

基于改进自适应协同滤波算法的混沌信号去噪

赵胜利^{1*}, 吕林黛^{1,2}, 沈心雨¹, 汪欣¹

¹重庆理工大学理学院, 重庆

²中国电信股份有限公司乐山分公司, 四川 乐山

收稿日期: 2024年7月15日; 录用日期: 2024年8月22日; 发布日期: 2024年8月29日

摘要

协同滤波去噪算法能充分利用混沌信号的自相似结构特征, 具有良好的去噪性能。本文针对传统的自适应协同滤波算法中相似块提取不灵活以及聚合重构过于简单等问题, 通过错位搜索的方法优化了相似块的提取, 并采用动态时间归整算法(DTW)对聚合重构部分进行了改进。仿真实验的结果表明, 在不同的噪声水平下, 本文提出的方法均优于传统的自适应协同滤波算法。相较于小波滤波、高斯滤波以及经验模态分解等去噪方法, 本文提出的方法在处理长期的混沌信号时具有更好的表现。

关键词

自适应协同滤波, 动态时间归整, 混沌信号

Chaotic Signal Denoising Based on Improved Adaptive Collaborative Filtering Algorithm

Shengli Zhao^{1*}, Lindai Lyu^{1,2}, Xinyu Shen¹, Xin Wang¹

¹School of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing

²Leshan Branch of China Telecom Co., Ltd., Leshan Sichuan

Received: Jul. 15th, 2024; accepted: Aug. 22nd, 2024; published: Aug. 29th, 2024

Abstract

The collaborative filter denoising algorithm can make full use of the self-similar structure characteristics of chaotic signals and has good performance. In this paper, for the problems of inflexible extraction of similar blocks and oversimplified aggregate reconstruction in the traditional adaptive collaborative filtering algorithm, the dislocation search method is used to optimize the extraction of similar blocks, and the Dynamic Time Warping (DTW) is used to improve the aggregation

*通讯作者。

文章引用: 赵胜利, 吕林黛, 沈心雨, 汪欣. 基于改进自适应协同滤波算法的混沌信号去噪[J]. 传感器技术与应用, 2024, 12(5): 691-701. DOI: 10.12677/jsta.2024.125075

reconstruction. The simulation results show that the proposed method is superior to the traditional adaptive collaborative filtering algorithm under different noise levels. Compared with wavelet denoising, Gaussian filtering and empirical mode decomposition, the proposed method has better performance in dealing with long-term chaotic signals.

Keywords

Adaptive Cooperative Filtering Algorithm, Dynamic Time Warping, Chaotic Signal

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来,混沌理论已被广泛应用于微弱信号检测[1]、图像加密[2]和保密通信[3]等领域。由于实测混沌信号通常受到噪声的影响,使得刻画混沌信号特征的不变系统参数难以计算[4]。有效抑制混沌信号中的噪声是对混沌信号进行分析与处理的前提。而传统的线性滤波和谱分析方法无法有效地抑制混沌信号中的噪声[5][6],因此,针对混沌信号的噪声抑制方法展开研究具有重要意义。

信息技术的迅猛发展极大地推动了数据处理及信号去噪技术在各个领域的广泛应用。协同滤波算法起源于图像处理领域,Buades 等人在 2005 年的研究中首次提出了非局部均值(NLM)滤波算法,通过对相似块的加权平均从而实现对图像的降噪,为图像去噪提供了新的思路[7]。该方法受块匹配三维滤波的启发[8],基于混沌信号具有无限嵌套形式的自相似结构,通过对观测信号进行分组、协同滤波和聚合处理来实现去噪。相对于其他方法,该方法充分利用了混沌信号的自相似结构特征,具有更高的信噪比提升功能,并逐渐被应用于混沌信号去噪中。

陈越等人在 2017 年的研究中将协同滤波算法应用于受污染混沌信号的噪声抑制中,展示了协同滤波算法在混沌信号去噪中的有效性[9]。2018 年,王梦蛟等人针对文献[9]中协同滤波去噪算法中的参数优化进行了研究,并提出了一种自适应的协同滤波算法,且取得了良好的效果[10]。文献[9]将混沌信号协同滤波去噪算法分为相似块分组、协同滤波和聚合重构三个步骤,并给出了相似块的定义以及计算方法,还给出了聚合重构的公式,但是对于相似块的选取没有进行优化,聚合重构的方法比较简单。基于此,本文提出了一种基于错位搜索和 DTW 方法的改进自适应协同滤波噪声抑制算法。

2. 改进的自适应协同滤波算法

2.1. 协同滤波算法

文献[9]首次将协同滤波算法用于混沌信号去噪并且提出混沌信号协同滤波去噪算法,算法包括三个步骤:相似块分组、协同滤波和聚合重构。

1) 相似块分组

设参考块为 R , 将任一块 S 与 R 的相似度通过它们之间的归一化距离进行量化,其中使用二范数来表示 $\|\cdot\|_2$,并以块的宽度为单位; d 代表相似块间的距离。当此距离 d 较小时,表明块 S 与参考块 R 之间的相似度较高,可表示为:

$$d(S, R) = \|S - R\|_2^2 / \omega \quad (1)$$

在设置搜索窗口长度为 l 的条件下, 以参考块 R 为中心, 寻找与之距离最小的 m 个块进行分组。这些选中的块被存储为 $m \times \omega$ 的二维数组形式。随着参考块 R 从观测信号的起始端逐步以 δ 为步长向终端移动, 搜索窗口也相应地移动。在每一个位置, 都会记录下形成的相似块组 $group(R)$, 并为分组内的每个块标注其具体位置。

2) 协同滤波

协同滤波算法的过程包括三个主要步骤。首先是对时域信号进行变换(比如离散余弦变换), 得到频域上的值; 其次, 给定阈值对频域值进行过滤, 最后将过滤之后的频域值通过逆变换转换为时域值, 从而达到滤波的效果。

在对混沌信号进行处理时, 在算法的初始阶段, 每个分组都会进行二维变换, 以获得变换系数矩阵 $G = [g_{i,j}] \in I^{m \times \omega}$ 。见公式(2):

$$G(R) = T \{group(R)\} \quad (2)$$

其中, $T[\cdot]$ 指的是二维离散余弦变换(DCT), $G(R)$ 为分组块对应在变换频域上的值。对频域上的值进行阈值化处理, 类似于高通滤波, 大于阈值的值被保留, 小于阈值的值被舍弃, 见公式(3):

$$H_T(g) = \begin{cases} g, & |g| > \lambda(R) \\ 0, & |g| \leq \lambda(R) \end{cases} \quad (3)$$

上述公式中的阈值是由文献[11]提出的 VisuShrink 方法所求得的, 其定义见公式(4):

$$\lambda(R) = \sigma \sqrt{2 \log(m \times \omega)} \quad (4)$$

其中, σ 代表观测信号中噪声的标准偏差, 该值是基于系数矩阵 $G(R)$ 的中位数绝对偏差来估算的。估算表达式见公式(5):

$$\hat{\sigma}(R) = median(G(R)/0.6745) \quad (5)$$

最后, 将得到的阈值化处理结果进行离散余弦变换的逆变换, 将信号从频域还原为到时域, 见公式(6):

$$group(R) = T^{-1} \{H_T(G(R))\} \quad (6)$$

其中, T^{-1} 表示离散余弦变换的逆变换。

3) 聚合重构

在聚合重构过程中, 考虑到相似块之间的重叠性, 一个特定的信号点往往会出现多个相似块中。该信号点的重构值是通过计算所有包含此点的相似块在该位置上的滤波输出的算术平均值来实现的, 见公式(7):

$$x(n) = \frac{\sum_R \sum_{S \in group(R)} F_S(n) x_{S,R}(n)}{\sum_R \sum_{S \in group(R)} F_S(n)} \quad (7)$$

其中, $x_{S,R}(n)$ 表示在信号点 n 处, 分组内相似块 S 的滤波输出结果, $F_S(n)$ 表示第 n 个信号点是否包含在 S 块中, 见公式(8):

$$F_S(n) = \begin{cases} 1, & n \in S \\ 0, & n \notin S \end{cases} \quad (8)$$

2.2. 改进的自适应协同滤波算法

本文在文献[9]的基础上,设计了一种错位搜索的方法来优化相似块的选取,并采用 DTW 方法对聚合重构方法进行改进。改进后的自适应协同滤波流程图如图 1 所示。

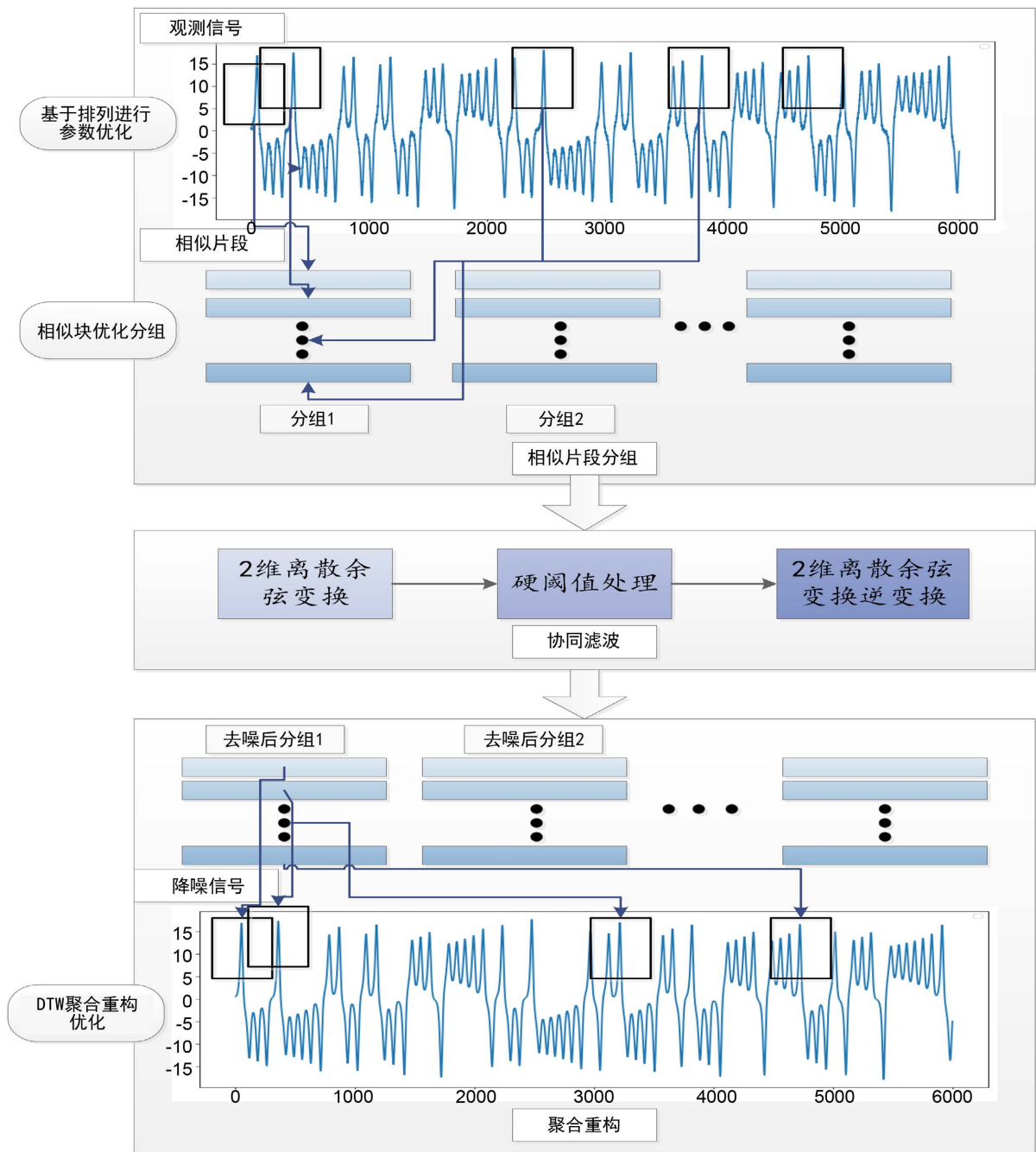


Figure 1. Flowchart of improved adaptive collaborative filtering algorithm
图 1. 改进的自适应协同滤波算法流程图

1) 基于排列熵的参数优化

文献[10]通过引入排列熵,对协同滤波中的参数进行优化,效果显著。本文也采用排列熵的方法,对

协同滤波中的参数进行优化。排列熵(PE)是一种评估混沌信号复杂度的有效工具。混沌信号的复杂度越高,其 PE 值亦随之增大;相反,具有较低复杂度的混沌信号,其 PE 值也相对较低。当混沌信号遭受噪声干扰时,其复杂度会提升,并且随着噪声水平的提高,复杂度也会相应增加。表 1 展示了原始信号与在不同噪声水平下的预测误差 PE 情况。

Table 1. Alignment entropy performance of Lorenz and Chen chaotic signals at different noise levels

表 1. Lorenz 和 Chen 混沌信号在不同噪声水平下的排列熵值表现

信噪比(dB)	30	25	20	15	纯混沌信号
PE (Lorenz 系统)	0.7189	0.8679	0.9548	0.9896	0.2177
PE (Chen 系统)	0.4629	0.6241	0.7970	0.9198	0.2607

表 1 中分别给出了 Lorenz 系统和 Chen 系统生成的模拟混沌信号在不同信噪比条件下的 PE 值。随着噪声水平的增高,含噪混沌信号的复杂度也会相应上升。

2) 基于错位搜索方法的相似块优化

在信号处理的众多应用场景中,如滤波和小波变换等传统技术已被广泛采用以提高信号品质。这些建立在信号频率属性基础上的方法,有效地增强了信号的可解读性和信息精度。本文提出一种基于错位搜索方法的相似数据块匹配及调整的信号处理策略,通过识别并精确调整信号中的相似数据块,提高去噪的效果。

通过错位搜索对相似块进行微小的位置调整,我们可以进一步提高相似度,从而更有效地去除噪声、进行信号压缩或修复图像,其流程图如图 2 所示。



Figure 2. Flowchart of optimal grouping for similar blocks

图 2. 相似块分组优化流程图

首先将接收到的信号分割成若干个预定尺寸的块,其中块的大小基于最佳块宽度进行调整。针对信号内的每一块,本研究计算其与其他所有块的相似程度。基于所得到的相似度,本研究为每个目标块挑选出最为相近的若干块。此环节可能需设置特定阈值或按相似度高低选择若干块作为最匹配块,依据文献[10]的方法,本文选取了前 30 个最为相似的块。

对每一选中的相似块,确定其位置调整的可能范围,该范围既可以是预设固定值,亦可依据块的具体特性进行动态设定。位置优化调整旨在通过细微位移寻找更佳的匹配点,进而提升块间的相似度水平。在规定的调整范围内,对每个相似块的位置进行精细调整。此过程通常包括在目标块周边的有限区域内对相似块进行位移,并在每次位移后重新评估其与目标块的相似度。对于每一次的位置调整,均需计算调整后的块与目标块间的相似度,并通过比较不同调整位置的相似度,选出相似度最高的位置作为相似块的最终位置。如图 3 所示,某些相似块选择上虽然形状相似但是首位差别大互相错开,因此经过优化调整后相似程度得到较大提升。

3) 基于 DTW 的聚合重构优化

在信号重建的应用场景中,DTW 主要被用来优化信号片段间的过渡效果。它通过寻找两个信号片段之间的最优对齐路径,能够生成平滑且自然的过渡效果,进而提升重建信号的整体质量。如图 4 所示,序列 A 中的节点 i 可能并不与序列 B 中的任何节点直接对应,这种情况下的误差可能会显著影响到时间

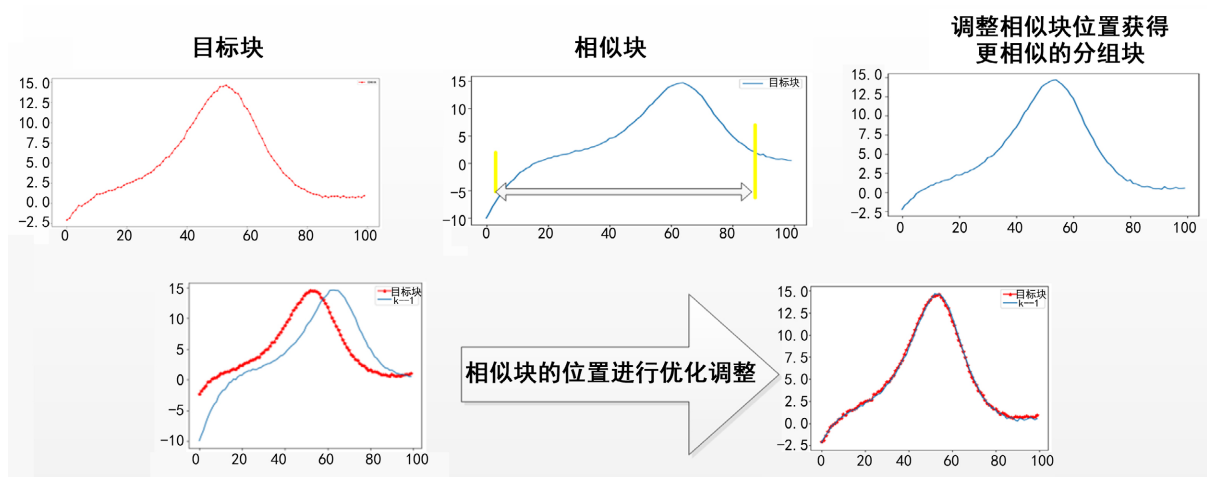


Figure 3. Schematic diagram of optimal grouping for similar blocks
图 3. 相似块优化分组示意图

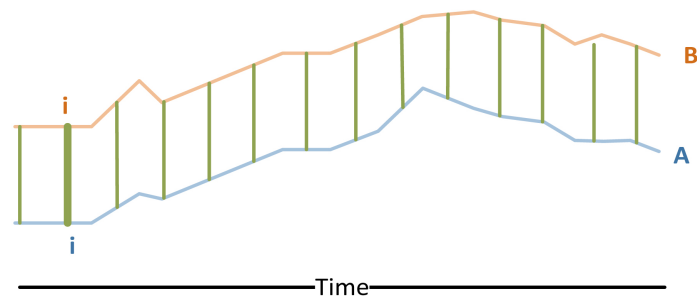


Figure 4. Corresponding diagram of two time series
图 4. 两时间序列对应图

序列相似度的准确评估。

与传统的欧几里得距离方法不同, DTW 通过在时间轴上对时间序列进行伸缩调整, 以寻求两个序列之间的最佳匹配点, 这一特性使得 DTW 尤其适合于处理那些在长度、速度或时间节点上有所差异的时间序列数据。动态时间规整简介 DTW 是一种算法(图 5), 用于测量两个时间序列之间的相似度, 与传统的欧几里得距离不同, DTW 能够考虑到时间序列的形状和模式, 即使两个序列在时间轴上有所偏移[12]。这使得 DTW 成为处理时间序列数据, 特别是在信号重建领域的一个强大工具。

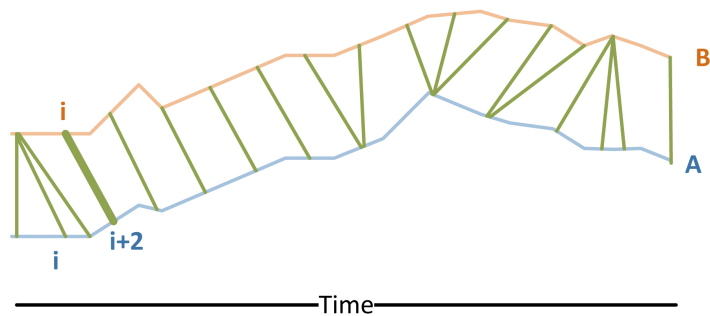


Figure 5. Schematic diagram of DTW dynamic warping sequence node matching
图 5. DTW 动态规整序列节点匹配示意图

3. 仿真实验

3.1. 滤波参数优化

滤波参数的选择受到信号特性、采样频率和噪声水平的影响。为了验证所提出方法的有效性, 本研究应用该方法在不同信号特性、采样频率和噪声水平的条件下进行滤波参数的选取。为了便于分析, 本文还对排列熵与窗口大小之间的关系以及去噪效能与窗口大小之间的关系进行了图形化展示。此外, 采用均方误差(MSE)作为评估去噪效能的标准, 即通过对比观测信号与经过滤波处理后的信号之间的差异进行评价。

1) 不同信号特征

考虑到不同混沌信号频谱宽度的异质性, 选择适当的块宽度需依据各类混沌信号的特征进行调整。本文以 Lorenz 混沌信号和 Chen 混沌信号为研究对象, 进行了详细分析。相较于 Lorenz 信号, Chen 信号展现了更广泛的频谱范围。在 Lorenz 和 Chen 信号上分别施加零均值高斯白噪声, 其中信噪比设定为 10 db, 采样周期设定为 0.01 s。通过应用不同宽度的滤波块对这两种带噪声的混沌信号进行降噪处理, 并对处理后的信号进行排列熵计算。如图 6 所示, 降噪后信号的排列熵反映了滤波块宽度对降噪性能的影响。在特定的采样频率和噪声水平下, 理想的滤波块宽度对于 Lorenz 信号和 Chen 信号分别约为 110 和 60, 这与先前的分析结果一致。

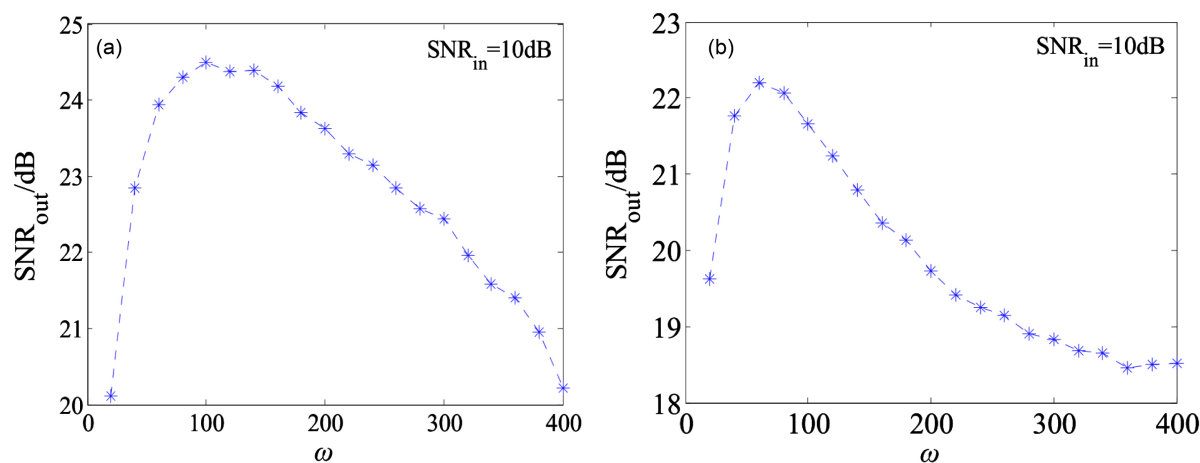


Figure 6. Denoising effect of Lorenz chaotic signal and Chen chaotic signal with different block widths: (a) Denoising effect of Chen chaotic signal with different block widths; (b) Denoising effect of Lorenz chaotic signal with different block widths

图 6. Lorenz 混沌信号和 Chen 混沌信号不同块宽的去噪效果: (a) Lorenz 混沌信号不同块宽去噪效果; (b) Chen 混沌信号不同块宽去噪效果

2) 不同采样频率

在较高的采样频率下, 混沌信号的协同滤波去噪方法展现出更优的去噪效能, 并且对于不同采样频率, 所需的最佳滤波块尺寸也存在差异。通过将采样时间(t)设定为 0.02、0.01、0.0075、0.005 秒, 生成 Lorenz 信号, 并向其添加零均值的高斯白噪声, 其中信噪比固定为 10 分贝。然后, 采用各种宽度的滤波块对在不同采样频率下的含噪信号执行去噪操作。正如图 7 与表 2 展现的, 随着采样频率的升高, 降噪性能逐渐提升, 与此同时, 最优的滤波块宽度也相应增大。

3.2. 错位搜索分组优化

以 Lorenz 混沌信号为研究对象, 通过向 Lorenz 信号中添加零均值的高斯白噪声, 并设置信噪比为

Table 2. Results table of optimal block widths for different sampling frequencies
表 2. 不同采样频率下的最优块宽结果表

采样时间 t	0.02	0.01	0.0075	0.005
最优块宽	60	110	140	160

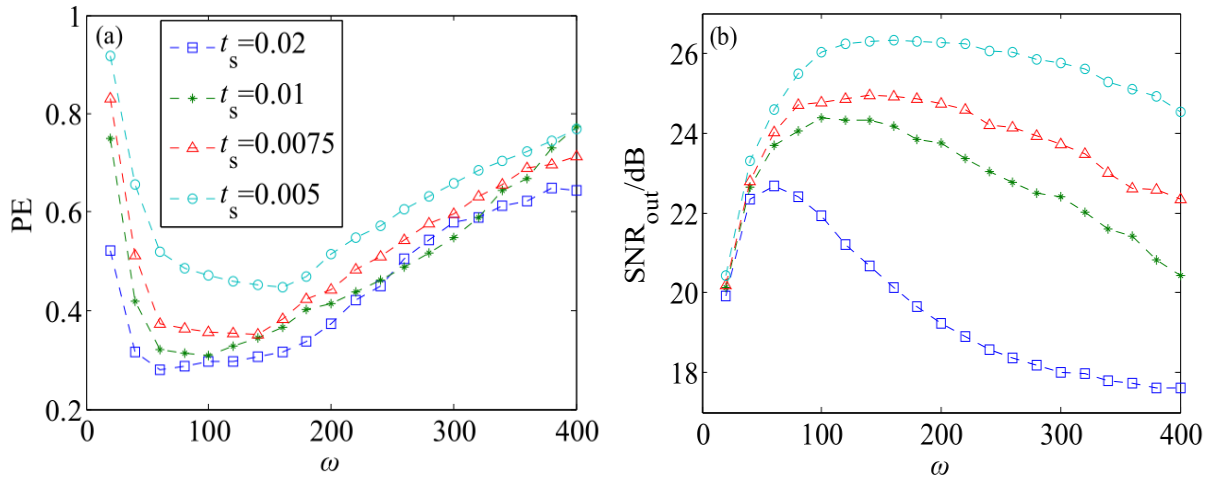


Figure 7. Effect of sampling frequency on block width: (a) PE for different sampling frequencies; (b) Denoising effect at different sampling frequencies

图 7. 采样频率对块宽的影响: (a) 不同采样频率对应的 PE; (b) 不同采样频率的去噪效果

10 分贝, 采样时间为 0.01 秒。基于排列熵算法确定的最佳块宽度作为参数, 对相似块进行匹配。本研究分别采用了错位搜索相似块算法和未经优化的相似块匹配算法进行比较分析, 其结果展示如图 8 和表 3 所示。

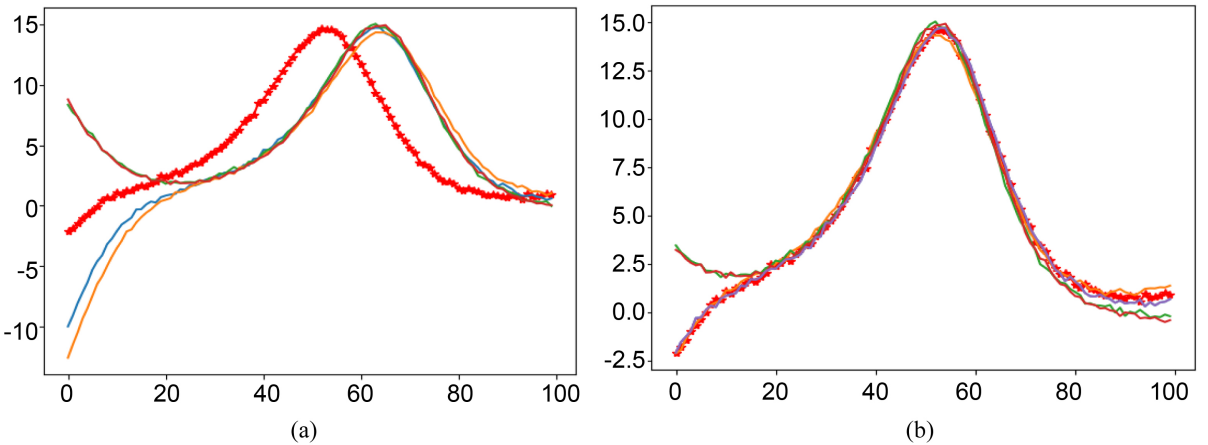


Figure 8. Comparison diagrams of optimal grouping for similar blocks for dislocation search: (a) Without optimal grouping for similar blocks; (b) With optimal grouping for similar blocks

图 8. 错位搜索相似块优化分组对比图: (a) 未经过相似块优化分组; (b) 与经过相似块优化分组

通过对比上述结果的图表和数据, 可以明显观察到, 采用错位搜索相似块算法优化后的自适应协同滤波算法在去噪性能上有了显著提高。进一步地, 在不同频率条件下的对比分析表明, 经过错位搜索相似块算法处理后的协同滤波去噪效能显著增强, 具体对比结果如表 4 所示。

Table 3. Comparison table of the denoising effects of the dislocation search similar block algorithm**表 3.** 错位搜索相似块算法的去噪效果对比表

	MSE	RMSE	R ²
错位搜索相似块算法	0.0678	0.2605	0.9989
一般相似块算法	0.1232	0.3510	0.9980

Table 4. Comparison of denoising effects of adaptive collaborative filtering algorithm at different sampling frequencies (SNR = 10 dB)**表 4.** 不同采样频率下的自适应协同滤波算法去噪效果比较(SNR = 10 dB)

指标	采样时间 t	0.02	0.01	0.0075	0.005
MSE	错位搜索相似块算法	0.8573	0.0678	0.0565	0.0401
	一般相似块算法	0.2634	0.1232	0.1185	0.1028
R ²	错位搜索相似块算法	0.9981	0.9989	0.9991	0.9995
	一般相似块算法	0.9963	0.9980	0.9982	0.9987

3.3. DTW 聚合重构优化

以 Lorenz 混沌信号为例，给 Lorenz 信号加上零均值高斯白噪声，信噪比取 10 dB，采样时间取 0.01 s，运用不同的聚合重构方法进行仿真实验，试验结果如表 5 所示。

Table 5. Comparison table of the results of aggregation and reconstruction by different methods**表 5.** 不同方法聚合重构结果对比表

聚合重构方法	MSE	RMSE	R ²
DTW	0.0684	0.2615	0.9989
直接平均	0.4349	0.6594	0.9930
相似度加权平均	0.2981	0.5459	0.9952
相似度平方加强平均	0.4924	0.7017	0.9921
相似度开方加权	0.3808	0.6172	0.9937

根据上表所示，通过 DTW 聚合重构方法相较于传统的直接平均聚合重构方法，在精度上实现了显著提高，并且与其他方法相比展现出了明显的优越性。此次仿真实验验证了该方法的实用性和优势所在。

3.4. 改进的协同滤波效果

1) 不同信号特性下与滤波效果的对比分析

为全面评价该方法的性能，我们将其与传统的协同滤波去噪技术进行了比较。选取洛伦兹混沌系统作为信号源，对系统产生的信号分别加入了三种不同水平的高斯白噪声，分别为低、中、高三个噪声等级，通过信噪比(SNR)分别设置为 30 dB、20 dB 和 10 dB 来模拟不同的噪声条件。

首先，通过数值方法生成混沌系统的时间序列数据，对每个生成的混沌信号，通过加入不同强度的高斯白噪声来模拟不同的噪声环境，噪声强度通过调整噪声的方差来控制。实施了两种去噪策略，一种是采用新提出的优化策略，首先利用和谐相似块法识别信号中的相似块，随后通过 DTW 重构技术对这些块进行优化重构；另一种则是作为对照的传统协同滤波去噪方法。结果见表 6。

Table 6. Comparison of denoising effects at different noise levels
表 6. 不同噪声水平下去噪效果的比较

	MSE		R ²	
	改进的自适应协同滤波算法	传统协同滤波算法	改进的自适应协同滤波算法	传统协同滤波算法
高噪声水晶(10 dB)	0.0678	3.8193	0.9989	0.9389
中噪声水晶(20 dB)	0.0907	3.1321	0.9985	0.9499
低噪声水晶(30 dB)	0.1291	2.1232	0.9976	0.9503

2) 与其他去噪方法的比较分析

除了与传统的协同滤波进行比较以外，还与几种常用的去噪技术，包括小波去噪、高斯滤波和经验模态分解(EMD)去噪方法进行了比较。为全面评估各去噪技术的表现，我们采用了三个主要评价指标：决定系数(R²)、均方误差(MSE)和均方根误差(RMSE)。实验结果如表 7 所示。

Table 7. Comparative analysis results table with other denoising methods
表 7. 与其他去噪方法的比较分析结果表

信号点个数	方法	MSE	RMSE	R ²
20,000	改进的自适应协同滤波	0.0684	0.2615	0.9989
	高斯滤波	0.0127	0.1128	0.9997
	经验模态分解	1.7250	1.3134	0.9722
	小波滤波	0.0098	0.0993	0.9998
200,000	改进的自适应协同滤波	0.0412	0.2031	0.9993
	高斯滤波	0.0108	0.1040	0.9998
	经验模态分解	0.1619	0.4024	0.9974
	小波滤波	0.0100	0.1001	0.9998
500,000	改进的自适应协同滤波	0.0198	0.1409	0.9996
	高斯滤波	0.0109	0.1045	0.9998
	经验模态分解	0.0397	0.1994	0.9993
	小波滤波	0.0099	0.0998	0.9998

从对比的结果来看，随着信号点个数的增加，本文提出的改进自适应协同滤波方法的去噪效果有明显的提升，并且比经验模态分解方法更好，比高斯滤波和小波滤波方法稍差。但是应该注意到，协同滤波算法的原理比较简单，计算量相对比较小，在滤波精度要求不太高的条件下，具有广泛的应用场景。总体而言，混沌信号的长度越长，自适应协同滤波算法的去噪效果越显著，并且随着信号长度的增加，去噪效果呈现出明显的提升趋势。这些发现不仅为混沌信号去噪领域提供了新的研究视角，也为未来的研究方向和应用实践指明了方向。

4. 结论

本文通过引进错位搜索与动态时间归整算法对自适应协同滤波进行了改进，得到了一种改进的自适应协同滤波算法。仿真实验的结果表明，在不同的噪声水平下，本文提出的方法优于一般的自适应协同

滤波算法。在处理长期的混沌信号时, 本文提出的方法具有良好的表现。在低噪声背景下, 本文提出的优化策略与传统协同滤波技术在降噪效果上的差异并不明显。然而, 随着噪声水平的提升, 该策略展现出更优异的性能。尤其是在中到高噪声水平下, 采用该优化策略的均方误差(MSE)更低, 降噪效果得到了显著提升。该策略在高噪声条件下取得更佳性能的关键, 主要得益于和谐相似块算法在寻找信号相似块方面的高效率, 以及动态时间弯曲(DTW)重构技术在优化信号结构时所表现出的灵活性与精确度。这种方法的结合不仅增强了降噪过程的准确性, 也提高了对高噪声信号处理的适应能力, 使其在高噪声环境中表现出显著的性能优势。

基金项目

重庆市教育委员会科学技术研究项目(项目编号: KJQN202101125)、重庆理工大学研究生教育高质量发展项目(项目编号: gzlal202301)。

参考文献

- [1] 王庆飞. 混沌信号检测及其应用[J]. 今日科苑, 2007(16): 189-190.
- [2] Peng, G. and Min, F. (2017) Multistability Analysis, Circuit Implementations and Application in Image Encryption of a Novel Memristive Chaotic Circuit. *Nonlinear Dynamics*, **90**, 1607-1625. <https://doi.org/10.1007/s11071-017-3752-2>
- [3] Sun, J., Shen, Y., Yin, Q. and Xu, C. (2013) Compound Synchronization of Four Memristor Chaotic Oscillator Systems and Secure Communication. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **23**, Article ID: 013140. <https://doi.org/10.1063/1.4794794>
- [4] Urbanowicz, K. and Holyst, J.A. (2003) Noise-Level Estimation of Time Series Using Coarse-Grained Entropy. *Physical Review E*, **67**, Article ID: 046218. <https://doi.org/10.1103/physreve.67.046218>
- [5] Feng, J., Zhang, Q. and Wang, W. (2012) Chaos of Several Typical Asymmetric Systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **45**, 950-958. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2012.02.022>
- [6] Broggi, G., Derighetti, B., Ravani, M. and Badii, R. (1989) Characterization of Chaotic Systems at Transition Points through Dimension Spectra. *Physical Review A*, **39**, 434-437. <https://doi.org/10.1103/physreva.39.434>
- [7] Buades, A., Coll, B. and Morel, J.M. (2005) A Review of Image Denoising Algorithms, with a New One. *Multiscale Modeling & Simulation*, **4**, 490-530. <https://doi.org/10.1137/040616024>
- [8] Dabov, K., Foi, A., Katkovnik, V. and Egiazarian, K. (2007) Image Denoising by Sparse 3-D Transform-Domain Collaborative Filtering. *IEEE Transactions on Image Processing*, **16**, 2080-2095. <https://doi.org/10.1109/tip.2007.901238>
- [9] 陈越, 刘雄英, 吴中堂, 等. 受污染混沌信号的协同滤波降噪[J]. 物理学报, 2017, 66(22): 284-290.
- [10] 王梦蛟, 周泽权, 李志军, 等. 混沌信号自适应协同滤波去噪[J]. 物理学报, 2018, 67(6): 46-53.
- [11] Devaney, R. (1989) *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley.
- [12] 宁爱平. 混沌背景下弱信号检测方法的研究[D]: [硕士学位论文]. 太原: 太原理工大学, 2006.