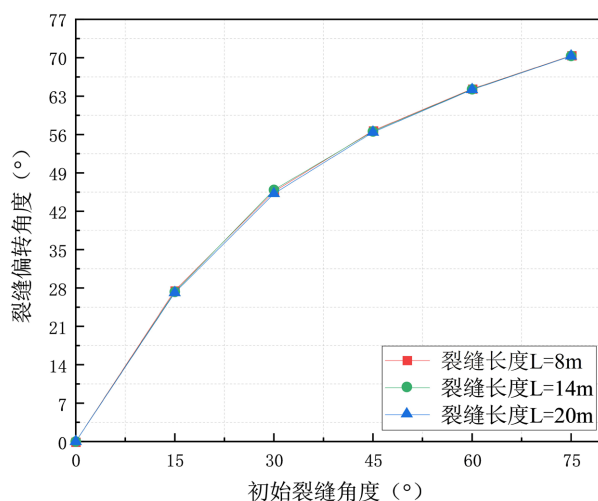


Figure 9. Fracture deflection angle change curve with different inclination angles
图 9. 不同倾角的裂缝偏转角度变化曲线

4.3. 不同水平间距的垂直同轴双裂缝

如图 10 所示, 在平面地层模型中分别建立两条长度为 8 m 的垂直平行的同轴裂缝, 分别使其缝间水平距离为 5 m、10 m、15 m、20 m、25 m、30 m。其中一个裂缝的两个尖端分别定义为 crack1 和 crack2。分析在不同裂缝间距下, 两端点的应力及应力强度因子变化规律。应力分布云图如图 11 所示, 两条裂缝

的四个尖端应力分布情况相同，呈均匀水平对称状态。此时，crack1 和 crack2 受裂缝相互作用的影响较小。

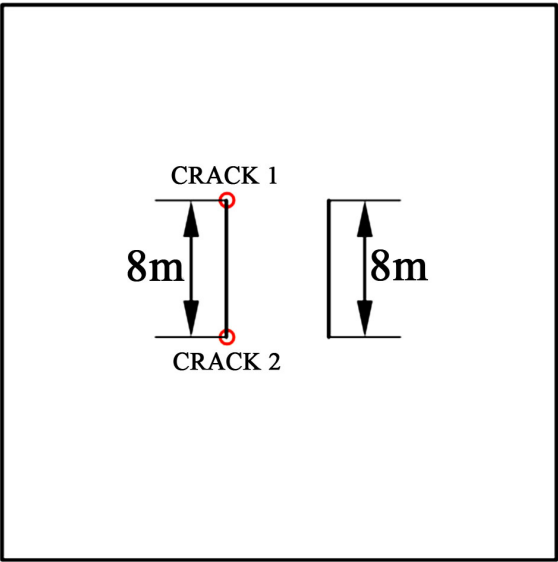


Figure 10. Plane formation model with vertical coaxial double fracture
图 10. 垂直同轴双裂缝的平面地层模型

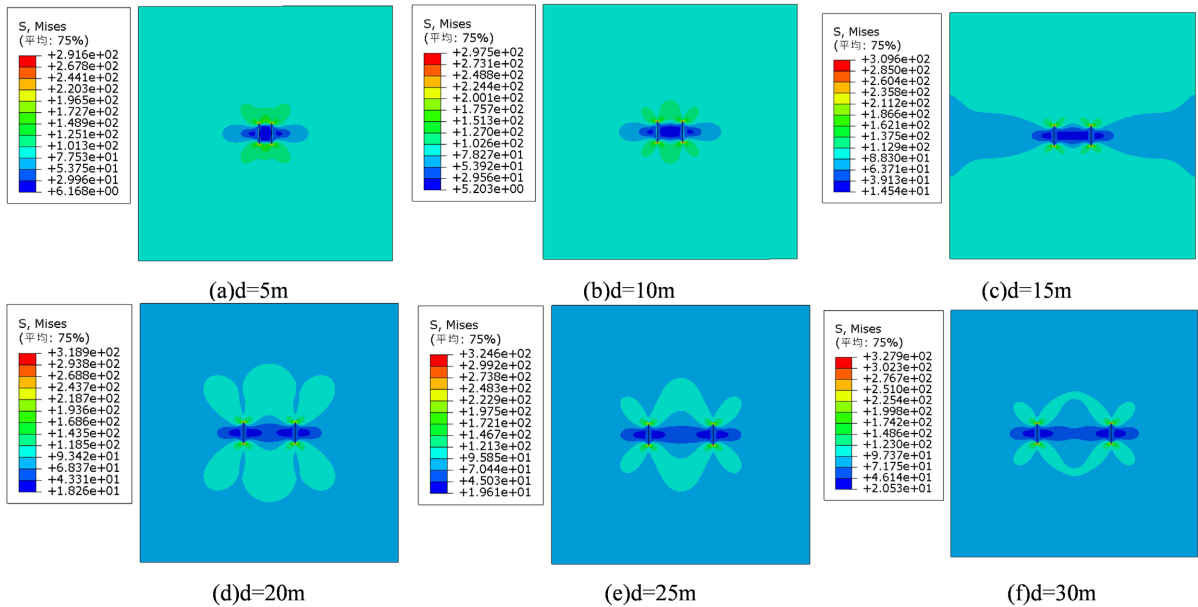


Figure 11. Nephogram of vertical coaxial double crack stress distribution with different spacing d
图 11. 不同间距 d 的垂直同轴双裂缝应力分布云图

当两条垂直裂缝在同一水平轴上时，两侧裂缝尖端 crack1 和 crack2 的应力大小走向保持一致，应力值大小随着两条裂缝间距的增大而不断增大，呈“S”型，最大尖端应力达 294.8 MPa，如图 12 所示。当双缝间距小于 20 m 时，应力强度因子大小呈指数级上升，当缝间距大于 20 m 时，变化较为平缓，如图 13 所示。

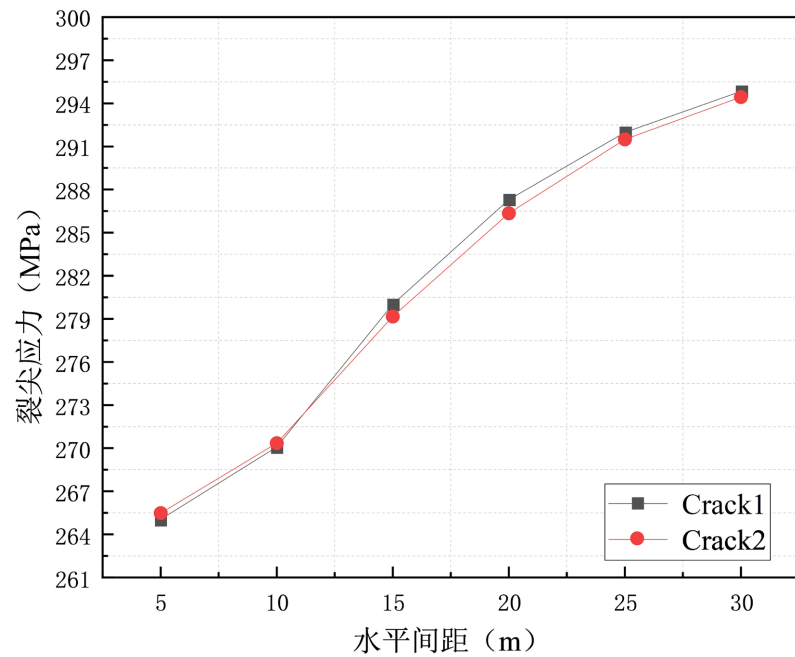


Figure 12. Stress change curve of coaxial crack tip with different spacing

图 12. 不同间距的同轴裂缝尖端应力变化曲线

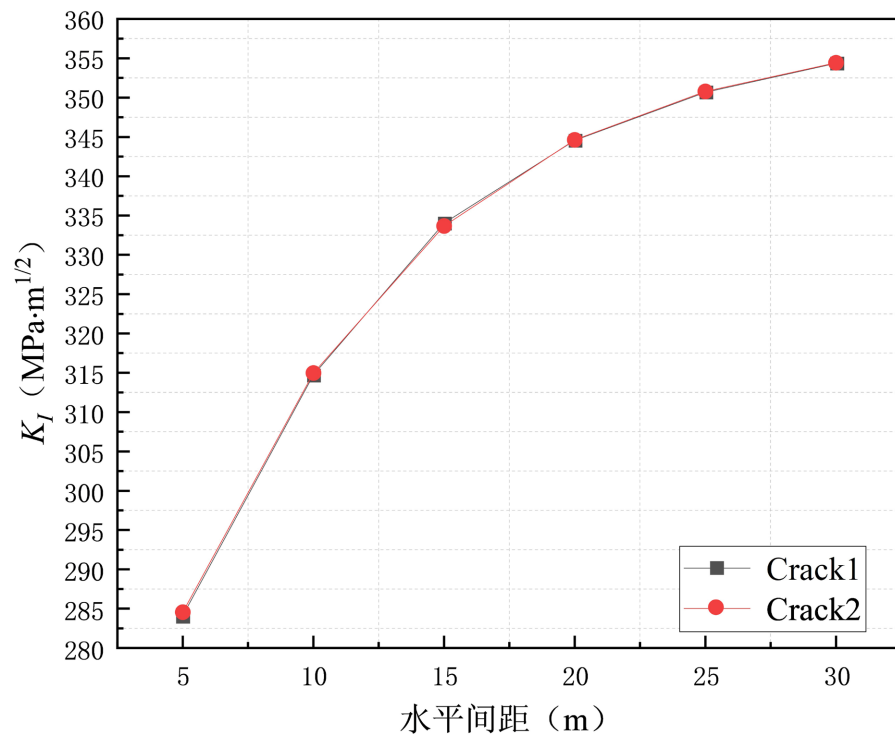


Figure 13. Change curve of stress intensity factor of coaxial crack tip with different spacing

图 13. 不同间距的同轴裂缝尖端应力强度因子变化曲线

当双缝之间的距离在 5~20 m 以内时, 裂缝尖端发生转向, 且偏转角度随着缝距的增加而越来越小。当缝间距大于 20 m 后, 裂缝尖端彻底停止偏转, 如图 14 所示。

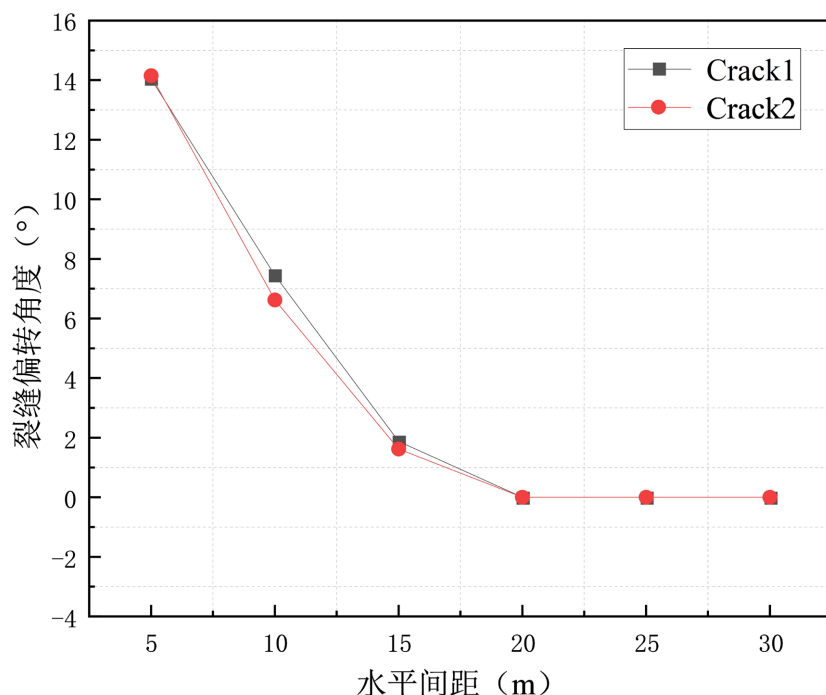


Figure 14. Variation curve of deflection angle of coaxial crack with different spacing

图 14. 不同间距的同轴裂缝偏转角度变化曲线

4.4. 不同水平间距的垂直异轴双裂缝

如图 15 所示, 在平面地层模型中分别建立两条长度为 8 m 的垂直异轴裂缝, 分别使其缝间水平距离为 5 m、10 m、15 m、20 m、25 m、30 m。其中一个裂缝的两个尖端分别定义为 crack1 和 crack2。分析在不同裂缝间距下, 两端点的应力及应力强度因子变化规律。应力分布云图如图 16 所示, 两条裂缝的四个尖端应力分布情况呈均匀中心对称状态。此时, crack1 受裂缝相互作用的影响较小, crack2 受裂缝相互作用的影响较大。

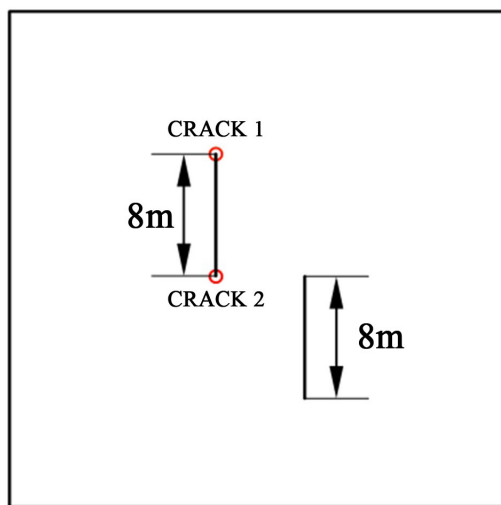


Figure 15. Plane formation model with vertical coaxial double fracture

图 15. 垂直同轴双裂缝的平面地层模型

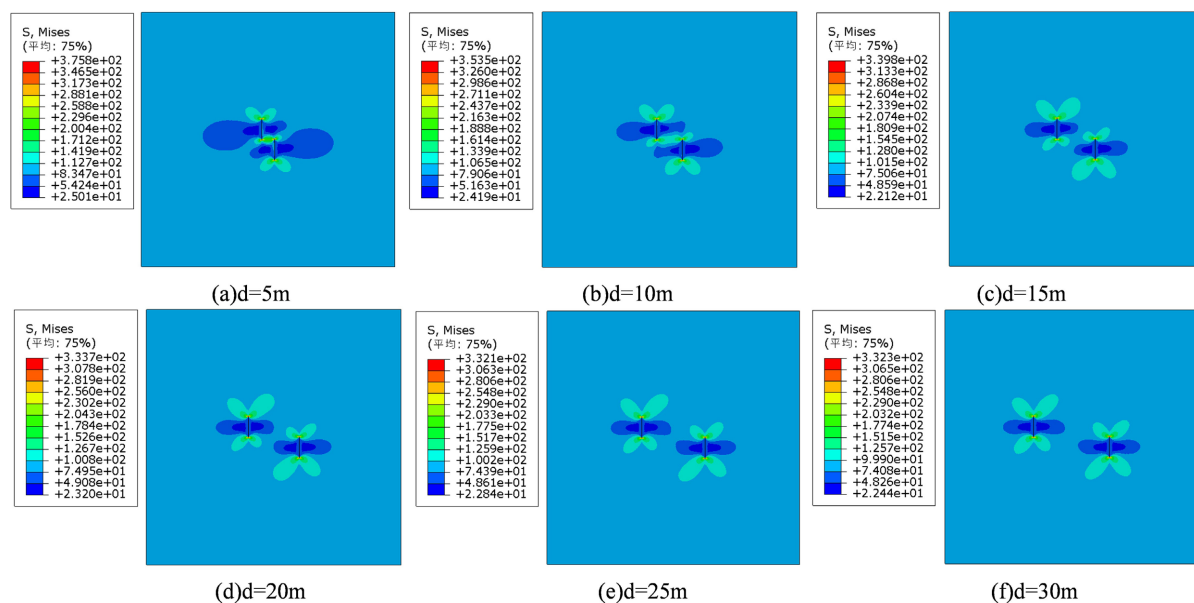


Figure 16. Stress distribution nephogram of double vertical fractures with different spacing d
图 16. 不同间距 d 的垂直异轴双裂缝应力分布云图

如图 17 所示, 当两条垂直裂缝未在同一水平轴上时, 两侧裂缝尖端 crack1 和 crack2 的应力大小走向保持一致, 应力值大小随着两条裂缝间距的增大而先减小再增大, crack1 的最大尖端应力值小于 crack2, 分别达 335.69 MPa 和 345.11 MPa。如图 18 所示, 相近的裂缝尖端因缝尖相互作用, 导致其应力强度因子的变化幅度大于较远的裂缝尖端。

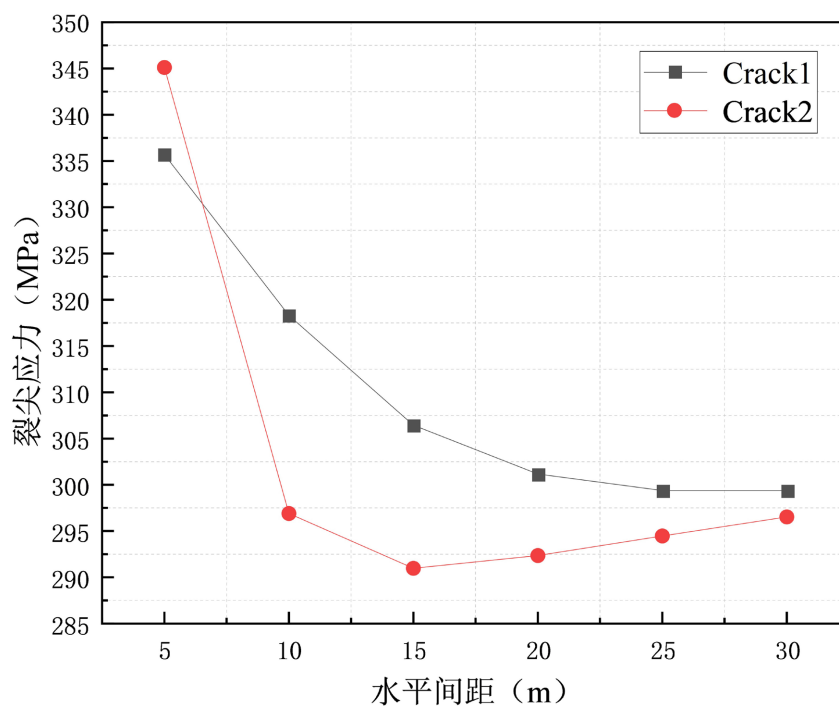


Figure 17. Stress change curve of different axial crack tip with different spacing
图 17. 不同间距的异轴裂缝尖端应力变化曲线

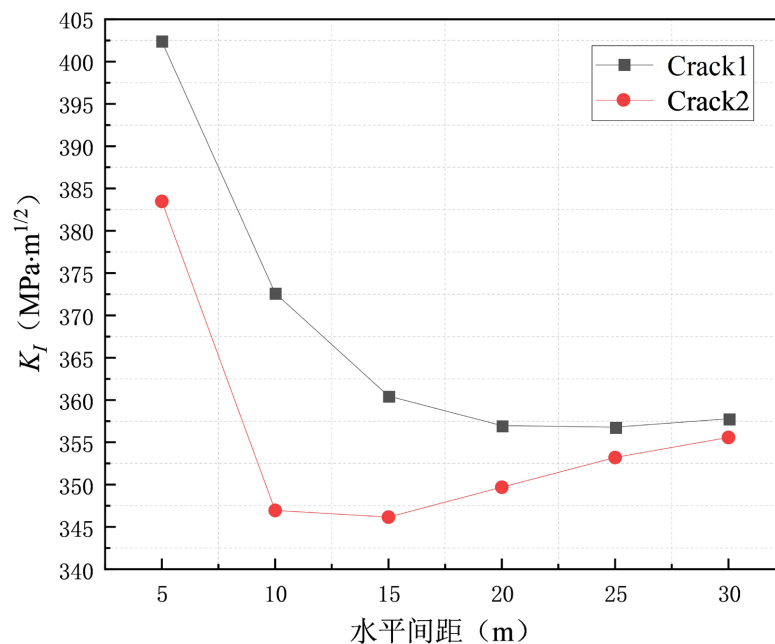


Figure 18. Change curve of stress intensity factor of different axial crack tip with different spacing
图 18. 不同间距的异轴裂缝尖端应力强度因子变化曲线

如图 19 所示, 对于 crack1 来说, 当缝间距在 5~10 m 以内时, 裂缝尖端发生转向, 且偏转角度随着缝距的增加而增大。当缝间距大于 10 m 时, 裂缝尖端偏转角度随着缝距的增加而越来越小。对于 crack2 来说, 当双缝之间的距离在 5~20 m 以内时, 裂缝发生转向, 且偏转角度随着缝距的增加而越来越小。25 m 以后, 两个裂缝尖端均彻底停止偏转。

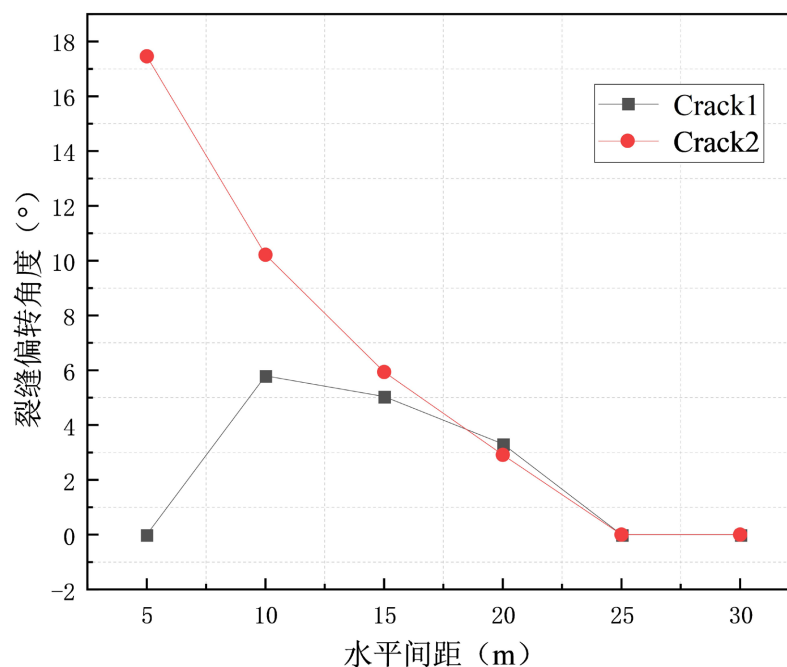


Figure 19. Deflection angle curve of different axial crack with different spacing
图 19. 不同间距的异轴裂缝偏转角度变化曲线

5. 结论

本文基于断裂准则,通过有限元软件对不同情况下的水力压裂裂缝尖端应力及应力强度因子进行研究分析,得出如下结论:

(1) 对于不同长度的水平单裂缝,裂缝尖端的应力及应力强度因子与裂缝长度呈正比关系,且缝尖附近的应力较为集中,远远大于裂缝中心处应力;

(2) 对于不同倾斜角度的单裂缝,裂缝尖端处的最大应力随着倾斜角度的增加呈梯型分布,应力强度因子不断减小。且裂缝越长,裂缝尖端的应力越大,当裂缝呈水平状态时,裂尖位置的应力强度因子要大于倾斜状态下裂缝尖端的应力强度因子;

(3) 裂缝尖端在应力强度因子的作用下,会造成裂缝改变其原有扩展方向。随着初始裂缝角度的不断增大,裂缝偏转角度会不断增大。当应力强度因子较大时,裂缝偏转角的角度变化较大,当应力强度因子较小时,裂缝偏转角的角度变化较小;

(4) 对于垂直同轴的双裂缝来说,两条裂缝的四个尖端应力分布情况相同,呈均匀水平对称状态,crack1 和 crack2 受裂缝相互作用的影响较小。应力值大小随着两条裂缝间距的增大而不断增大,呈“S”型。当双缝间距在 5~20 m 以内时,应力强度因子呈指数级上升,从而造成裂缝尖端发生转向;

(5) 对于垂直异轴的双裂缝来说,两条裂缝的四个尖端应力分布情况呈均匀中心对称状态。crack1 受裂缝相互作用的影响较小,crack2 受裂缝相互作用的影响较大,应力值大小均随着两条裂缝间距的增大而先减小再增大。相近的裂缝尖端因缝尖相互作用,导致其应力强度因子的变化幅度大于较远的裂缝尖端。但是此时 crack1 的偏转角度变化大于 crack2。

参考文献

- [1] 邵长跃, 潘鹏志, 赵德才, 等. 流量对水力压裂破裂压力和增压率的影响研究[J]. 岩土力学, 2020, 41(7): 2411-2421, 2484.
- [2] 董卓. 岩石水力裂缝起裂与扩展特性的理论及数值模拟研究[D]: [博士学位论文]. 大连: 大连理工大学, 2020.
- [3] 张亚洲, 钟红, 王立强. 位移外推法和扩展有限元法计算应力强度因子的比较[J]. 科学技术与工程, 2024, 24(5): 2045-2051.
- [4] 盛金昌, 赵坚, 速宝玉. 高水头作用下水工压力隧洞的水力劈裂分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(7): 1226-1230.
- [5] Fu, P., Johnson, S.M. and Carrigan, C.R. (2012) An Explicitly Coupled Hydro-Geomechanical Model for Simulating Hydraulic Fracturing in Arbitrary Discrete Fracture Networks. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **37**, 2278-2300. <https://doi.org/10.1002/nag.2135>
- [6] Irwin, G.R. (1957) Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, **24**, 361-364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>
- [7] Tada, H, Paris, P.C. and Irwin, G.R. (1973) *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. Del Research Corp.
- [8] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[S]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [9] 赵超能. 页岩储层水力压裂裂缝相互作用分析研究[J]. 石油化工应用, 2017, 36(1): 28-32.
- [10] 吴智敏, 董伟, 许青. 混凝土I-II复合型裂缝扩展准则及扩展全过程的数值模拟[J]. 水利学报, 2009, 40(2): 180-187.