

基于三坐标的轴承同轴度误差测量及评定

庞冲冲, 徐旭松*

江苏理工学院机械工程学院, 江苏 常州

收稿日期: 2024年11月11日; 录用日期: 2024年12月4日; 发布日期: 2024年12月11日

摘要

针对三坐标测量仪在测量轴承同轴度时的误差评定问题, 研究了三坐标测量及误差评定原理, 建立了轴承同轴度误差评定数学模型, 进行了轴承内外圈同轴度测量实验, 并采用改进后的粒子群优化算法进行误差评定。研究表明, 采用优化后的不同维度测量点的布局方式, 更全面地反映了轴承的表面特征。通过对粒子群算法中惯性权重和学习因子的数值优化提高了求解轴承同轴度误差搜索效率和精度。

关键词

同轴度误差, 精密轴承, 三坐标测量, 改进粒子群优化算法

Measurement and Evaluation of Bearing Coaxiality Error Based on Three Coordinates

Chongchong Pang, Xusong Xu*

College of Mechanical Engineering, Jiangsu University of Technology, Changzhou Jiangsu

Received: Nov. 11th, 2024; accepted: Dec. 4th, 2024; published: Dec. 11th, 2024

Abstract

In view of the problem of large error in measuring bearing coaxiality by three-dimensional coordinate measuring machine, by studying the measurement method and calculation principle of three-dimensional coordinate measuring machine, the reasons for the large measurement error caused by three-dimensional coordinate measuring machine were analyzed. Based on this, a new mathematical model of bearing coaxiality error is established. In order to solve the problem of measurement error of bearing parts by using a three-dimensional coordinate measuring instrument, an improved particle swarm optimization algorithm was used to evaluate the model. The results show that the optimized layout of measuring points with different dimensions can reflect the bearing

*通讯作者。

surface characteristics more comprehensively. Through the numerical optimization of inertia weight and learning factor in particle swarm optimization, the efficiency and accuracy of searching bearing coaxiality error are improved.

Keywords

Coaxiality Error, Precision Bearing, Coordinate Measuring Machine, Improved Particle Swarm Optimization

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

轴承作为一种常用的重要组件，对轴承的精度具有较高要求[1]，因此需要对轴承的同轴度误差进行评定。目前，已有不少学者针对同轴度误差的测量和评估进行了研究。刘军丽等人[2]通过分析不同的拟合算法，选择最适合特定工程测量需求的算法，旨在为工程测量领域提供更准确和可靠的测量方法；UTPAL 等人[3]提出应用计算几何技术和数值分析方法进行圆柱面公差分析，将同轴度误差归因于圆柱度误差评定，但没有把同轴度误差评定进行单独研究；金波等人[4]利用最小包容区域法建立了铰链孔系统同轴度误差的通用数学模型，通过优化的粒子群算法在 Matlab 中评定同轴度误差，并用最小二乘法进行验证。Zhang Yingjie 等人[5]提出了一种新的几何误差测量和同轴度评定装置，可以同时对多个孔的同轴度进行表征，为同轴度误差的快速测量提供了新的解决方案；窦亚萍等人[6]提出了一种基于三维点云的同轴度误差视觉测量的方法，建立三维点云模型以计算圆心，从而获得研究对象同轴度误差；糜兆强等人[7]通过实验测试等方法，对同轴度偏差进行了量化评估，并提出了工艺优化或技术改进方案；唐力等人[8]分析了同轴度误差评定中的操作算子构成及选用原则，提出了最小二乘误差评定数学模型，但未给出相应的优化算法；许家赫等人[9]以最小包容区域准则为框架，将同轴度问题转化为圆度和圆柱度误差评定，建立同轴度误差评定数学模型。此外，现有的测量方法也存在一定的局限性，难以全面反映轴承的实际表面特征。

因此，本文针对三坐标测量仪在测量轴承同轴度时的误差问题展开研究，提出了一种基于改进粒子群优化算法的轴承同轴度误差评定方法，利用 Matlab 编程计算，得出轴承的内外圈同轴度误差，并评价所提方法的可行性。

2. 轴承同轴度误差评定模型

2.1. 建立轴承基准圆柱轴线方程

根据最小包容区域准则[10]，误差评定需建立同轴度误差的数学模型，如图 1 所示。

假设轴承外圆柱面的公共轴线方程为：

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n} \quad (1)$$

此方程表达了公共轴线上的任意一点， (a, b, c) 为轴线上一点的坐标参数； l, m, n 为其方向向量。

设基准圆柱面上的一个测点 $\{G = \{G_i = (x_i, y_i, z_i), (i = 0, 1, 2, \dots)\}\}$ ，根据推导公式可知，测点 G 到公共

轴线的距离可表示为:

$$d_i = \sqrt{\frac{(x_i - a)^2 + (y_i - b)^2 + (z_i - c)^2 - [l(x_i - a) + m(y_i - b) + n(z_i - c)]^2}{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (2)$$

可以得出测点 G 到公共轴线的距离为:

$$F(a, b, c, l, m, n) = \min\{d_{\max} - d_{\min}\} \quad (3)$$

式中: d_{\max} 为 $\{d_i\} (i=0,1,2,3\dots)$ 的最大值, d_{\min} 为 $\{d_i\} (i=0,1,2,3\dots)$ 的最小值。

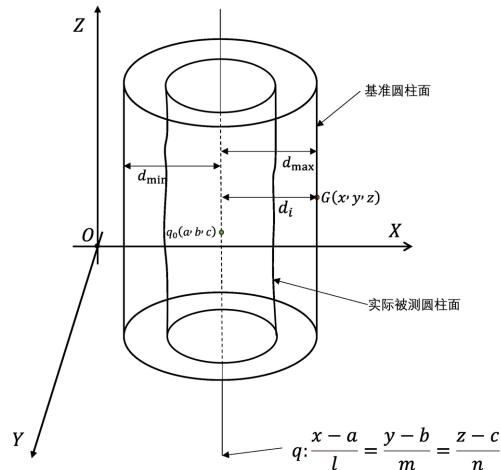


Figure 1. Mathematical model of a bearing cylinder
图 1. 轴承圆柱体数学模型图

2.2. 确定轴承被测截面圆的圆心坐标位置

把被测圆柱面分解成许多截面的圆求得每个圆的圆心位置, 如图 2 所示。

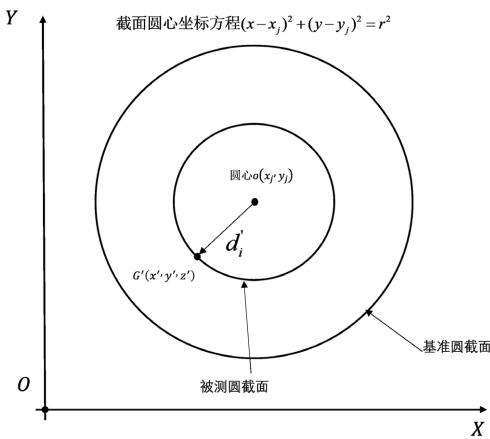


Figure 2. Cross-Section of the cylindrical plane to be measured
图 2. 被测圆柱面截面图

假设被测轴承内孔第 j 个截面的圆心坐标为 (x_j, y_j) , 截面圆心方程为:

$$(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 = r^2 \quad (4)$$

假设实际测量内孔柱面上的一个测点: $\{G' = \{G'_i = (x'_i, y'_i, z'_i), (i = 0, 1, 2 \dots)\}\}$, 则该坐标到理论圆心的距离为:

$$d'_i = \sqrt{(x'_i - x_j)^2 + (y'_i - y_j)^2} \quad (5)$$

式中: (x'_i, y'_i, z'_i) 为第 j 个截面上实际测量的坐标位置。

被测截面圆心的位置为:

$$F(x_j, y_j) = \min \{d'_{\max} - d'_{\min}\} \quad (6)$$

式中: d'_{\max} 为 $\{d'_i\} (i = 0, 1, 2, 3 \dots)$ 的最大值, d'_{\min} 为 $\{d'_i\} (i = 0, 1, 2, 3 \dots)$ 的最小值。

求出了公共轴线位置和被测截面圆心位置, 利用式(2), 计算出公共轴线与圆心位置最大距离 d_{\max} , 则同轴度误差值为:

$$f = 2 \times d_{\max} \quad (7)$$

3. 三坐标测量机智能算法的应用

3.1. 选择智能算法

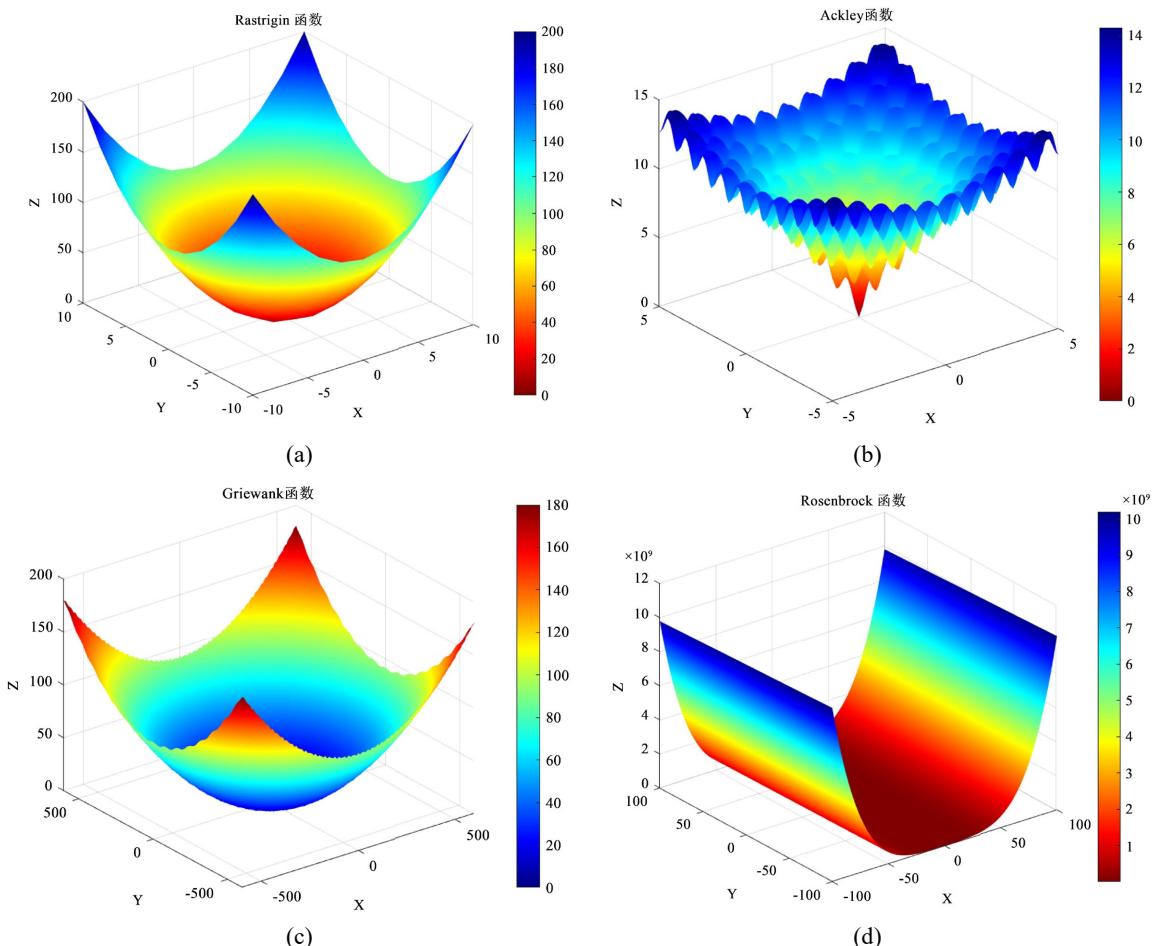


Figure 3. (a) Three-Dimensional diagram of the Rastrigin function; (b) Three-Dimensional diagram of the Ackley function; (c) 3D diagram of Griewank's function; (d) 3D diagram of the Rosenbrock function

图 3. (a) Rastrigin 函数三维图; (b) Ackley 函数三维图; (c) Griewank 函数三维图; (d) Rosenbrock 函数三维图

Table 1. Classic function types
表 1. 经典函数类型

名称	测试函数	取值范围
Rastrigin	$f_1(x) = \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10 * \cos(2\pi x_i)) + 10$	[-10, 10]
Ackley	$f_2(x) = -20 * e^{-0.2\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n x_j^2}} - e^{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \cos(2\pi x_j)} + 22.71282$	[-5, 5]
Griewank	$f_3(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \prod_{i=1}^n \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	[-600, 600]
Rosenbrock	$f_4(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (1 - x_i)^2 \right]$	[-100, 100]

为了提高轴承同轴度误差评定的精度和效率, 本文选择使用粒子群优化(PSO)算法[11]。PSO 算法是一种模拟鸟类觅食群体智能行为的优化算法, 具有收敛快、计算简单等特点。与传统的最小二乘法相比, PSO 算法能够更好地应对非线性、多极值的优化问题, 因此更适用于复杂的轴承同轴度误差评定。为比较 PSO 算法(粒子群优化算法)、LDW-PSO 算法(惯性权重系数线性递减的粒子群优化算法)和 FAA-PSO 算法(飞行时间自适应调整的粒子群优化算法)此 3 种算法在误差评定中优劣, 将 IPSO 算法(改进后的粒子群优化算法)同以上 3 种算法通过四个经典函数进行测试(函数类型如表 1 所示)。相应取值之间测试函数的三维图如图 3 所示, X 和 Y 坐标表示为函数的取值范围。

3.2. 改进粒子群算法

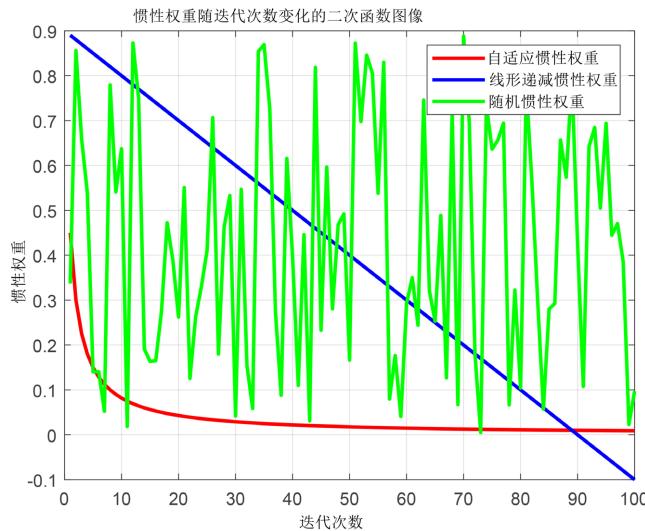


Figure 4. Inertia weights vs. the number of iterations
图 4. 惯性权重与迭代次数关系图

粒子群优化算法(Particle Swarm Optimization, PSO)的性能优化可从多个方面着手。首先, 可以对初始粒子群的位置和速度进行合理的初始化。其次, 合理设置算法参数, 如调整惯性权重(ω)、学习因子(c)等算法参数的数值, 有助于进一步优化算法性能。本文通过对最初的粒子群优化算法中的惯重权数(ω)和学习因子(c)的改良, 从而达到优化的目的。在选取粒子群算法的参数时, 应该根据算法的具体收敛特性来确定合适的参数值, 以提高算法的求解效率和精度。根据大量的试验和分析, 自适应调整惯性权重的方法能够很好地平衡全局搜索和局部搜索的能力, 从而提高算法的性能。因此, 将惯性权重采用线性递减

的策略, 从图 4 可以看出自适应惯性权重在前期使用较大的惯性权重以增强全局搜索能力, 随着迭代的进行, 逐步降低惯性权重以加强局部搜索能力。经过多次实验, 最终将最小惯性权重设置为 0.4 (即 $\omega_{end} = 0.4$), 最大惯性权重设置为 0.9 (即 $\omega_{start} = 0.9$)。

通过对同步学习因子和异步学习因子收敛速度进行实验中得到异步学习因子下可以收敛速度更快, 而同步学习因子收敛的速度大致为异步学习因子收敛速度的 2.5 倍。基于对本课题的研究, 选择收敛速度更快的异步学习因子, 为了进一步降低算法出现收敛时间增加的概率, 采用参数调优的方法来实现。

通过实验和对算法的性能评估, 找到目前最优的解决问题的参数设置。在每次迭代中, 根据选择的更新策略, 动态调整学习因子, 利用更新后的学习因子来调整粒子的速度、更新公式。基于此将自我学习因子 c_1 设置为 2.5 ($c_1 = 2.5$), 社会学习因子 c_2 设置为 1.0 ($c_2 = 1.0$)。通过以上实施过程, 对粒子群优化算法的权重系数和学习因子进行改进, 可提升算法性能, 使其在解决优化问题时更加有效。MATLAB 程序中输入初始参数如表 2 所示。

Table 2. Improved particle swarm algorithm parameter setting values
表 2. 改进粒子群算法参数设置数值

参数名称	数值
粒子群规模 T	30
空间维度 D	30
总迭代次数 t	1000
最小惯性权重 ω_{end}	0.4
最大惯性权重 ω_{start}	0.9
自我因子 c_1	2.5
社会因子 c_2	1.0

将测试函数在相同的环境下[12]进行运行。测试函数空间维度 $D = 30$, 最大搜索代数为 500。利用 Matlab 软件运算出函数的迭代次数和成功收敛率。测试函数结果如表 3 所示。

Table 3. Test function results
表 3. 测试函数结果

测试函数	测量项	IPSO	PSO	LDW-PSO	FAA-PSO
F1	迭代次数	128	148	145	344
	成功收敛率	100%	100%	100%	100%
F2	迭代次数	102	150	171	234
	成功收敛率	100%	100%	100%	100%
F3	迭代次数	116	142	202	295
	成功收敛率	100%	100%	100%	100%
F4	迭代次数	106	162	195	322
	成功收敛率	100%	100%	100%	100%

从表 3 可以得出, IPSO 算法对应的 4 个不同的测试函数的迭代次数分别为 128、102、116 和 106,

其算法的迭代次数明显少于 PSO 算法、LDW-PSO 算法和 FAA-PSO 算法。故选用 IPSO 算法来对实际测量的数据进行误差评定。

3.3. 误差评定步骤

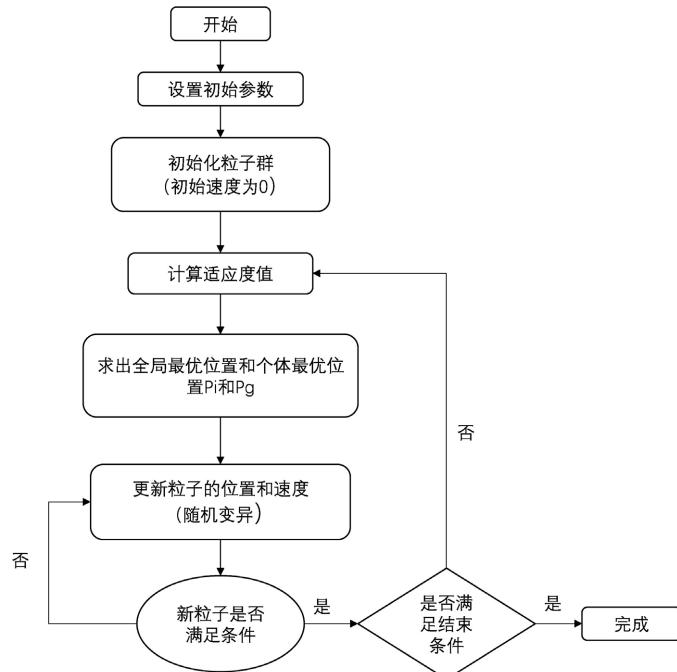


Figure 5. Flow diagram of the IPSO algorithm
图 5. IPSO 算法流程图

根据改进的粒子群优化算法, 求解基准圆柱面轴线方程时, 适应度函数为:

$$F_1 = \frac{1}{F(a, b, c, l, m, n)} = \frac{1}{\min(d_{\max} - d_{\min})} \quad (8)$$

使用改进后的粒子群优化算法去搜寻基准圆柱面轴线的精确位置时, 其适应度函数为:

$$F_2 = \frac{1}{F(x_j, y_j)} \frac{1}{\min(d'_{\max} - d'_{\min})} \quad (9)$$

具体操作步骤如下:

Step1: 参数设置[13]。设置粒子群规模 $N = 30$, 最大惯性权重系数 $\omega_{\max} = 1.2$, 最小惯性权重系数 $\omega_{\min} = 0.2$ 。学习因子 c_1 和 c_2 的初始值分别为 1.5 和 1.5, 学习因子 c_1 和 c_2 的迭代终值分别为 0.5 和 2.5, 最大搜索代数为 500。

Step2: 初始化粒子群。随机产生粒子群初始位置($t = 0$)时的位置和速度。

$$\begin{aligned} X_i^0 &= (a_i^0, b_i^0, c_i^0, l, m_i^0, n_i^0) \\ V_i^0 &= (V_i^a 0, V_i^b 0, V_i^c 0, V_i^l 0, V_i^m 0, V_i^n 0) \\ X_i^0 &= (x_i^{j0}, y_i^{j0}) \\ V_i^0 &= (V_i^{xj0}, V_i^{yj0}) \end{aligned} \quad (10)$$

Step3: 计算适应值(同轴度误差)。对于每一个粒子的当前位置, 计算其对应的同轴度误差作为适应值。

Step4: 更新全局最优位置和个体最优位置。根据当前适应值更新全局最优位置 P_{gbest} 和每个粒子的个体最优位置 P_{ipbest} 。

Step5: 更新粒子的位置和速度。根据粒子的当前位置、速度以及全局与个体最优位置, 利用以下公式更新粒子的位置和速度。

Step6: 判断是否满足收敛条件。在每次迭代后, 检查是否满足收敛条件。如果满足收敛条件, 则停止迭代, 输出最优解; 否则继续迭代。

Step7: 重复迭代。若未满足收敛条件, 则重复 Step3 至 Step6, 直到满足收敛条件为止。

Step8: 输出最优解。当满足收敛条件时, 输出全局最优位置所代表的同轴度误差最小的参数组合, 即为最优解。

改进的粒子群优化算法的操作流程图, 如图 5 所示。

4. 实例研究

4.1. 三坐标测量实验

采用 Micro Plus 866 高精度三坐标测量机[2] [14]对型号为 63082RZC3 深沟球轴承内外径进行的测量, 该测量机量程为 $300 \text{ mm} \times 400 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}$, 空间分辨率为 $0.1 \mu\text{m}$, 测量精度可达 $\pm (1.2 + L/300) \mu\text{m}$ (L 为被测量的长度, 单位为 mm), 实验在恒温恒湿的实验室环境中进行, 以确保测量过程中环境因素的稳定性。如图 6 所示为三坐标测量机测量实验的流程图, 测得数据如表 4、表 5 所示。

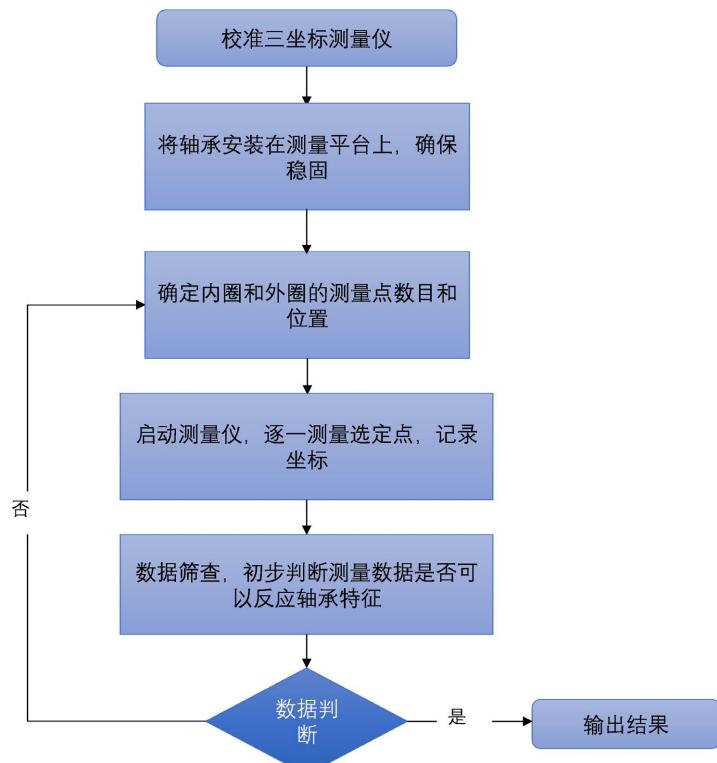


Figure 6. Flow chart of the CMM measurement experiment

图 6. 三坐标测量机测量实验流程图

Table 4. Data for reference cylindrical profile measurement points**表 4.** 基准圆柱面轮廓测点数据

序号	X	Y	Z	序号	X	Y	Z
1	31.0014	0.0005	-8.0011	11	25.084	-18.2215	-1.9985
2	25.0797	18.2203	-8.0003	12	9.5827	-29.4829	-1.9995
3	9.5809	29.48	-8.0008	13	-9.578	-29.4789	-1.9985
4	-9.5744	29.4758	-8.0008	14	-25.0724	-18.2154	-1.999
5	-25.068	18.213	-7.9997	15	-30.9874	0.0004	-1.9994
6	-30.9865	0.001	-7.999	16	-25.0696	18.2143	-2.0011
7	-25.0738	-18.2174	-7.9982	17	-9.576	29.4769	-2.0009
8	-9.5768	-29.4812	-7.9991	18	9.5792	29.4796	-2.0008
9	9.5814	-29.4835	-7.9985	19	25.0795	18.2196	-2.0005
10	25.0825	-18.2212	-7.999	20	31.0027	0.0009	-1.9978

Table 5. Measured data of the measured cylindrical cross-section profile**表 5.** 被测圆柱面截面轮廓测点数据

NO	X	Y	Z	NO	X	Y	Z
1	19.9956	0.0006	-8.0011	21	19.995	0	-1.9983
2	16.1752	11.7548	-8	22	16.1763	11.7528	-2.0002
3	6.1773	19.0183	-7.9984	23	6.1788	19.0164	-2.0003
4	-6.179	19.0174	-7.9991	24	-6.1788	19.0164	-1.9995
5	-16.1768	11.7533	-7.9991	25	-16.1763	11.7528	-1.9989
6	-19.9952	0.0003	-7.9991	26	-19.995	0	-1.9995
7	-16.1765	-11.7536	-7.9986	27	-16.1763	-11.7528	-1.9995
8	-6.1783	-19.0173	-7.999	28	-6.1788	-19.0164	-1.9998
9	6.1809	-19.0169	-7.9996	29	6.1788	-19.0164	-1.9996
10	16.1774	-11.7519	-7.9995	30	16.1763	-11.7528	-1.9992
11	16.1782	-11.7537	-7.9983	31	16.1763	-11.7528	-1.9983
12	6.1803	-19.017	-8.0002	32	6.1788	-19.0164	-2.0001
13	-6.1792	-19.0159	-8.001	33	-6.1788	-19.0164	-2.001
14	-16.1759	-11.7524	-7.9991	34	-16.1763	-11.7528	-1.9991
15	-19.9947	0.0008	-7.9986	35	-19.995	0	-1.9986
16	-16.1781	11.7546	-7.9993	36	-16.1763	11.7528	-1.9995
17	-6.1789	19.0178	-7.9992	37	-6.1788	19.0164	-1.9998
18	6.1781	19.0166	-7.9998	38	6.1788	19.0164	-1.9998
19	16.1755	11.7529	-7.9994	39	16.1763	11.7528	-1.9994
20	19.9974	0.0006	-7.9993	40	19.995	0	-1.9995

4.2. 模型求解与实验验证

Table 6. Error calculation table of the improved particle swarm optimization algorithm
表 6. 改进粒子群优化算法误差计算表

组数	序号	同轴度误差值	平均误差值
1	1	0.0167	0.0151
	2	0.0145	
	3	0.0149	
	4	0.0161	
	5	0.0137	
2	1	0.0140	0.0161
	2	0.0181	
	3	0.0143	
	4	0.0187	
	5	0.0152	

基于前述的轴承同轴度误差评定模型, 采用改进的粒子群优化算法对模型进行求解。

具体实施步骤如下:

- 1) 输入轴承基准圆柱面轮廓测点和被测圆柱面截面轮廓测量点坐标数据;
- 2) 利用式(1)~(3)计算基准轴线方程和基准轴线与测点距离;
- 3) 利用式(4)~(6)计算被测截面圆心轴线位置;
- 4) 将基准轴线和被测截面圆心轴线位置代入式(7), 计算轴承的同轴度误差。

表 6 为 10 次测试结果, 计算得到的两组轴承同轴度平均误差分别为 0.0151 mm 和 0.0161 mm, 两组的评定结果相差较小仅为 0.001 mm, 说明改进粒子群优化算法具有良好的重复性。而采用三坐标测量 PC-DIMS 软件系统[15]自带的最小二乘法评定结果为 0.0292 mm, 相比于采用改进粒子群优化算法计算出的结果明显增大, 结果表明, 改进的粒子群优算法能够更准确地评估轴承的同轴度误差, 相比于传统的最小二乘法具有更优的性能。

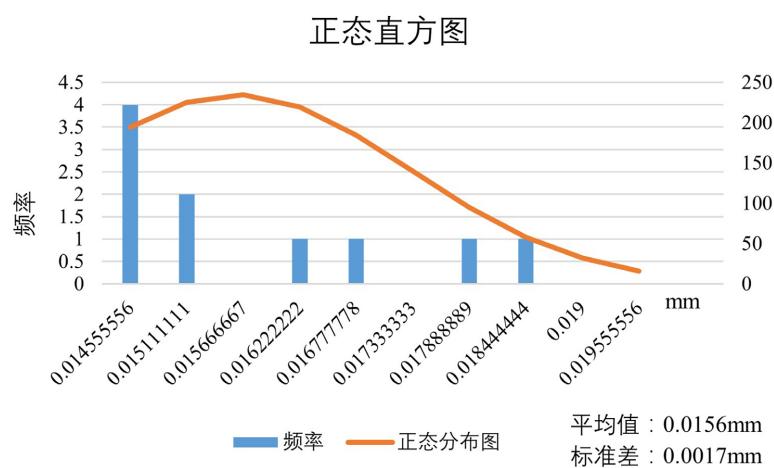


Figure 7. Measurement error normal histogram

图 7. 测量误差正态直方图

通过进一步分析了测量误差的统计特性。图 7 给出了 10 次测试结果的正态直方图。可以看出误差服

从正态分布, 标准差为 0.0017 mm。这说明改进粒子群优化算法对测量数据具有较强的鲁棒性, 能够有效抑制随机误差的影响。

5. 结束语

本文研究了一种基于三坐标的同轴度误差评定方法, 对轴承的内外圈同轴度误差进行了测量实验, 并采用改进的粒子群算法对三坐标测量仪测得的数据进行误差评定。研究结果表明: 建立的轴承同轴度误差数学模型有效支持了误差评定过程。改进的粒子群优化算法(IPSO)在同轴度误差测量中显著提高了测量精度, 实验结果显示其平均误差为 0.0151 mm 和 0.0161 mm, 明显优于传统最小二乘法的 0.0292 mm。此外, 优化测量点布局显著提升了对轴承表面特征的全面反映能力。通过对算法中惯性权重和学习因子的优化, 进一步增强了算法的收敛速度及其处理复杂问题的能力。这些结论为轴承同轴度误差的精准测量与评定提供了重要的理论基础和方法支持, 具有广泛的应用前景。

致 谢

在此, 我要感谢我的导师徐旭松, 感谢他在研究过程中给予的指导和支持。同时, 我也要感谢测量院的同学们, 他们在测量轴承同轴度数据的方面给我提供了很大的帮助。

此外, 感谢所有参与本研究的受访者, 你们的配合与支持使得我的研究得以顺利进行。最后, 我要特别感谢我的家人, 他们的理解和鼓励让我在科研的道路上不断前行。

再次感谢所有帮助和支持我的人, 没有你们的贡献, 这项研究将无法完成。

参考文献

- [1] 杜晓宇, 钱仲凯, 张旭, 等. 新一代产品几何技术规范及其在我国轴承行业推广应用的必要性[J]. 轴承, 2019(5): 66-69.
- [2] 刘军丽, 张旭, 李权洋, 等. 工程测量中三坐标测量机拟合算法的选择[J]. 微电机, 2023, 56(12): 60-62, 66.
- [3] Roy, U. and Xu, Y. (1995) Form and Orientation Tolerance Analysis for Cylindrical Surfaces in Computer-Aided Inspection. *Computers in Industry*, **26**, 127-134. [https://doi.org/10.1016/0166-3615\(94\)00031-k](https://doi.org/10.1016/0166-3615(94)00031-k)
- [4] 金波, 张立强. 基于优化粒子群算法的铰链孔系同轴度误差评定[J]. 智能计算机与应用, 2020, 10(1): 109-112.
- [5] Yingjie, Z. and Liling, G. (2020) A Novel Geometry Error Measurement Methodology for Coaxiality Evaluation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, **235**, 627-639. <https://doi.org/10.1177/0954405420968176>
- [6] 窦亚萍, 郑述, 杨治飞, 等. 基于三维点云的曲轴同轴度误差测量方法研究[J]. 制造技术与机床, 2024(1): 185-190.
- [7] 糜兆强. 缸体平衡轴孔同轴度偏差问题分析及解决[J]. 制造技术与机床, 2024(3): 156-160.
- [8] 唐力, 张琳娜. 基于新一代 GPS 的同轴度误差评定关键技术研究[J]. 制造技术与机床, 2008(12): 102-105.
- [9] 许家赫, 陈岳坪. 布谷鸟算法在同轴度误差评定中的应用[J]. 机械设计与制造, 2022(3): 219-222.
- [10] 翟旭军, 张小萍, 周圣铧. 基于改进粒子群算法的同轴度误差评定及其可视化[J]. 组合机床与自动化加工技术, 2012(12): 55-59.
- [11] Wang, D., Tan, D. and Liu, L. (2017) Particle Swarm Optimization Algorithm: An Overview. *Soft Computing*, **22**, 387-408. <https://doi.org/10.1007/s00500-016-2474-6>
- [12] Liu, Y., Li, R., Sun, C., Mei, Y., Wang, X., Tan, J., et al. (2021) A Coaxiality Measurement Model Based on Multi-Systematic Errors Separation for Turbine Shaft. *Measurement*, **186**, Article 109975. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2021.109975>
- [13] 亢国栋, 孙伟, 杨海群, 等. 基于改进粒子群优化算法的火电厂机组负荷分配[J]. 计算机测量与控制, 2015, 23(2): 593-596.
- [14] 王文书. 三坐标测量机对同轴度误差测量方法的探索[J]. 制造技术与机床, 2010(11): 94-97.
- [15] Solaguren-Beascoa Fernández, M. (2018) MATLAB Implementation for Evaluation of Measurements by the Generalized Method of Least Squares. *Measurement*, **114**, 218-225. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.09.039>