

熵模型在河流监测感知中的研究应用进展

林 昊^{1,2}, 黄冰玺³, 栾华龙^{1,2*}, 渠 庚^{1,2}, 陈羿名^{1,2}, 余小龙³

¹长江科学院河流研究所, 湖北 武汉

²水利部长江重点实验室, 湖北 武汉

³河海大学水利水电学院, 江苏 南京

收稿日期: 2026年2月7日; 录用日期: 2026年4月29日; 发布日期: 2026年6月29日

摘 要

河流监测感知在水资源管理、防洪减灾及生态环境保护等领域具有重要意义。随着现代测量技术的发展, 河流动态数据的获取能力显著提升, 如何充分利用这些数据以实现河流系统的立体感知, 仍然是数字孪生流域构建中的关键挑战之一。近年来, 熵模型在河流监测感知方面得到了广泛应用, 但尚缺乏系统的梳理总结。本文通过梳理熵模型的理论基础, 分析国内外的研究案例, 综述了熵模型在河流监测感知中的研究和应用进展, 包括熵模型在河流流场监测感知、河道地形反演重构、河流水沙分析等方面。研究表明, 综合运用熵模型技术可实现地形、流速场和生态特性等要素的动态监测感知, 模拟精度较好。基于现有研究, 提出未来可进一步强化参数自适应性, 推动其与无人机、高分辨率遥感、人工智能等技术深度融合, 拓展熵模型在复杂场景下的应用, 丰富多元融合数据感知, 为智慧水利和流域治理提供理论支持与技术支持。

关键词

熵模型, 数字孪生, 监测感知, 流场重构, 地形反演, 水沙分析

Review on Advances in Entropy Models for River Monitoring and Sensing

Hao Lin^{1,2}, Bingxi Huang³, Hualong Luan^{1,2*}, Geng Qu^{1,2}, Yiming Chen^{1,2}, Xiaolong Yu³

¹River Research Department of Changjiang River Scientific Research Institute, Wuhan Hubei

²Key Laboratory of Changjiang River of Ministry of Water Resources, Wuhan Hubei

³College of Water Conservancy and Hydropower Engineering of Hohai University, Nanjing Jiangsu

Received: February 7, 2026; accepted: April 29, 2026; published: June 29, 2026

Abstract

River monitoring and sensing are of great significance in the fields of water resource management, flood

作者简介: 栾华龙(1988-), 男, 湖北云梦人, 高级工程师, 博士, 主要从事河湖演变与治理相关研究工作。

*通讯作者 Email: luanhualong@126.com

文章引用: 林昊, 黄冰玺, 栾华龙, 渠庚, 陈羿名, 余小龙. 熵模型在河流监测感知中的研究应用进展[J]. 水资源研究, 2026, 15(3): 222-229. DOI: [10.12677/jwrr.2026.153026](https://doi.org/10.12677/jwrr.2026.153026)

control and disaster mitigation, as well as ecological environment protection. With the development of modern measurement technology, the ability to acquire dynamic data of rivers has been significantly improved. However, how to fully utilize these data to achieve three-dimensional perception of river systems remains one of the key challenges in the construction of digital twin basins. In recent years, entropy models have been widely applied in river monitoring and perception, but there is still a lack of systematic review and summary. This paper reviews the theoretical basis of entropy models, and comprehensively analyzes research cases at home and abroad, and summarizes the research and application progress of entropy models in river monitoring and perception, including entropy models in river flow field monitoring and perception, channel terrain inversion and reconstruction, river water and sediment analysis. The research shows that the comprehensive application of entropy model technology can achieve dynamic monitoring and perception of terrain, flow velocity field, and ecological characteristics, with good simulation accuracy. Based on existing research, it is proposed that in the future, parameter adaptability can be further enhanced, and its deep integration with technologies such as drones, high-resolution remote sensing, and artificial intelligence can be promoted. This will expand the application of entropy models in complex scenarios, and enrich multi-source fusion data perception, and provide theoretical and technical support for smart water conservancy and basin management.

Keywords

Entropy Model, Digital Twin, River Monitoring, Flow Field Reconstruction, Bathymetry Inversion, River Flow and Sediment Analysis

Copyright © 2026 by author(s) and Wuhan University & Bureau of Hydrology, Changjiang Water Resources Commission. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

数字孪生水利建设是国家水利高质量发展的重要工作,《中华人民共和国国民经济和社会发展第十四个五年规划和 2035 年远景目标纲要》中明确提出“构建智慧水利体系,以流域为单元提升水情测报和智能调度能力”[1]。水利部先后出台了《关于大力推进智慧水利建设的指导意见》《“十四五”智慧水利建设规划》《数字孪生流域建设技术大纲(试行)》等文件,强调“全面提升水利监测感知能力,大力推进数字孪生流域、数字孪生水网建设,加快构建具有预报、预警、预演、预案功能的数字孪生水利体系”[2]。数据底板作为建设数字孪生流域的核心基础,对提升水利动态全面感知能力具有重要意义[3]。

随着“天空地水工”一体化监测感知体系的基本健全,水利监测感知能力显著提升。其中天基依托遥感、SAR、重力、北斗及气象卫星,实现流域下垫面、水体、灾害及工程形变的全域覆盖监测;空基利用无人机搭载多源传感器与雷达,开展重点区域动态监测和巡查;地基通过雨量、蒸发、地下水、墒情及视频等站点,完成关键点位全天候实时监测;水基借助水质、泥沙、流速、生物及无人船等设备,获取河湖水体动态信息;工基通过布设渗压、应力、位移及水下机器人等装置,保障重点工程运行安全(图 1)。新型传感器设备、智能视频摄像头、和遥感等新技术的广泛应用,实现了对河流水体的远程测量,正逐渐成为支撑水文监测的重要工具[4]。这些非接触式测流技术相较传统的走航式声学多普勒流速剖面仪的人工操作和船载测量,避免了直接接触水体[5],同时节省了测量成本和时间,解决了在极端洪水条件下测量存在的诸多困难和安全隐患,提高了测量工作的安全性,在水文监测中展现出明显的优势[6]-[8]。

上述非接触式测流技术大多仅能获取河流表面信息,难以反映水下的流动特性,需要参考相关专业模型。如何有效融合新型监测手段,实现对河流系统多维度(垂向、横向、纵向)、多类型(流速、水位、地形、泥沙浓度等)



图 1. “天空地水工”一体化监测感知体系示意图[4]

数据信息的协同感知与同化，仍是数字孪生流域建设等工作亟待解决的关键问题。河流系统的信息具有高度复杂性与动态变异性，熵模型为描述复杂条件下随机变量的非线性运动过程提供了有效的量化方法。前人通过引入熵模型，在河流监测感知中取得了显著进展，为防洪预报、水资源管理和生态治理等工作提供了重要的理论基础和技术支撑[5]-[14]。本文系统梳理了熵模型的理论基础，重点阐述其在河流流场重构、河道地形反演等监测感知任务中的研究与应用现状，并展望在多源信息融合及智能预报等方向的发展前景。

2. 熵模型简介

河流的水力要素(例如水深、流速、压强等)受边界条件和相互作用的影响具有不确定性，信息熵理论是量化不确定性的有效方法。Chiu [15]基于 Shannon [16]提出的信息熵概念，假设流速为随机变量，将信息熵理论和水力学结合建模，建立了基于熵理论的流速分布模型(图 2)。根据明渠流动的特性作出假设：在明渠中水深为 D 的均匀水流中，时均速度在垂直方向上从河床处为零单调递增至水面处为最大值。在任意小于 y 距离的位置，速度都小于 u ，当流速 u 出现在 0 与 y 之间的值都是相等的可能性，即流速等于或小于 u 的概率就是 y/D ，即累积分布函数是 $F(u)$ ：

$$F(u) = \frac{y}{D} \quad (1)$$

其中， $F(u)$ 表示流速的累积分布函数， u 为距河床垂直距离 y 处的速度， y 表示距河床的垂直距离， D 表示测

线的水深。

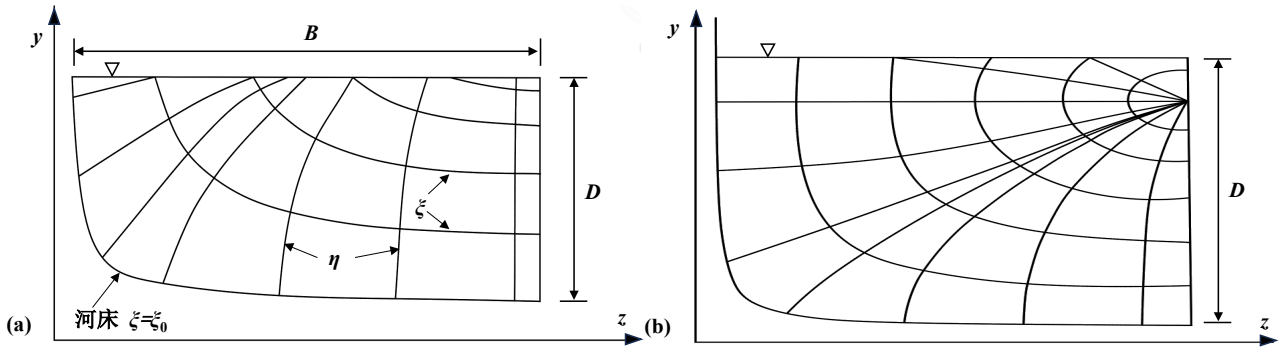


图 2. 曲线坐标系下的流速分布概念图(a) $h > 0$, (b) $h < 0$ [6]

时均流速在 ξ 方向上的大小在 ξ_0 与 $\xi_{\max}$ 范围之间 ($\xi_0 < \xi < \xi_{\max}$)。流速在近床面的等值线上 ($\xi = \xi_0$) 约为零。此外, 流速的最大值 $u_{\max}$, 在 ξ 等于 $\xi_{\max}$ 位置处, 它可能发生在水面及以下。天然河流中流速 u 随空间坐标 ξ 单调增加, 即从 ξ_0 到 $\xi_{\max}$ 。因此, 若在空间坐标的任何值小于 ξ , 则其流速也将小于 u 。故定义确定性函数 G , 构建流速 u 与 ξ 的关系[17]:

$$u = G(\xi) \quad (2)$$

在概率公式中, 将 ξ 和 u 为随机变量, 其概率密度函数分别为 q 和 p 。假设 ξ 在 ξ_0 和 $\xi_{\max}$ 之间的空间变量的所有值都具有相等的可能性, 则 ξ 的概率密度函数在区间 $(\xi_0, \xi_{\max})$ 上是均匀的:

$$q(\xi) = \frac{1}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (3)$$

计算速度小于或等于 u 的概率, 即速度的累积分布函数 $P(u)$, 可以推导出:

$$p(u) = \int_0^u p(G(\xi)) du = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_{\max} - \xi_0} \quad (4)$$

Chiu [18] 基于熵理论, 推导发现了断面平均流速 U_m 与断面上的最大流速 $U_{\max}$ 之间满足一定函数关系, 并将其定义为熵函数 $\Phi(M)$:

$$\Phi(M) = \frac{U_m}{U_{\max}} = \frac{e^M}{e^M - 1} - \frac{1}{M} \quad (5)$$

其中, U_m 为平均流速, $U_{\max}$ 为最大流速, $\Phi(M)$ 是熵函数。该等式构建起了平均流速和最大流速的关系, 在现实河流中被广泛研究和验证[19] [20]。在河流中的同一区域, 熵函数能保持恒定性[21]。

Moramarc 等人[22]对模型公式参数进行了改进, 通过假设 $u_{\max}$ 横截面区域中最大速度的位置, 将其 y 轴速度分布应用于流动区域的所有垂直方向, 表现为椭圆或抛物线曲线。即简化了原有模型中对横向假设异质性的假设, 将断面中心线处的流速分布推广到整个断面上, 使得模型便于实际应用, 公式如下:

$$U(x_i, y) = \frac{U_{\max v}(x_i)}{M} \ln \left[1 + (e^M - 1) \frac{y}{D(x_i) - h(x_i)} \exp \left(1 - \frac{y}{D(x_i) - h(x_i)} \right) \right] \quad i = 1, \dots, N_v \quad (6)$$

式中, x_i 为左岸起的第 i 条测线, $U_{\max v}(x_i)$ 为 x_i 测线上的最大速度, M 为熵系数, y 为垂直方向上的测点位置, $h(x_i)$ 是最大流速下移距离, $D(x_i)$ 是测线 x_i 上的水深, N_v 是断面上的测线数量。断面测线上的最大垂线流速 $U_{\max v}$ 由下式计算:

$$U_{\max v}(x_i) = \frac{U_{surf}(x_i, D(x_i))}{\frac{1}{M} \ln [1 + (e^M - 1) \delta(x_i) \exp(1 - \delta(x_i))]} \quad (7)$$

其中, $U_{surf}(x_i, D(x_i))$ 为测线 x_i 上的表面流速, $\delta(x_i)$ 表示测线 x_i 上的最大流速下移函数, 由 $\delta(x_i) = D(x_i) / (D(x_i) - h(x_i))$ 计算。

3. 熵模型在河流监测感知中的应用

熵模型已成功应用在河流流场重构计算、河床地形重构计算和河流水沙分析计算等监测感知领域中。

3.1. 河流流场重构计算应用

熵模型已成功应用于天然大中型河流中计算河道二维流场和流量[23]。河流的表面流速可通过非接触式测量技术进行测量, 通常是所在垂向上的最大流速[24]。Moramarco 等[22]通过表面流速和熵模型模拟了河流的垂线流速分布, 结果与实测值拟合效果较好。然而, 天然河流中常出现最大流速下降现象, 即垂线上最大流速将偏离水流表面发生下降, 形成复杂的流速分布形态[25]。Moramarco 和 Singh [6]和 Moramarco 等人[9]研究指出, 二次流的存在会对流速分布产生影响, 并表现为最大流速下降现象。前人在模型中考虑二次流带来的不确定性, 基于 Yang 等人[25]提出的最大流速下移公式, 对最大流速下移函数的计算公式进行了改进, 并在 Santa Lucia 等顺直河流上开展流速和流量的计算[9]。

Bahmanpouri 等人[7]基于现场实测数据[26], 首次将熵模型应用在亚马逊流域 Rio Negro 和 Rio Solimões 的交汇河流处, 对该处的河流流场进行模拟计算(图 3(a))。研究发现, 熵模型在河流交汇处的流场监测感知应用具备一定可靠性, 流量和流速的模拟误差在 15%以内。但断面局部观察到流速模拟结果存在较大的偏差(>50%), 这可能与交汇处的二次流等复杂流动结构有关[7]。对此, Yuan 等[8]进一步研究了熵模型在大型交汇河道的应用, 通过量化二次流对最大流速下移函数的影响, 提出了优化熵模型方法。该优化方法重构出的大型交汇河道断面流速场与实测结果误差较小(图 3(b)), 提高了熵模型在复杂水动力条件下的流场监测效果。

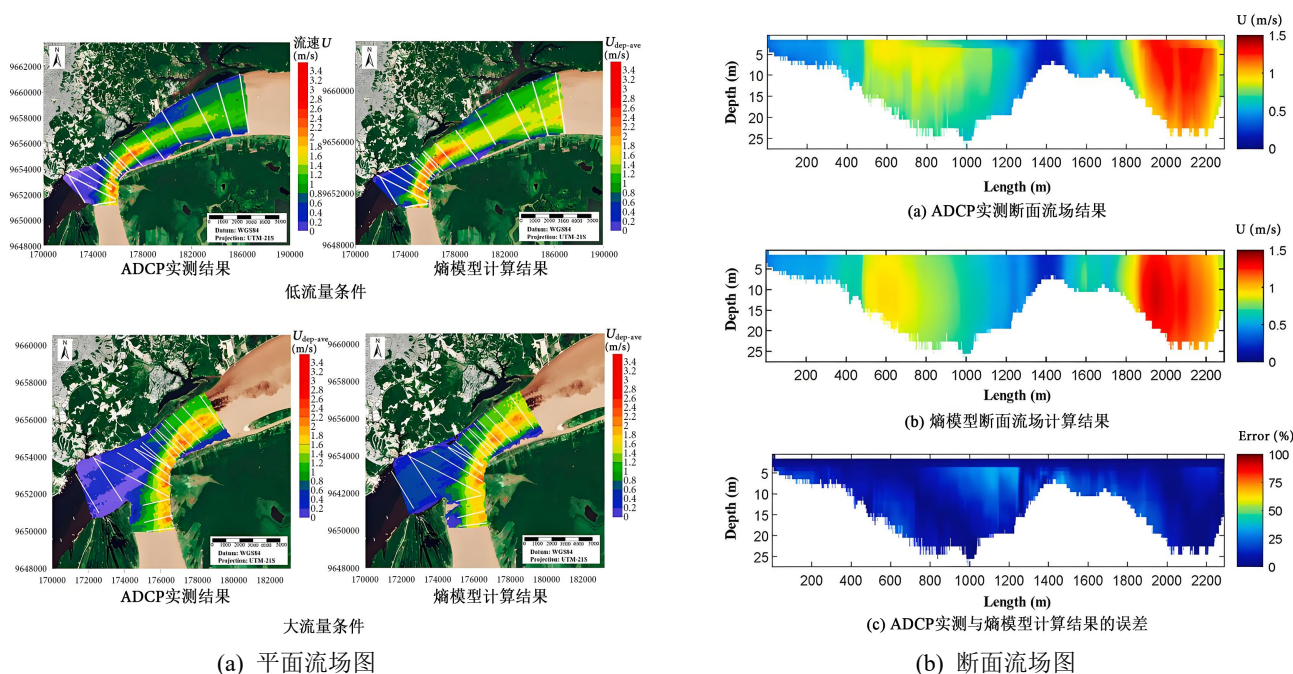


图 3. 基于熵模型的流场重构平面[7]和断面图[8]

3.2. 河床地形重构计算应用

基于最大熵原理[27], 前人结合遥感和地面观测技术, 将熵模型应用推广至河流地形的监测感知中。Farina 等[28]利用水面宽度和水位等参数, 通过熵模型反演了天然河流断面的水深地形。并在两个天然河流断面(意大利台伯河和卢森堡阿尔泽特河)上进行了验证, 结果表明该方法可以较准确地重构断面形状, 并能够估算过水面积和流量。Moramarco 等[29]基于最大熵原理提出了一种用于估算天然河道的水深分布和流量的方法。通过水面最大流速和最大水深, 可重建断面形状并估算流量。该方法同样在河流中成功反演河道地形。

Moramarco 等[10]结合多源遥感数据和熵模型进行河床地形估算, 基于 ENVISAT 和 MODIS 影像的数据, 利用遗传算法对河道糙率、水面坡度、河床底部高程以及熵参数进行求解, 推算河床形态并计算流量。具体而言, 该方法利用以下公式计算水深分布:

$$h(x) = \frac{h_{\max}}{M} \ln \left[(e^W - 1) F(h) + 1 \right] \quad (8)$$

其中, $h(x)$ 为水深, $h_{\max}$ 表示最大水深, M 为熵参数, $F(h)$ 为水深的累积分布函数, 该公式推导过程与前述熵模型流速公式类似。

该方法在河流断面地形的反演中误差均在可接受范围内, 特别是在流量估算方面, 相较于实际测量值其纳什系数可达 0.96, 相关性系数可达 0.99, 断面形态模拟效果较好(图 4)。该方法较传统的河流地形现场测量方法突破了时间和空间上采集数据的难点, 并且节省了高昂的测量成本, 具有广阔的应用前景和现实意义。

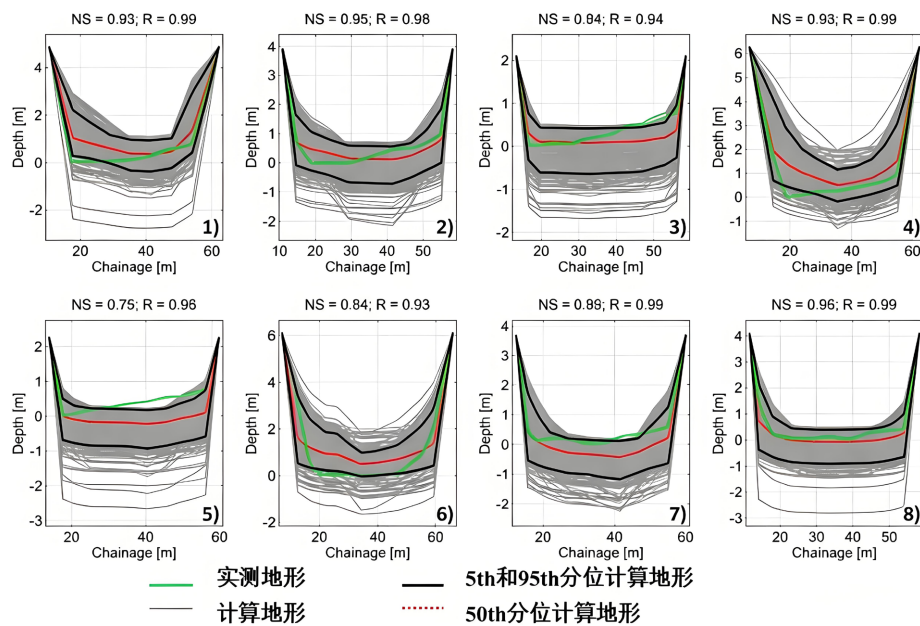


图 4. 基于熵模型的河流断面地形反演图[10]

3.3. 河流水沙分析应用

Termini 和 Moramarco [30]通过弯道水动力实验分析研究了熵函数与弯道水流结构之间的关系。探究了不同宽深比(B/D)条件下熵参数 M 的空间分布及其与水流结构之间的关系。如图 5 所示, 熵参数的最小值出现在曲率最大的弯顶上游段, 随后逐渐增长, 并在下游的凸岸再次下降, 这与弯道入口及出口处二次流强度较高密切相关。因此断面及垂线熵参数(M , M_v)可作为弯道二次流强度和流速重分布的定量指标[30]。同时可作为衡量不同水流条件下河流中的水动力学与湍流效应的量化参数指标[13]。

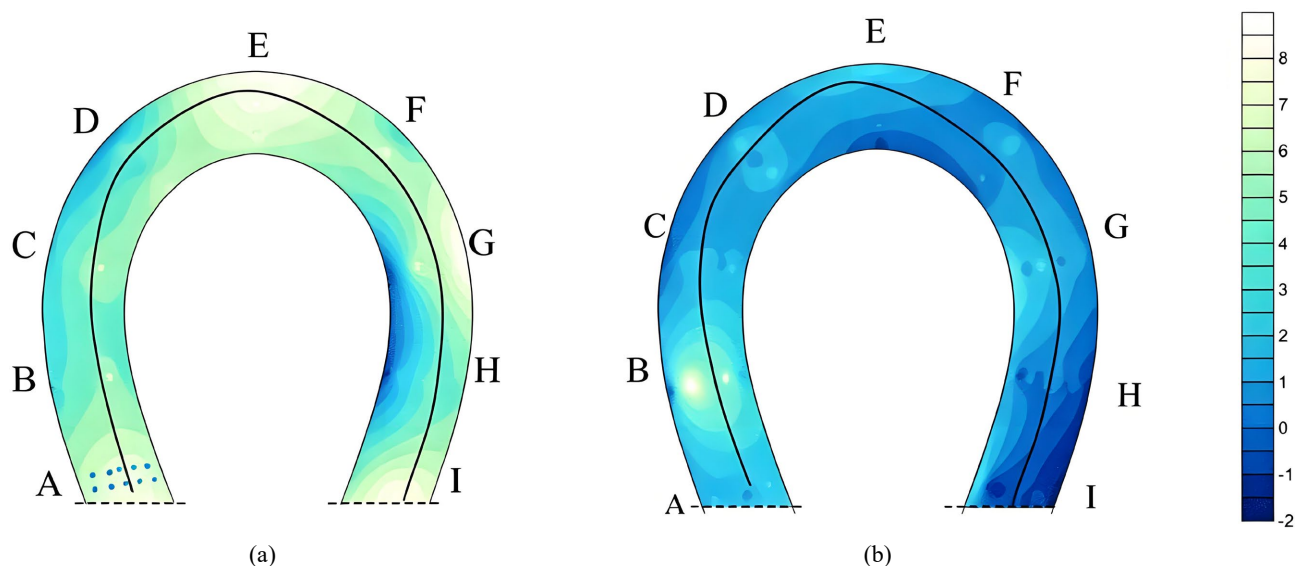


图 5. 熵参数 M 的等值线图(a) $B/D < 10$; (b) $B/D > 10$ (黑线表示 M 取较高值的位置) [30]

Rezazadeh 等人[11]结合熵模型,利用声学多普勒流速剖面仪(ADCP)在亚马逊河采集表面流场数据,根据流速场计算剪切流速(Shear velocity)与临界剪切应力(Shields 参数),并依据不同粒径范围,计算无量纲推移质输沙率。他们采用熵模型估算断面流速分布对两种数据源情景进行比较:一是采用全部实测表层流速点;二是仅采用单一表层最大流速点。当基于全部表层流速点时,对断面平均流速与流量估算的误差为 2.08%。当采用单一最大表层流速并假设抛物线分布时误差为 4.08%;当假设椭圆分布时误差为 12.5%。根据估算得到的流速场,进一步计算剪切流速和临界剪切应力,再通过推移质输沙公式计算推移质输沙率。通过比较基于不同表层流速分布情景的多种推移质公式结果,熵模型所得结果与实验测得的数据高度一致[11] [12]。

基金项目

本研究受国家自然科学基金项目(42376166);中央级公益性科研院所基本科研业务费领军人才培养项目(CKSF2025153/HL);中央级公益性科研院所基本科研业务费(CKSF2026342/HL)等项目资助。

参考文献

- [1] 曾焱,程益联,江志琴,等.“十四五”智慧水利建设规划关键问题思考[J].水利信息化,2022(1):1-5.
- [2] 蔡阳,成建国,曾焱,等.加快构建具有“四预”功能的智慧水利体系[J].中国水利,2021(20):2-5.
- [3] 谢文君,李家欢,李鑫雨,等.《数字孪生流域建设技术大纲(试行)》解析[J].水利信息化,2022(4):6-12.
- [4] 钱峰,成建国,夏润亮,等.数字孪生水利“天空地水工”一体化监测感知体系构建与应用初探[J].中国水利,2024(24):39-47.
- [5] FULTON, J., OSTROWSKI, J. Measuring real-time streamflow using emerging technologies: Radar, hydroacoustics, and the probability concept. Journal of Hydrology, 2008, 357(1-2): 1-10. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2008.03.028>
- [6] MORAMARCO, T., SINGH, V. P. Formulation of the entropy parameter based on hydraulic and geometric characteristics of river cross sections. Journal of Hydrologic Engineering, 2010, 15(10): 852-858. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)he.1943-5584.0000255](https://doi.org/10.1061/(asce)he.1943-5584.0000255)
- [7] BAHMANPOURI, F., BARBETTA, S., GUALTIERI, C., IANNIRUBERTO, M., FILIZOLA, N., TERMINI, D., et al. Prediction of river discharges at confluences based on Entropy theory and surface-velocity measurements. Journal of Hydrology, 2022, 606: 127404. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2021.127404>
- [8] YUAN, S., LIN, H., TANG, H., QIU, J., LI, Z., XU, D., et al. An optimized entropy-based model for estimating river confluence hydrodynamics: Accounting for the effects of velocity dip. Journal of Hydrology, 2024, 628: 130408.

- <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2023.130408>
- [9] MORAMARCO, T., BARBETTA, S. and TARPANELLI, A. From surface flow velocity measurements to discharge assessment by the entropy theory. *Water*, 2017, 9(2): 120. <https://doi.org/10.3390/w9020120>
 - [10] MORAMARCO, T., BARBETTA, S., BJERKLIE, D. M., FULTON, J. W. and TARPANELLI, A. River bathymetry estimate and discharge assessment from remote sensing. *Water Resources Research*, 2019, 55(8): 6692-6711. <https://doi.org/10.1029/2018wr024220>
 - [11] REZAZADEH, S., MANAFPOUR, M., BAHMANPOURI, F. and GUALTIERI, C. Application of the entropy model to estimate flow discharge and bed load transport in a large river. *Physics of Fluids*, 2025, 37(2): 023325. <https://doi.org/10.1063/5.0250941>
 - [12] BAHMANPOURI, F., YADAV, A., MASSARI, C., DE SANTIS, D., SHARMA, A., AGARWAL, A., et al. Application of the entropy model to estimate flow discharge and bed load transport with limited field measurements. *Water*, 2024, 16(24): 3684. <https://doi.org/10.3390/w16243684>
 - [13] BAHMANPOURI, F., TERMINI, D., BARBETTA, S., GUALTIERI, C., DIONIGI, M. and MORAMARCO, T. Investigating hydrodynamics and turbulent effects in rivers for different flow conditions using spatial complexity metrics. *Journal of Hydrology*, 2024, 641: 131790. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2024.131790>
 - [14] LIN, H., GUALTIERI, C., LUAN, H. L., et al. Estimating the hydraulic complexity metrics based on the Entropy model and surface-velocity measurements. In *Proceedings of the 24th IAHR-APD congress* (p. 277). IAHR.
 - [15] CHIU, C. Entropy and 2-D velocity distribution in open channels. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1988, 114(7): 738-756. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1988\)114:7\(738\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1988)114:7(738))
 - [16] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *Bell Systems Technical Journal*, 1948, 27(4): 623-656. <https://doi.org/10.1002/j.1538-7305.1948.tb00917.x>
 - [17] CHIU, C. Application of entropy concept in open-channel flow study. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1991, 117(5): 615-628. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1991\)117:5\(615\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1991)117:5(615))
 - [18] CHIU, C. Entropy and probability concepts in hydraulics. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1987, 113(5): 583-599. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1987\)113:5\(583\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1987)113:5(583))
 - [19] XIA, R. Relation between mean and maximum velocities in a natural river. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1997, 123(8): 720-723. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1997\)123:8\(720\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1997)123:8(720))
 - [20] GRECO, M., MIRAUDA, D. Entropy parameter estimation in large-scale roughness open channel. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2015, 20(2): 04014047. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)he.1943-5584.0001009](https://doi.org/10.1061/(asce)he.1943-5584.0001009)
 - [21] CHIU, C. Velocity distribution in open channel flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 1989, 115(5): 576-594. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(1989\)115:5\(576\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(1989)115:5(576))
 - [22] MORAMARCO, T., SALTALIPPI, C. and SINGH, V. P. Estimation of mean velocity in natural channels based on Chiu's velocity distribution equation. *Journal of Hydrologic Engineering*, 2004, 9(1): 42-50. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)1084-0699\(2004\)9:1\(42\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1084-0699(2004)9:1(42))
 - [23] MORAMARCO, T., SALTALIPPI, C. and SINGH, V. P. Velocity profiles assessment in natural channels during high floods. *Hydrology Research*, 2011, 42(2-3): 162-170. <https://doi.org/10.2166/nh.2011.064>
 - [24] PLANT, W. J., BRANCH, R., CHATHAM, G., CHICKADEL, C. C., HAYES, K., HAYWORTH, B., et al. Remotely sensed river surface features compared with modeling and *in situ* measurements. *Journal of Geophysical Research: Oceans*, 2009, 114(C11): C11002. <https://doi.org/10.1029/2009jc005440>
 - [25] YANG, S.-Q., TAN, S.-K. and LIM, S.-Y. Velocity distribution and dip-phenomenon in smooth uniform open channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering*, 2004, 130(12): 1179-1186. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9429\(2004\)130:12\(1179\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9429(2004)130:12(1179))
 - [26] GUALTIERI, C., IANNIRUBERTO, M. and FILIZOLA, N. On the mixing of rivers with a difference in density: The case of the Negro/Solimões confluence, Brazil. *Journal of Hydrology*, 2019, 578: 124029. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2019.124029>
 - [27] JAYNES, E. T. On the rationale of maximum-entropy methods. *Proceedings of the IEEE*, 1982, 70(9): 939-952. <https://doi.org/10.1109/proc.1982.12425>
 - [28] FARINA, G., ALVISI, S., FRANCHINI, M., CORATO, G. and MORAMARCO, T. Estimation of bathymetry (and discharge) in natural river cross-sections by using an entropy approach. *Journal of Hydrology*, 2015, 527: 20-29. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2015.04.037>
 - [29] MORAMARCO, T., CORATO, G., MELONE, F. and SINGH, V. P. An entropy-based method for determining the flow depth distribution in natural channels. *Journal of Hydrology*, 2013, 497: 176-188. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2013.06.002>
 - [30] TERMINI, D., MORAMARCO, T. Entropic model application to identify cross-sectional flow effect on velocity distribution in a large amplitude meandering channel. *Advances in Water Resources*, 2020, 143: 103678. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2020.103678>