

含有初始弯曲柔性梁的四杆机构轨迹分析

李 渊

山西大同大学机电工程学院, 山西 大同

收稿日期: 2024年8月28日; 录用日期: 2024年9月21日; 发布日期: 2024年9月29日

摘 要

根据初始弯曲柔性梁的3R伪刚体模型, 构建了含有初始弯曲柔性梁的四杆机构的仿真模型, 并在ADAMS软件中进行建模仿真, 输出伪刚体模型的末端轨迹和末端转角, 并和ANSYS软件中建立的刚柔耦合模型输出结果以及基于1R伪刚体模型建立的机构仿真模型输出结果进行对比, 可以对3R伪刚体模型进行验证是否可行、优越, 为更广泛应用初始弯曲柔性梁打下了坚实的基础。

关键词

初始弯曲柔性梁, 四杆机构, 轨迹分析, 伪刚体模型

Trajectory Analysis of a Four-Bar Mechanism with an Initially Curved Flexible Beam

Yuan Li

College of Mechanical and Electrical Engineering, Shanxi Datong University, Datong Shanxi

Received: Aug. 28th, 2024; accepted: Sep. 21st, 2024; published: Sep. 29th, 2024

Abstract

Based on the 3R pseudo-rigid body model of an initially curved flexible beam, the article constructed a simulation model of a four-bar mechanism that incorporates the initially curved flexible beam. The modeling and simulation were conducted using ADAMS software, and the end trajectory and end angle of the pseudo-rigid body model were output. These results were then compared with the output from the rigid-flexible coupling model established in ANSYS software and the output from the mechanism simulation model based on the 1R pseudo-rigid body model. This comparison facilitates the verification of the feasibility and advantages of the 3R pseudo-rigid body model, thereby laying a solid foundation for the broader application of initially curved flexible beam.

Keywords

Initially Curved Flexible Beam, Four-Bar Mechanism, Trajectory Analysis, Pseudo-Rigid Body Model

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

柔顺机构[1]是一种利用机构中构件自身的弹性变形来完成运动和力的传递及转换的新型机构。这种机构可以摒弃传统运动副,可大幅减少零件数量,从而实现了轻量化,同时,它还提高了可靠性和精度,降低了维护需求,大幅降低了成本,提升了整体性能。柔顺机构因其独特的性能成为了现代机械设计和设备开发等新兴研究领域[2],其应用范围涵盖了 MEMS、机器人、微操作等多个前沿科技领域[3]。在柔顺机构分析过程中,由于构件大变形,从而导致出现几何非线性特性,这使得分析过程异常复杂,为了对分析过程进行简化,基于机构结构学和运动学,Howell 等提出了“1R 伪刚体模型”[4][5]。随后“3R、2R、PR 等伪刚体模型”等先后被 Su [6]、冯忠磊[7]和余跃庆[8]提出。上述几种模型都是基于初始柔性直梁而提出的。然而对于初始弯曲柔性梁的建模以及应用等相关研究则相对较少。初始弯曲梁的 1R 伪刚体模型[9]被 Howell 建立,他总结推荐了几组的初始曲率值及相应的重要模型参数。3R 伪刚体模型[10]被建立,是基于末端受力的初始弯曲柔性悬臂梁的,并对是否有效进行了验证。该模型中其末端受力大小虽然随着时间而变化,但受力方向有所限制。杨毅[11]提出了一种双曲梁支链结构形式,进而设计出了一种 2 自由度柔顺移动并联机构,该机构应用于无人艇水样对接装置设计。杨云良[12]在低温红外镜头柔性卸载结构设计及测试项目中采用初始弯曲柔性梁设计了柔性卸载结构。王家成[13]将直梁单元设计成能够分散应力集中的曲梁单元,并搭建了微振动辅助悬浮挤出 3D 打印平台。

本文基于末端受力载荷的初始弯曲柔性梁的 3R 伪刚体模,在 ADAMS 软件中建立了含有初始弯曲柔性梁的四杆机构的仿真模型,给定曲柄转速,计算出初始弯曲柔性梁末端轨迹和转角,并和 ANSYS 软件中建立的刚柔耦合模型结果以及基于 1R 伪刚体模型建立的机构仿真模型输出结果进行对比,可以验证初始弯曲柔性梁的 3R 伪刚体模型是否可行并且优越。需要注意的是,含有初始弯曲柔性梁的四杆机构曲柄在转动过程中,初始弯曲柔性梁的末端受力大小和方向会时刻发生变化。

2. 末端受力作用的初始弯曲柔性梁

如图 1 展示了一根末端受力、初始弯曲状态的柔性悬臂梁。该曲梁具有初始曲率半径 r_i , 曲率 $1/r_i$ 。柔性曲梁的初始曲率,通过无量纲参数 κ_0 表示,即 $\kappa_0 = L/r_i$ 。

初始弯曲柔性梁其末端在垂直方向和轴向方向的分力可用 P 和 nP 分别来表示; F_0 为总力,其大小为

$$F_0 = P\sqrt{n^2 + 1} \quad (1)$$

该力的角 ϕ 为

$$\phi = \arctan \frac{1}{-n} \quad (2)$$

经过推导可以得到

$$\alpha = \frac{1}{2} \int_0^{\theta_i} \frac{d\theta}{\sqrt{[\cos(\theta_i - \phi) - \cos(\theta - \phi)] + il}} \quad (3)$$

其中 il 为载荷指数

$$il = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} \quad (4)$$

$$\alpha^2 = \frac{F_0 L^2}{2EI} \quad (5)$$

$$\beta = \frac{M_i L}{EI} = \theta_i \quad (6)$$

最终可以得到末端受力载荷的初始弯曲柔性梁的无量纲形式的垂直和水平位置方程分别为

$$\frac{b}{L} = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\theta_0} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{[\cos(\theta_0 - \phi) - \cos(\theta - \phi)] + il}} \quad (7)$$

$$\frac{a}{L} = \frac{1}{2\alpha} \int_0^{\theta_0} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{[\cos(\theta_0 - \phi) - \cos(\theta - \phi)] + il}} \quad (8)$$

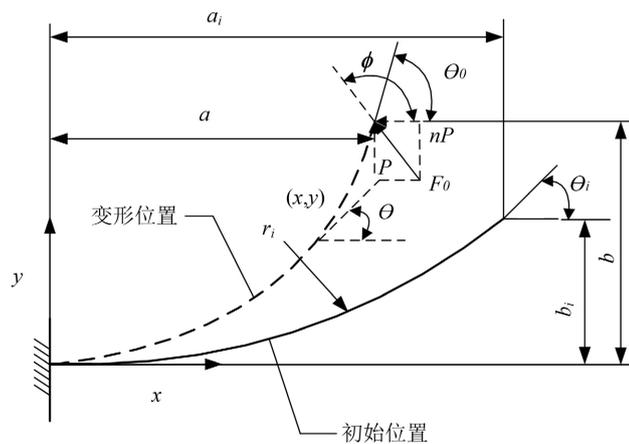


Figure 1. Initially curved flexible beam with the free end subjected force
图 1. 末端受力的初始弯曲柔性梁

3. 伪刚体模型

3.1. 1R 伪刚体模型

Table 1. Model parameter values at different κ_0 of the initially curved flexible beam
表 1. 初始弯曲梁各种 κ_0 时的模型参数值

κ_0	γ	ρ	K_θ
0	0.85	0.85	2.65
0.1	0.84	0.8398	2.64
0.25	0.83	0.829	2.56
0.5	0.81	0.8069	2.52

续表

1	0.81	0.7973	2.6
1.5	0.8	0.7746	2.8
2	0.79	0.7491	2.99

初始弯曲悬臂梁的 1R 伪刚体模型如图 2 所示。选择初始直梁时的特征半径系数为该模型的特征半径系数 γ 。考虑到曲率影响，伪刚体杆的长度表示为 ρL (详见式(10))，其中参数 ρ 为特征半径系数 γ 和曲率的函数。初始弯曲梁各种 κ_0 时的模型参数如表 1 所示。

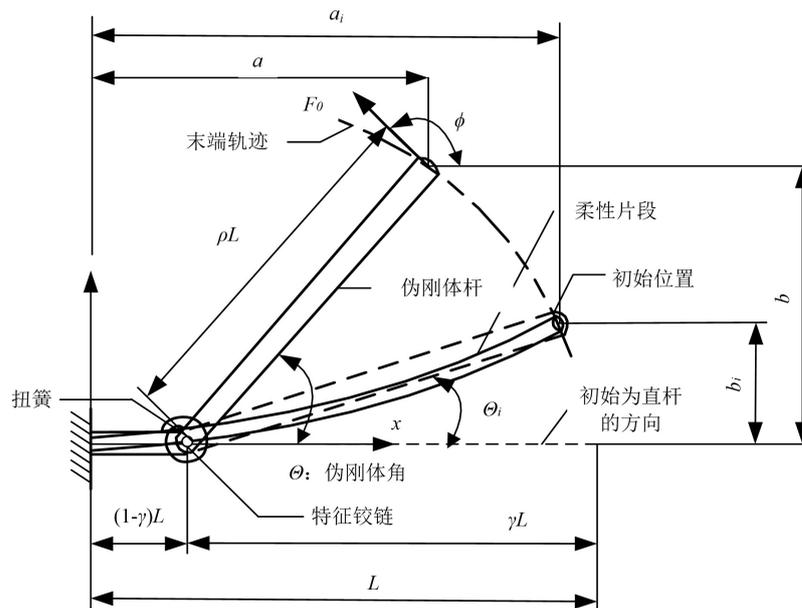


Figure 2. 1R pseudo-rigid-body model of the Initially curved flexible beam
图 2. 初始弯曲梁的 1R 伪刚体模型

由于该片段具有初始曲率，所以伪刚体角 Θ 初始值 Θ_i 不为零，其大小为

$$\Theta_i = \arctan \frac{b_i}{a_i - L(1-\gamma)} \quad (9)$$

式中 a_i 、 b_i 分别表示片段末端初始位置 x 、 y 方向的坐标；

由式(10)可以计算伪刚体杆的长度 ρL 为

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{a_i}{L} - (1-\gamma) \right]^2 + \left(\frac{b_i}{L} \right)^2} \quad (10)$$

式中

$$\frac{a_i}{L} = \frac{1}{\kappa_0} \sin \kappa_0 \quad (11)$$

$$\frac{b_i}{L} = \frac{1}{\kappa_0} (1 - \cos \kappa_0) \quad (12)$$

根据 1R 伪刚体模型，可以近似得知初始弯曲柔性梁末端的变形轨迹为

$$\frac{a}{L} = 1 - \gamma + \rho \cos \Theta \tag{13}$$

$$\frac{b}{L} = \rho \sin \Theta \tag{14}$$

3.2. 3R 伪刚体模型

如图 3 所示为末端受力的初始弯曲柔性梁的 3R 伪刚体模型。因为该柔性梁具有初始曲率，所以伪刚体角 Θ_{31} 、 Θ_{32} 、 Θ_{33} 分别有一个非零的初始值 Θ_{31i} 、 Θ_{32i} 和 Θ_{33i} ，这些初始值可以根据式(15)得出：

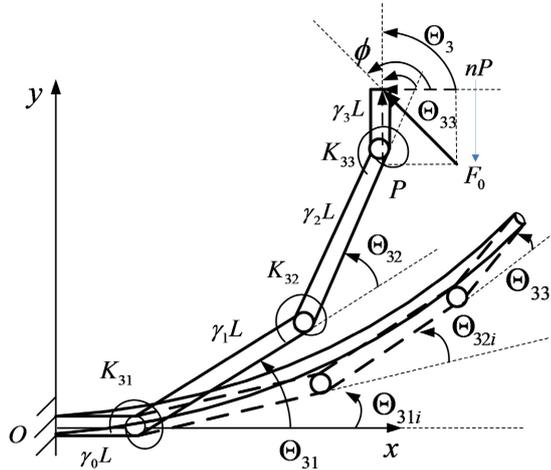


Figure 3. 3R pseudo-rigid-body model of the Initially curved flexible beam

图 3. 末端受力的初始弯曲柔性梁 3R 伪刚体模型

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{31i} + \Theta_{32i} + \Theta_{33i} &= \theta_i \\ K_{31}\Theta_{31i} &= K_{32}\Theta_{32i} = K_{33}\Theta_{33i} \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

而

$$\begin{Bmatrix} K_{31}\Delta\Theta_{31} \\ K_{32}\Delta\Theta_{32} \\ K_{33}\Delta\Theta_{33} \end{Bmatrix} = [J^T] \begin{Bmatrix} F_0 L \cos \varphi \\ F_0 L \sin \varphi \end{Bmatrix} \tag{16}$$

其中

$$[J^T] = \begin{bmatrix} -\gamma_{31}s_1 - \gamma_{32}s_{12} - \gamma_{33}s_{123} & \gamma_{31}c_1 + \gamma_{32}c_{12} + \gamma_{33}c_{123} \\ -\gamma_{32}s_{12} - \gamma_{33}s_{123} & \gamma_{32}c_{12} + \gamma_{33}c_{123} \\ -\gamma_{33}s_{123} & \gamma_{33}c_{123} \end{bmatrix} \tag{17}$$

其中： $c_1 = \cos(\Theta_{31})$ ， $s_1 = \sin(\Theta_{31})$ ， $c_{12} = \cos(\Theta_{31} + \Theta_{32})$ ， $s_{12} = \sin(\Theta_{31} + \Theta_{32})$ ， $c_{123} = \cos(\Theta_{31} + \Theta_{32} + \Theta_{33})$ ， $s_{123} = \sin(\Theta_{31} + \Theta_{32} + \Theta_{33})$ 。

三个伪刚体角的大小分别为

$$\Theta_{31} = \Theta_{31i} + \Delta\Theta_{31} \tag{18}$$

$$\Theta_{32} = \Theta_{32i} + \Delta\Theta_{32} \tag{19}$$

$$\Theta_{33} = \Theta_{33i} + \Delta\Theta_{33} \tag{20}$$

初始弯曲柔性梁末端的变形轨迹近似为

$$\frac{a_3}{L} = \gamma_{30} + \gamma_{31}c_1 + \gamma_{32}c_{12} + \gamma_{33}c_{123} \quad (21)$$

$$\frac{b_3}{L} = \gamma_{31}s_1 + \gamma_{32}s_{12} + \gamma_{33}s_{123} \quad (22)$$

该 3R 伪刚体模型其特征半径系数分别为

$$\gamma_{30} = 0.1, \gamma_{31} = 0.35, \gamma_{32} = 0.40, \gamma_{33} = 0.15 \quad (23)$$

其刚度系数分别为

$$k_{\Theta 31} = 3.51, k_{\Theta 32} = 2.99, k_{\Theta 33} = 2.58 \quad (24)$$

弹簧常数分别为:

$$K_{31} = k_{\Theta 31} \frac{EI}{L}, K_{32} = k_{\Theta 32} \frac{EI}{L}, K_{33} = k_{\Theta 33} \frac{EI}{L} \quad (25)$$

4. 实例分析

含有初始弯曲柔性梁的平面四杆机构如图 4 所示。刚性曲柄 AB 通过铰链 B 与机架连接，刚性连杆 AQ 通过铰链 A 与曲柄 AB 连接，初始弯曲柔性梁 OQ 与连杆 AQ 通过铰链 Q 连接，同时通过铰链 O 与机架固定连接。

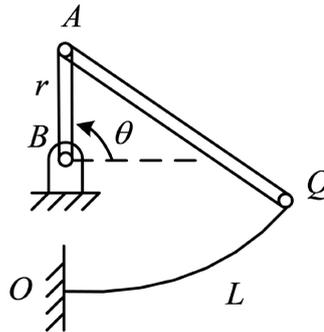


Figure 4. The four-bar mechanism with the initially curved flexible beam

图 4. 含有初始弯曲柔性梁的四杆机构

在初始位置时，即曲柄转角 $\theta = \pi/2$ 时， OQ 为半径为 300mm，初始夹角为 60° ，横截面为 $0.8 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ ，材料为 65 Mn 弹簧钢； O 、 A 、 B 三点共线， ΔOAQ 为等边三角形，连杆 AQ 长 $L_{AQ} = 300 \text{ mm}$ ，曲柄 BA 长度为 60 mm，横截面为 $10 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ ，材料为铝合金。

通过 3R 伪刚体模型来模拟初始弯曲柔性悬臂梁，带入到含有初始弯曲柔性梁的四杆机构中，建立机构模型如图 5 所示。建立坐标系 Oxy ，它是用来研究机构运动的绝对参考系。假定曲柄转速为 5 r/min。

由于基于 3R 伪刚体模型建立的四杆机构模型中，含有的未知数比较多，运动学和静力学方程的建立和求解比较复杂。为了简化求解，基于 ADAMS 软件建模求解。

为了验证上述仿真模型是否可行有效以及是否优越，基于 ANSYS 软件建立了柔顺四杆机构这一刚柔耦合系统仿真模型；并且根据初始弯曲柔性梁的 1R 伪刚体模型，建立了该柔顺四杆机构简化模型。其中在 ANSYS 刚柔耦合仿真模型中，连杆 AQ 和曲柄 BA 定义为刚性杆；初始弯曲柔性杆 OQ 为柔性杆，基于 beam3 单元划分为 10 个单元。

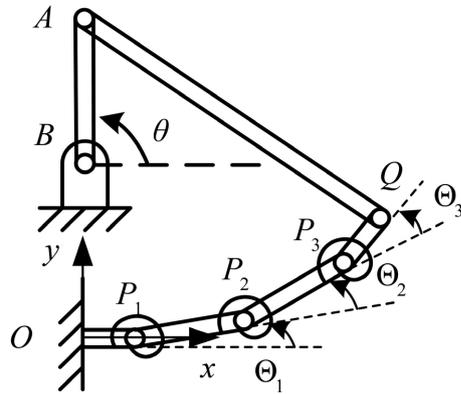


Figure 5. simulation model of the four-bar mechanism based on the 3R pseudo-rigid-body model
 图 5. 基于 3R 伪刚体模型建立的四杆机构仿真模型

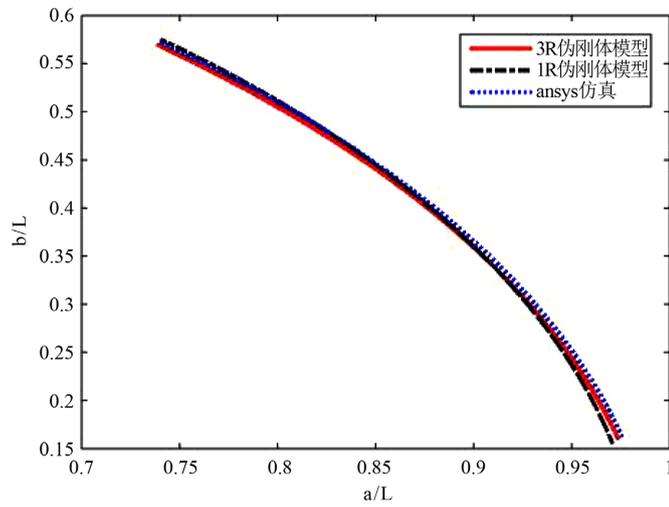


Figure 6. Comparison of end trajectories
 图 6. 末端轨迹对比

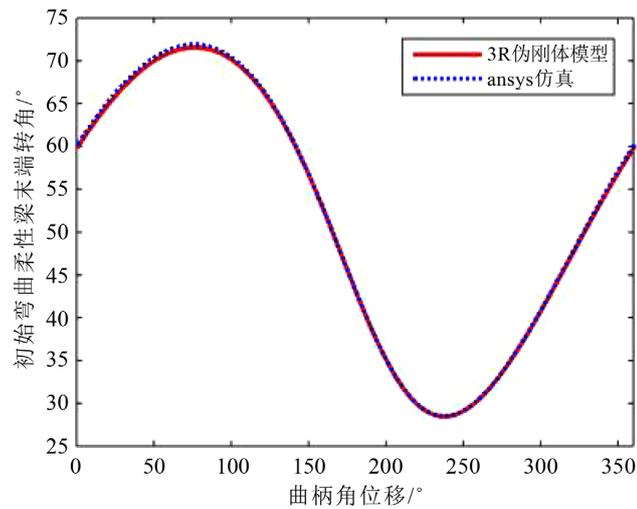


Figure 7. Comparison of end corners
 图 7. 末端转角对比

三种模型求解出的四杆机构中初始弯曲柔性梁的末端位移和末端转角对比分别如图 6 和图 7 所示。该四杆机构三种模型四个不同位置的对比如图 8 所示。

为了衡量伪刚体模型模拟初始弯曲柔性梁的模拟效果，定义伪刚体模型末端和柔性梁末端的变形位置分别为 (a_1, b_1) 和 (a_0, b_0) ，上述两种变形位置之间的距离和柔性梁原长 L 之比为相对变形误差 e_1 ，即

$$e_1 = \frac{\sqrt{(a_1 - a_0)^2 + (b_1 - b_0)^2}}{L} \quad (26)$$

定义初始弯曲柔性梁的 3R 伪刚体模型末端转角和 ANSYS 刚柔耦合模型末端转角的相对误差为

$$e_2 = (\Theta_3 - \theta_{ans}) / \theta_{ans} \quad (27)$$

该柔顺四杆机构中初始弯曲柔性梁的相对变形误差曲线和转角相对误差曲线如图 9 所示。

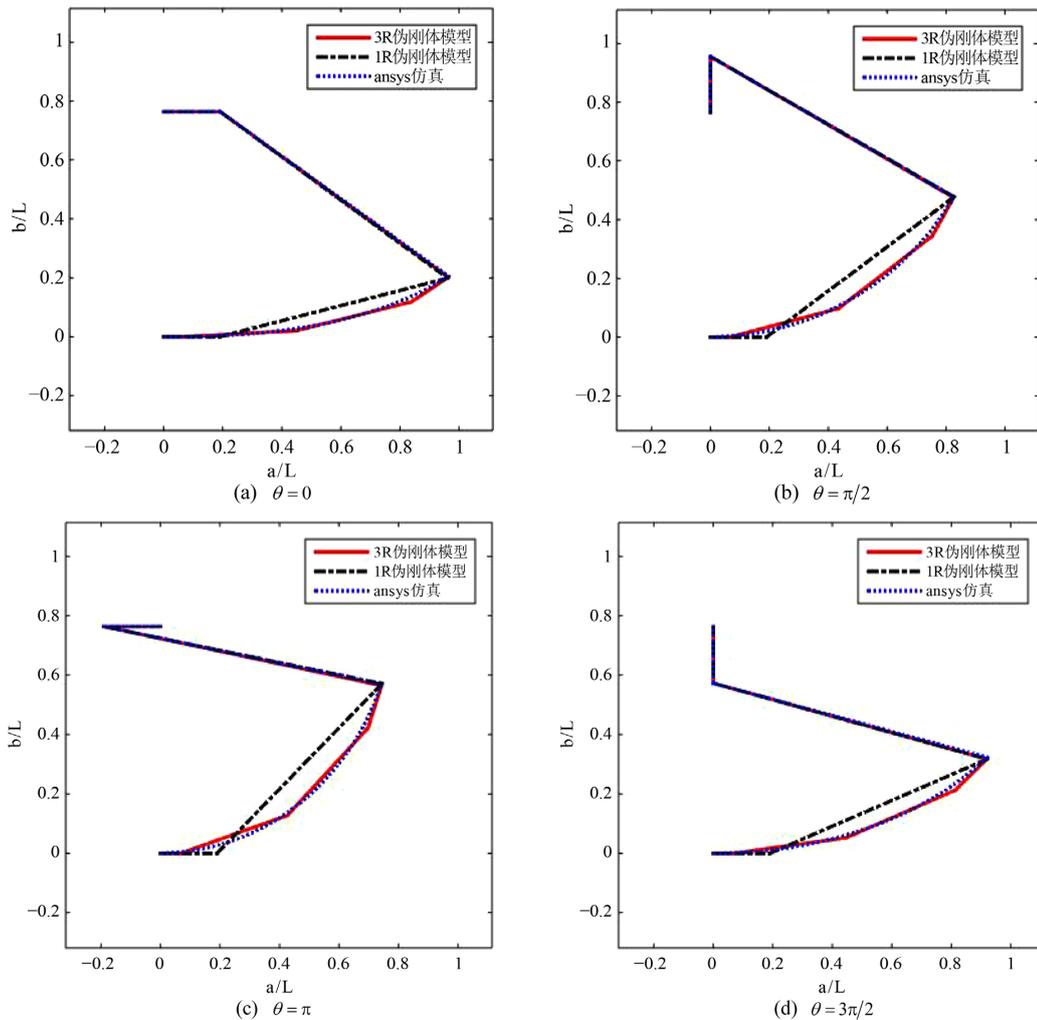


Figure 8. Location comparison of the four-bar mechanism
图8. 四杆机构位置对比图

含有初始弯曲柔性梁的四杆机构曲柄在转动过程中，初始弯曲柔性梁的末端受力大小和方向会时刻发生变化。从图 6 到图 9 可以看出，基于 3R 伪刚体模型建立的四杆机构模型和 ANSYS 刚柔耦合模型的

末端轨迹很接近,两者相对误差不超过 0.52%,两者末端转角相对误差不超过 0.54%,从而可以相互验证上述两种模型结果的有效性。

而基于 1R 伪刚体模型建立的四杆机构模型和 ANSYS 模型的末端轨迹相对误差稍微大一些,但是最大相对误差不超过 0.95%,这比基于 3R 伪刚体模型建立的四杆机构模型的末端轨迹相对误差相对稍微大一些。这说明了,1R 伪刚体模型不如 3R 伪刚体模型精确,在模拟初始弯曲柔性梁的末端轨迹时。这反映了初始弯曲柔性梁的 3R 伪刚体模型在一定受力范围内可以很好模拟其柔性梁的末端轨迹和转角,为含有初始弯曲柔性梁的精密机构、柔顺机构等的建模分析以及设计等打下坚实的基础。

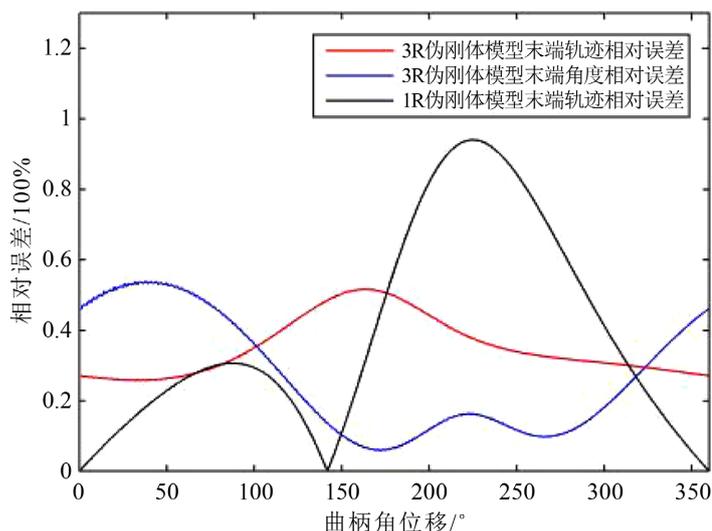


Figure 9. Relative error curves
图 9. 相对误差曲线

基金项目

本项目获得山西省高等学校科技创新项目(2021L380)资助。

参考文献

- [1] (美)豪厄尔(Howell, L.L.). 柔顺机构学[M]. 余跃庆, 译. 北京: 高等教育出版社, 2007.
- [2] 高峰. 机构学研究现状与发展趋势的思考[J]. 机械工程学报, 2005, 41(8): 3-17.
- [3] 于靖军, 裴旭, 毕树生, 宗光华, 张宪民. 柔性铰链机构设计方法的研究进展[J]. 机械工程学报, 2010, 46(13): 2-13.
- [4] Howell, L.L. and Midha, A. (1994) A Method for the Design of Compliant Mechanism with Small-Length Flexural Pivots. *Journal of Mechanical Design*, **116**, 280-289. <https://doi.org/10.1115/1.2919359>
- [5] Howell, L.L. and Midha, A. (1996) Evaluation of Equivalent Spring Stiffness for Use in a Pseudo Rigid Body Model of Large Deflection Compliant Mechanisms. *Journal of Mechanical Design*, **118**, 126-140. <https://doi.org/10.1115/1.2826843>
- [6] Su, H.J. (2009) A Pseudorigid-Body 3R Model for Determining Large Deflection of Cantilever Beams Subject to Tip Loads. *Journal of Mechanisms and Robotics*, **1**, Article 021008. <https://doi.org/10.1115/1.3046148>
- [7] 冯忠磊, 余跃庆, 王雯静. 柔顺机构中大变形柔性梁的 2 自由度伪刚体模型[J]. 机械设计与研究, 2010, 26(3): 41-48.
- [8] 余跃庆, 徐齐平, 周鹏. 复合载荷作用下柔顺机构的 PR 伪刚体新模型[J]. 机械工程学报, 2013, 49(15): 9-14.
- [9] Howell, L.L. and Midha, A. (1996) Parametric Deflection Approximations for Initially Curved, Large-Deflection Beams in Compliant Mechanisms. *Proceedings of the 1996 ASME Design Engineering Technical Conferences and*

Computers in Engineering Conference, Irvine, 18-22 August 1996, 1-8. <https://doi.org/10.1115/96-DETC/MECH-1215>

- [10] 李渊, 杜秋月. 末端加载力的初始弯曲柔性梁 3R 伪刚体模型[J]. 机械设计与研究, 2021, 37(5): 47-52.
- [11] 杨毅, 鹿碧洲, 李小毛, 等. 一种 2 自由度柔顺移动并联机构研究及其在对接装置上应用[J]. 机械工程学报, 2019, 55(11): 114-122.
- [12] 杨云良. 低温红外镜头柔性卸载结构设计测试[D]: [硕士学位论文]. 廊坊: 北华航天工业学院, 2021.
- [13] 王家成. 多维微振动辅助悬浮混合水凝胶 3D 打印研究[D]: [硕士学位论文]. 大连: 大连交通大学, 2023.