Mechanical Engineering and Technology 机械工程与技术, 2025, 14(2), 257-267
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/met
https://doi.org/10.12677/met.2025.142025

Hans汉斯

船舶压缩机往复惯性力计算分析与改进研究

秦　珩[1]，陆鹏程[2]，梁前超[2]

[1]大连海军学院，辽宁　大连
[2]安徽华晶机械有限公司，安徽　安庆

收稿日期：2025年3月30日；录用日期：2025年4月23日；发布日期：2025年4月30日

摘　要

文章采用欧拉公式研究压缩机的振动、噪声问题并改进其计算结果。利用复变函数论推导出W型机器运转时一、二阶惯性力公式与图像、相位与幅值，从理论上揭示夹角γ、往复质量m对其合力的影响。针对具体的型式采用合适的平衡机构诸如行星齿轮机构来平衡一、二阶惯性力。分析结果表明，三列往复运动的机械结构(质量大小、夹角、转速、曲柄连杆比等)决定了其惯性力模式，而与转向无关。

关键词

惯性力公式，惯性力图像歧化，平衡，矩阵变换

Study on Reciprocating Inertia Force Calculation Analysis and Improvement of Marine Compressor

Heng Qin[1], Pengcheng Lu[2], Qianchao Liang[2]

[1]Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning
[2]Anhui Huajing Machinery Co., Ltd., Anqing Anhui

Received: Mar. 30th, 2025; accepted: Apr. 23rd, 2025; published: Apr. 30th, 2025

Abstract

In this paper, Euler formula is used to study the vibration and noise of compressors and improve its calculation results. The first- and second-order inertia force formulae and images, phases and amplitudes of W-type machines are derived by using complex variable function theory. The influence of angle γ and reciprocating mass m on resultant force is theoretically revealed. An appropriate balancing mechanism, such as planetary gear mechanism, is used to balance the first- and second-order inertial

文章引用: 秦珩, 陆鹏程, 梁前超. 船舶压缩机往复惯性力计算分析与改进研究[J]. 机械工程与技术, 2025, 14(2): 257-267. DOI: 10.12677/met.2025.142025

forces according to specific types. The analysis results show that the mechanical structure of the three-column reciprocating machinery (mass size, angle, speed, crank link ratio, etc.) determines its inertial force pattern, which is independent of the steering.

Keywords

Inertia Force Formula, Inertia Force Image Disproportionation, Balance, Matrix Transformation

1. 序言

W 型压缩机产品有 0.5/14、0.9/10、1.25/10、1.8/8、CW480/40 系列等[1]。机器在初始试制中活塞等往复质量控制不理想，机器的设计转速 1000 r/min 左右，机器试制时振动烈度都较高。批量投产铝活塞的质量也在强度允许范围内有所下降。本文以单曲拐、W 型角度式压缩机为例，从理论上分析推导出机器的一、二阶往复惯性力的公式，该惯性力作用在曲轴箱体中心点上，惯性力的矢端在曲轴的运动平面上形成了惯性力的矢端轨迹力图，以提出合适的平衡一、二阶往复惯性力的措施用以推动国内的压缩机的升级换代。

2. 往复惯性力理论分析

2.1. 正方向问题

W 型压缩机的三列连杆并列于同一的曲拐轴上，之间夹角 60°。两级压缩机有两级，设一级的往复部件质量为 m_{s1}，二级往复部件质量为 m_{s2}，以图示的右边的一列 m_{s2} 为基准建立直角坐标系 XOY，规定投影到曲柄方向为 x 轴，与曲柄垂直的方向为 y 轴。这里规定 x 轴正方向是由机器中心向外指，这与压缩机中将连杆受拉伸规定为正值相吻合，压缩机动力计算时也将曲柄在上死点位置时运动部件受到的往复惯性力为正的最大值。y 轴的正方向规定为将 x 轴顺旋转方向转一直角方向为其正方向。

2.2. 研究方法

采用欧拉公式研究三列惯性力矢量的合力问题，将教科书上推导过程中采用垂直和水平方向两个式子合并成一个式子，这里规定 x 轴代表向量的实部，y 轴代表向量的虚部，二者连接采用虚数单位 i 来连接。运用到的相关公式如下：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1}$$

其中，e 为工程指数，i 为虚数单位，θ 为曲柄转角，单位为弧度，规定顺时针旋转方向为正值，θ 为变量函数。该式子描述的也就是单位圆。

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{e^{i\theta}} \tag{2}$$

该式子也是上述复数的共轭复数。

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \tag{3}$$

一阶惯性力是余弦函数，本文将用一对互为共轭的复数的平均值来研究一、二阶惯性力。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+e^{-i(\theta+2\gamma)}\right)&=\frac{\cos\theta+\cos(\theta+2\gamma)}{2}+i\frac{\sin\theta-\sin(\theta+2\gamma)}{2}\\&=\cos(\theta+\gamma)\cos\gamma-i\cos(\theta+\gamma)\sin\gamma\end{aligned}\tag{4}$$

它巧妙地运用到两个不同相位的欧拉函数的代数和来研究惯性力的投影问题。式子的右边正好是图示中中间列一阶惯性力投影到 XOY 坐标系上两个方向上两个力的大小，根据前面规定了 x、y 轴的正方向，注意到上式的虚部应为负值。该式的“γ”用“-γ”代替后形成新的公式后文中也会运用到它。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(e^{i(2\theta-\gamma)}+e^{-i(2\theta-3\gamma)}\right)&=\frac{\cos(2\theta-\gamma)+\cos(2\theta-3\gamma)}{2}+i\frac{\sin(2\theta-\gamma)-\sin(2\theta-3\gamma)}{2}\\&=\cos(2\theta-2\gamma)\cos\gamma+i\cos(2\theta-2\gamma)\sin\gamma\end{aligned}\tag{5}$$

该式子是图 2 中间列二阶惯性力投影到 XOY 坐标系上两个方向上两个力的大小。该式的“γ”用“-γ”代替后形成新的公式就是二阶惯性力的计算公式。

2.3. 研究重点

本文研究惯性力的计算公式及其图像，顾及三列不同的往复质量对计算公式的影响，分析两种往复质量的计算公式，通常 θ 角的计入零点规定为 m_{s2} 列活塞处于上死点的位置。文中得到的计算公式与选择上面的计入零点无关。为什么无关呢？下面就通过 W 型压缩机往复惯性力的理论分析后进行具体的压缩机 A、B、C 类转动时一阶惯性力计算和二阶惯性力的变化计算。进行定量的计算对 W 型压缩机的减少机械的震动和减少 W 型压缩机的故障具有重大意义。国内外对这方面研究一直在不断探索中。例如学者 Kyrtatos 等、李松虎[2]-[5]等，对 3W 型活塞压缩机的往复惯性力都进行了一阶惯性力计算和二阶惯性力的分析，但是缺少有力的计算工具和推动国内外的压缩机的升级换代。

3. W 型压缩机 A、B、C 类顺时针转动时的惯性力

3.1. A 类顺时针转动时的惯性力

W 型压缩机 A 类往复质量偏置如图 1 所示。转动时的惯性力：

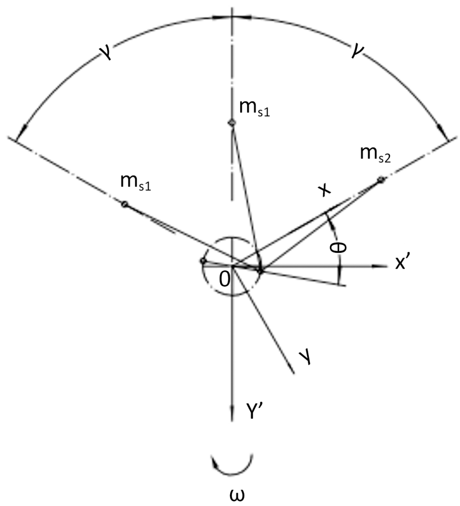

Figure 1. W-type compressor Class A reciprocating mass offset diagram
图 1. W 型压缩机 A 类往复质量偏置图

$$C = r\omega^2 \tag{6}$$

其中，r 为曲柄半径。ω 为旋转角速度，以弧度计入计算。C 为后文列出的公式书写方便引入的记号。

$$\gamma = \frac{\pi}{3}$$

1) 一阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+4\gamma)}\right) + \frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta+2\gamma)}\right) + \frac{1}{2}m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \tag{7}$$

$$I_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}\right) + \frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}\right) + \frac{1}{2}m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$I_{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{2}m_{s2} + m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{2}m_{s2}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \tag{8}$$

该式用到了三角函数的和差化积公式。

$$I_{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{2}m_{s2} + m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{2}m_{s2}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \frac{1}{2}m_{s1}C\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$I_{\mathrm{I}} = \left(\frac{1}{2}m_{s2} + m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \left(\frac{1}{2}m_{s2} - \frac{1}{2}m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$I_{\mathrm{I}} = \left(m_{s2} + \frac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos\theta + i\left(\frac{3}{2}m_{s1}C\sin\theta\right) \tag{9}$$

上式就是 W 型夹角 60˚一阶往复惯性力复数表达式。

$$\frac{x^2}{\left[\left(m_{s2} + \frac{1}{2}m_{s1}\right)C\right]^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}m_{s1}C\right)^2} = 1 \tag{10}$$

上式表明，一阶惯性力矢端轨迹是一椭圆，变化的周期和曲轴旋转的周期相同。该椭圆的图像在运动平面上相当于将标准椭圆顺时针旋转了 30˚，若 $m_{s2} > m_{s1}$，长半轴为$(m_{s2} + 0.5m_{s1})C$，短半轴为$(1.5m_{s1})C$；若 $m_{s2} = m_{s1}$，椭圆退化成圆，半径为$(1.5m_{s1})C$。

2) 二阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta+2\gamma)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta+6\gamma)}\right] + \frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{i(2\theta+\gamma)} + \mathrm{e}^{-i(2\theta+3\gamma)}\right] + \frac{1}{2}\lambda m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right) \tag{11}$$

式中，λ 为曲柄半径连杆比，意义为：W 型压缩机的曲柄半径 R/连杆 L。

$$I_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta+2\pi)}\right] + \frac{1}{2}\lambda m_{s1}C[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta+\pi)}] + \frac{1}{2}\lambda m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right)$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}\left[\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\sqrt{3}\sin 2\theta + \mathrm{i}\sqrt{3}\cos 2\theta \tag{12}$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta+\pi)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta+2\pi)} = 0 \tag{13}$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left(-\sqrt{3}\sin 2\theta+\mathrm{i}\sqrt{3}\cos 2\theta\right)$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\cos 2\theta \tag{14}$$

这是 W 型夹角 60˚二阶往复惯性力复数表达式。

$$\begin{cases} I_{\mathrm{II}X}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta \\ I_{\mathrm{II}Y}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\cos 2\theta \end{cases} \tag{15}$$

这也是二阶惯性力参数方程的表达式。

为寻找上述方程所描述的图像，先假定两个往复质量相等，利用寻找两个变量的二次多项式方程方法和矩阵转换法来进行。

$$m_{s1}=m_{s2}=m \tag{16}$$

$$B=\lambda mC \tag{17}$$

$$X=\frac{x}{B}\quad Y=\frac{y}{B}$$

$$\begin{cases} x=B\cos 2\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\sin 2\theta \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\cos 2\theta \end{cases}$$

$$X^2-\frac{4}{\sqrt{3}}XY+\frac{7}{3}Y^2-\frac{3}{4}=0 \tag{18}$$

$$AC=\frac{7}{3}\neq 0\quad B^2-4AC=-4<0$$

根据线性代数中二次多项式的判别式定理，满足上两个条件，所以二阶惯性力也是一个椭圆。

坐标系顺转 30˚后，由于 y 轴在标准直角坐标的对面，相当于坐标系逆时针旋转 30˚，作坐标系的矩阵变换的因子为$\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{6} & \sin\frac{\pi}{6}\\ -\sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6}\end{bmatrix}$。

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}X'\\Y'\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta-\frac{3}{4}\sin 2\theta\\ \frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\\ \frac{1}{2}\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{19}$$

上式清晰地表明二阶惯性力的轨迹是椭圆，变化的周期是曲轴旋转的周期的一半。经坐标系的旋转变换后的参数方程表明：该椭圆的长半轴是短半轴的 3 倍，不论是在 XOY 坐标系还是在 X’OY’坐标系

中，其椭圆的长半轴始终在水平方向，这与三列活塞在旋转平面的分布紧密联系，后文还分析表明，不论 m_{s2} 处于偏置还是中间位置，不论旋转方向，二阶惯性力矢端力图始终是椭圆，该椭圆的长轴始终处于水平方向，不过其相位变化比较复杂，由式(19)可以看出 θ 为 30°时，力矢到达该椭圆的短半轴位置，这两个矢量不在同一方向成 90°，θ 为−15°时，力矢到达该椭圆的长半轴位置，这两个矢量不在同一方向成 45°。二阶惯性力的变化比曲轴自身旋转变化快一倍[6] [7]。

3.2. B 类反时针转动时的惯性力

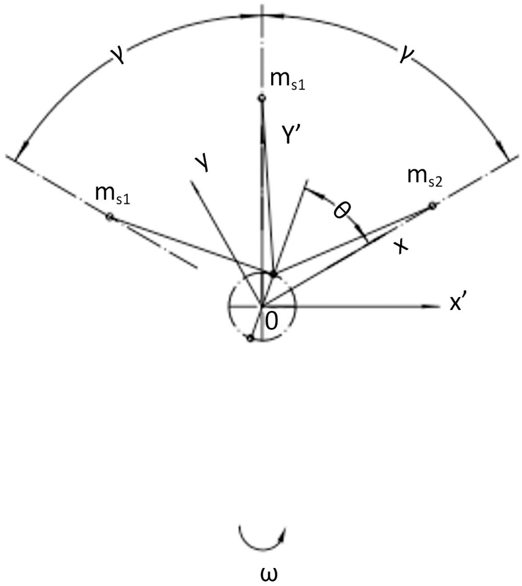

Figure 2. W-type compressor Class B reciprocating mass offset diagram
图 2. W 型压缩机 B 类往复质量偏置图

1) 一阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-4\gamma)}\right)+\frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-2\gamma)}\right)+\frac{1}{2}m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right) \tag{20}$$

$$I_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta-\frac{4\pi}{3}\right)}\right)+\frac{1}{2}m_{s1}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\left(\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)+\frac{1}{2}m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$I_{\mathrm{I}}=\left(\frac{1}{2}m_{s2}+m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\frac{1}{2}m_{s2}C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+\frac{1}{2}m_{s1}C\left(-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)$$

$$I_{\mathrm{I}}=\left(\frac{1}{2}m_{s2}+m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\left(\frac{1}{2}m_{s2}-\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$$

$$I_{\mathrm{I}}=\left(m_{s2}+\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos\theta+\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}m_{s1}C\sin\theta\right)$$

$$\begin{cases}I_{\mathrm{IX}}=\left(m_{s2}+\dfrac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos\theta\\ I_{\mathrm{IY}}=\dfrac{3}{2}m_{s1}C\sin\theta\end{cases}$$

$$\frac{x^2}{\left[\left(m_{s2}+\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\right]^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}m_{s1}C\right)^2}=1 \tag{21}$$

该式表明反时针旋转时，一阶惯性力复数方程和直角坐标方程形式上与顺时针旋转时完全相同，说明 W 型 60°布置时，轨迹力图与转向无关，轨迹力矢的方向始终在曲柄转动方向矢附近。当二者质量相等时，就成圆的变化，能够在曲柄的反方向加一合适的平衡重，达到完全平衡掉一阶往复惯性力，如图 2 所示。

2) 二阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta-2\gamma)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-6\gamma)}\right]+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\theta-\gamma)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-3\gamma)}\right]+\frac{1}{2}\lambda m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right) \tag{22}$$

$$I_{\mathrm{II}}=\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-2\pi)}\right]+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-\pi)}\right]+\frac{1}{2}\lambda m_{s2}C\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\theta}\right)$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2\theta-\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{3}\left[\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{3}\sin 2\theta-\mathrm{i}\sqrt{3}\cos 2\theta$$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-\pi)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2\theta-2\pi)}=-\cos 2\theta+\mathrm{i}\sin 2\theta+\cos 2\theta-i\sin 2\theta=0$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left(\sqrt{3}\sin 2\theta-\mathrm{i}\sqrt{3}\cos 2\theta\right)$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\cos 2\theta \tag{23}$$

$$\begin{cases} I_{\mathrm{II}X}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta \\ I_{\mathrm{II}Y}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\lambda m_{s1}C\cos 2\theta \end{cases} \tag{24}$$

上式表明反时针旋转时，二阶惯性力直角坐标方程形式上与顺时针旋转时不同，说明换一个方向旋转时，需要另一种方程描述二阶惯性力的表现形式，后文的计算表明，它们的轨迹力图是相同的。文章从理论提供了该力矢的数学表达式，希望能找到一种合适的机构加装上也能够平衡掉二阶往复惯性力。

下面仿照上面的假设，推导出它是一椭圆的依据[8]。

$$m_{s1}=m_{s2}=m$$

$$B=\lambda mC$$

$$X=\frac{x}{B}\quad Y=\frac{y}{B}$$

$$\begin{cases} x=B\cos 2\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\sin 2\theta \\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}B\cos 2\theta \end{cases}$$

$$X^2+\frac{4}{\sqrt{3}}XY+\frac{7}{3}Y^2-\frac{3}{4}=0 \tag{25}$$

$$AC=\frac{7}{3}\neq 0\quad B^2-4AC=-4\leq 0$$

坐标系顺转 30°后，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}X'\\Y'\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)&\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\-\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)&\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\\-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{4}\cos 2\theta+\frac{3}{4}\sin 2\theta\\-\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\cos\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\\\frac{1}{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{26}$$

3.3. C 类顺时针转动时的惯性力

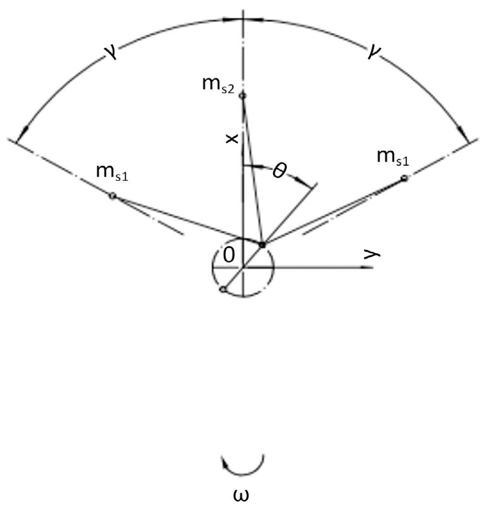

Figure 3. W-type compressor Class C reciprocating mass offset diagram
图 3. W 型压缩机 C 类往复质量偏置图

1) 一阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}m_{s1}C\left(e^{i\theta}+e^{-i(\theta+2\gamma)}\right)+\frac{1}{2}m_{s2}C\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)+\frac{1}{2}m_{s1}C\left(e^{i\theta}+e^{-i(\theta-2\gamma)}\right)\tag{27}$$

$$I_{\mathrm{I}}=\left(\frac{1}{2}m_{s2}+m_{s1}\right)Ce^{i\theta}+\frac{1}{2}\left(m_{s2}-m_{s1}\right)Ce^{-i\theta}$$

$$I_{\mathrm{I}}=\left(m_{s2}+\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos\theta+i\left(\frac{3}{2}m_{s1}C\sin\theta\right)\tag{28}$$

一阶力矢成椭圆变化。

2) 二阶惯性力的计算

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[e^{i\left(2\theta-\frac{\pi}{3}\right)}+e^{i\left(2\theta+\frac{\pi}{3}\right)}+e^{-i(2\theta-\pi)}+e^{-i(2\theta+\pi)}\right]\tag{29}$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda m_{s2}C\cos 2\theta+\frac{1}{2}\lambda m_{s1}C\left[e^{i2\theta}-2e^{-i2\theta}\right]$$

$$I_{\mathrm{II}}=\lambda\left(m_{s2}-\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos 2\theta+\mathrm{i}\frac{3}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta$$

$$\begin{cases} I_{\mathrm{II}X}=\lambda\left(m_{s2}-\frac{1}{2}m_{s1}\right)C\cos 2\theta \\ I_{\mathrm{II}Y}=\frac{3}{2}\lambda m_{s1}C\sin 2\theta \end{cases} \tag{30}$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}B\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}B\right)^2}=1 \tag{31}$$

二阶力矢也成椭圆变化，这种布置时 θ 为 0˚时，力矢到达该椭圆的短半轴位置，曲柄方向矢与二阶力矢在同一方向。如图 3 所示。

3) 讨论

对于图 3 所示分布的机器，由式(28)、(30)可知，① 当 $m_{s2}=m_{s1}$ 时，一阶惯性力成圆的分布，二阶惯性力成长短轴之比为 3:1 椭圆的分布；② 当 $m_{s2}=2m_{s1}$ 时，一阶惯性力成长短轴之比为 5:3 椭圆的分布，二阶惯性力成圆的分布。

从上面的三种情况分析和计算，可以得出 W 型 60˚布置有两个 m_{s1}、一个 m_{s2} 往复质量。1) 一阶惯性力是一椭圆，m_{s2} 列中心线是该椭圆的一个对称轴方向，不论 m_{s1}、m_{s1}，m_{s2} 在运动平面上如何分布，若 $m_{s2}>m_{s1}$，则长轴在 m_{s2} 列方向，反之则短轴在 m_{s2} 列方向。2) 二阶惯性力也是一椭圆，若 $m_{s1}=m_{s2}$，不论采用上面三种情况的特殊情形来计算，该椭圆的长轴始终在水平方向，短轴在竖直方向，并且长半轴是短半轴的 3 倍。若 $m_{s1}\neq m_{s2}$，则会将原来标准的椭圆作一适量旋转，长短半轴的数值也会作微量变化[5]。

4. 计算结论

以某型全无油空压机为例分析 W 型 60˚二级压缩机的一、二阶往复惯性力。其中，一级往复质量 m_{s1} 为 1.82 kg，二级往复质量 m_{s2} 为 1.76 kg，曲柄半径为 0.0375 m，曲柄半径连杆比 λ 为 37.5/195，角速度 ω 为 2π × (800/60) rad/s，现将上述结构参数分别代入上文中所列的相关公式中计算分析，其结果如下：

1) 按图 1 形式作顺时针转动，其一、二阶惯性力矢端力图如图 4 所示。

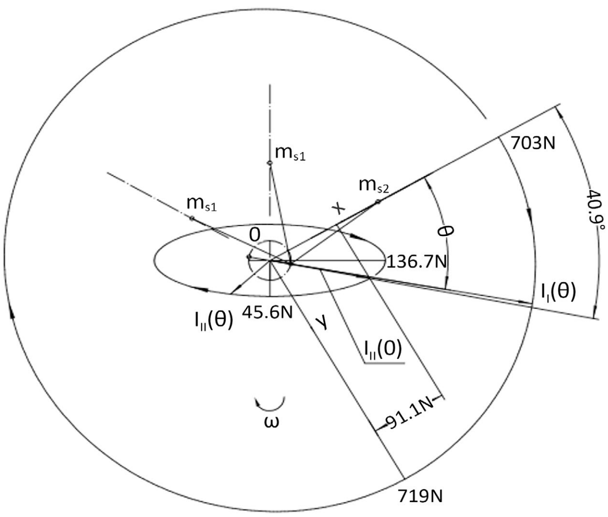

Figure 4. W-type compressor reciprocating mass offset diagram
图 4. W 型压缩机往复质量偏置图

计算结果表明，一阶往复惯性力是一个椭圆，二阶往复惯性力如 $I_{II}(\theta)$所示，它也是一个很明显的椭圆。一阶惯性力的短半轴、长半轴为 703 N、719 N，短轴在 x 轴方向上，该椭圆旋转 30˚后形成标准椭圆。二阶惯性力图是按照总往复质量不变，三列往复质量相等绘制的(下同)，即 $m_{s1}=m_{s2}=1.8\ \text{kg}$，它是一个标准的椭圆，二阶惯性力的长半轴、短半轴为 136.7 N、45.6 N，长轴始终在水平方向，长短轴之比为 3:1。往复质量列表如下所示(见表 1)。

Table 1. Statistics on the deflection of inertial force graphs by differences in reciprocating masses at 60˚ angle
表 1. 60˚夹角时往复质量的不同对惯性力图形的偏转情况的统计

往复质量(总 5.4)		一阶惯性力		二阶惯性力		
m_{s2} (kg)	m_{s1} (kg)	I_{max} (N)	I_{min} (N)	I_{min} (N)	I_{max} (N)	长轴转角
2.16	1.62	781.7	639.6	36.2	144	反转约 5 度
1.98	1.71	746.1	675.1	40.3	140.2	反转约 3 度
1.8	1.8	710.6	710.6	45.6	136.7	0
1.62	1.89	675.1	746.1	51.6	133.4	顺转约 3 度
1.44	1.98	639.6	781.7	58.2	130.4	顺转约 5 度

上表 1 显示了 W 型二级压缩机，二级往复质量 m_{s2} 偏离理论质量引起一阶惯性力成椭圆变化，偏离越多椭圆化越严重，不论质量是增大还是减小；而其一周内的平均值始终不变。而二阶惯性力则始终保持了长轴在水平方向，二级往复质量增大时，原长短径 3:1 的椭圆愈扁平化，减小时愈圆形化。

2) 按图 2 形式作反时针转动，其一、二阶惯性力矢端力图如图 5 所示。

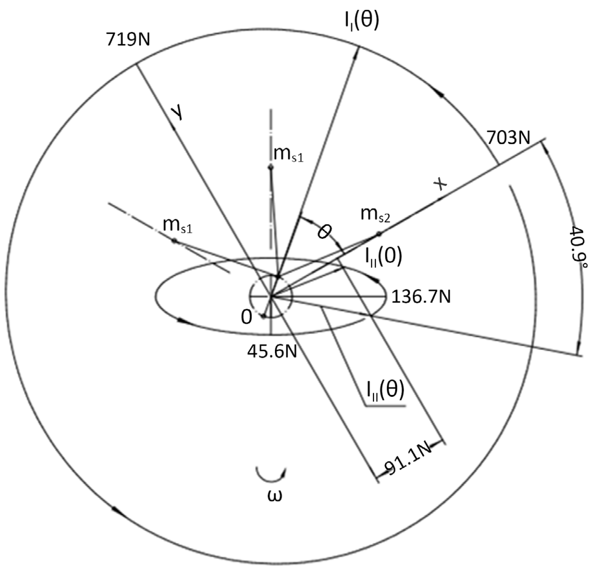

Figure 5. Legend of W-type 60 degree two-stage compressor reciprocating mass m_{s2} offset counterclockwise rotation
图 5. W 型 60 度二级压缩机往复质量 m_{s2} 偏置反时针旋转图例

这里一阶惯性力方向矢量顺着曲柄矢沿轨迹图反时针变化，两阶矢量近似跟随。二阶惯性力图也类似这样，并且图 5 与图 4 起始的二阶惯性力矢量 $I_{II}(0)$不变。

3) 按顺时针转动，其一、二阶惯性力矢端力图如图 6 所示。

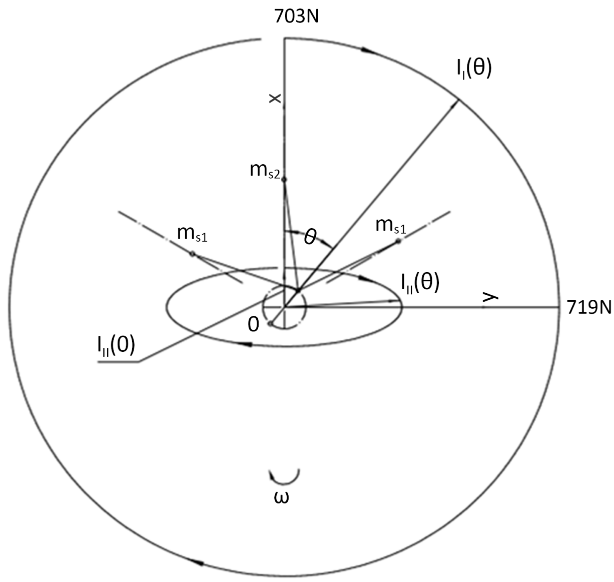

Figure 6. W-type compressor reciprocating mass m_{s2} center clockwise rotation diagram
图 6. W 型压缩机往复质量 m_{s2} 居中顺时针旋转图

5. 结论

对于往复质量固定的这三种分布的型式，一、二阶惯性力矢图非常相似，也就是说结构决定了力矢图。二阶惯性力的椭圆应设法平衡，特别是在机器重量往越来越大的方向发展时，往复质量 m_s、C 值都变大时尤为需要。针对具体的 W 型 60˚二级压缩机的一、二阶往复惯性力计算表明：采用合适的平衡机构诸如行星齿轮机构来平衡一、二阶惯性力，三列往复运动的机械结构(质量大小、夹角、转速、曲柄连杆比等)决定了其惯性力模式，而与转向无关。计算结果对于推动国内压缩机的升级换代具有重要意义。

参考文献

[1] 杨叔华, 梁前超, 焦宇飞. 船舶动力装置仿真模型综述[J]. 动力系统与控制, 2017, 2(6): 91-94.

[2] Kytatos, N.P., Theotokatos, G. and Xiros, N.I. (2000) Main Engine Control for Heavy Weather Conditions. *ISME 6th International Symposium on Marine Engineering*, Tokyo, 23-27 October 2000, 83-86.

[3] Xiros, N.I. and Kyrtatos, N.P. (2000) A Neural Predictor of Propeller Load Demand for Improved Control of Diesel Ship Propulsion. 15*th IEEE*/*ISIC* 2000 *International Symposium on Intelligent Control Engineering*, Patras, 17-19 July 2000, 135-139.

[4] Kyrtatos, N.P., Theotokatos, G., Xiros, N.I., Marek, K. and Duge, R. (2001) Transient Operation of Large-Bore Two-Stroke Marine Diesel Engine Powerplants: Measurements & Simulations. 23*rd CIMAC Congress*, Hamburg, 7-10 May 2001, 97-102.

[5] 李松虎. 3W 型活塞压缩机往复惯性力的分析[J]. 压缩机技术, 1987(3): 18-22.

[6] 陆鹏程, 张光胜. 三星型压缩机振动问题研究[J]. 安徽工程科技学院学报(自然科学版), 2009, 24(1): 62-65.

[7] 朱润凯, 梁前超. 固体氧化物燃料电池与微型燃气轮机联合发电系统建模与仿真研究[J]. 舰船科学技术, 2017, 39(4): 95-99.

[8] 向军, 杨叔华, 孙波, 梁前超. 涡轮增压柴油机修后试验及性能仿真[J]. 内燃机与配件, 2016(10): 92-94.