

考虑周向特性的车轮分形粗糙表面建模方法

李心怡¹, 崔大宾¹, 卢 萍^{2*}

¹西南交通大学机械工程学院, 四川 成都

²成都工业职业技术学院轨道交通学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年5月27日; 录用日期: 2025年6月20日; 发布日期: 2025年6月27日

摘 要

在工程表面表征领域, 分形理论因其对微观形貌特征的多尺度表征能力, 已成为比传统统计参数更精确的表面粗糙度描述方法。针对轮轨接触问题, 车轮表面形貌的精确建模直接影响接触应力分布、车辆动力学行为及磨损演化机理的仿真精度。本文提出一种基于分形理论的车轮粗糙表面建模新方法, 通过 Weierstrass-Mandelbrot 函数生成分形表面, 系统研究分形维数与特征尺度系数对表面形貌的影响规律; 引入三维旋转矩阵实现表面离散点的周向变换, 建立满足车轮旋转周向特性的表面模型。与传统随机叠加方法相比, 本模型能更准确地反映实际车轮运行过程中的表面微观特征, 为轮轨接触状态演化分析提供了一种新的理论建模工具。

关键词

轮轨接触, 分形理论, 粗糙表面

A Fractal Modeling Method for Wheel Rough Surface Considering Circumferential Characteristics

Xinyi Li¹, Dabin Cui¹, Ping Lu^{2*}

¹School of Mechanical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan

²Rail Transit College, Chengdu Vocational & Technical College of Industry, Chengdu Sichuan

Received: May 27th, 2025; accepted: Jun. 20th 2025; published: Jun. 27th, 2025

Abstract

In the field of engineering surface characterization, fractal theory has emerged as a more precise

*通讯作者。

文章引用: 李心怡, 崔大宾, 卢萍. 考虑周向特性的车轮分形粗糙表面建模方法[J]. 机械工程与技术, 2025, 14(3): 386-392. DOI: 10.12677/met.2025.143037

approach for describing surface roughness than traditional statistical parameters, owing to its multiscale characterization capability of microscopic topographic features. For wheel-rail contact problems, the accurate modeling of wheel surface topography directly influences the simulation accuracy of contact stress distribution, vehicle dynamic behavior, and wear evolution mechanisms. This paper proposes a novel fractal-based method for modeling wheel rough surfaces. The Weierstrass-Mandelbrot function is employed to generate fractal surfaces, with systematic investigation of the influence of fractal dimension D and characteristic scale coefficient G on surface morphology. A 3D rotation matrix is introduced to achieve circumferential transformation of discrete surface points, establishing a surface model that satisfies the rotational circumferential characteristics of wheels. Compared with conventional random superposition methods, the proposed model more accurately reflects the microscopic features of actual wheel surfaces during operation, providing a new theoretical modeling tool for analyzing wheel-rail contact state evolution.

Keywords

Wheel-Rail Contact, Fractal Theory, Rough Surface

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随着轮轨磨耗研究的深入, 基于表面光滑假设的赫兹及非赫兹接触理论在复杂接触条件下的适用性面临新的挑战[1]。在磨耗预测领域, 结合 Archard 公式建立的分形磨耗模型为轮轨磨耗寿命评估提供了新的理论工具[2]; 部分学者基于接触分形理论和接头接口的接触阻尼耗散能量的机制, 提出了切向接触阻尼的分形模型[3]; 在表面形貌表征方面, 与尺度无关的分形参数被成功应用于铁路车轮多尺度自仿射地形的量化描述, 显著提升了表面粗糙度的表征精度[4]。分形理论突破了传统统计学参数在表征表面形貌时的尺度局限性, 通过分形维数等核心参数揭示了表面粗糙度的自相似性与尺度不变性特征[5], 为轮轨接触界面的能量耗散机制及磨耗演化规律研究提供了新的理论框架。

2. 二维分形表面模型二维分形表面模型

2.1. 分形理论

粗糙表面的精准表征是计算粗糙轮轨表面的基础, 它不仅能够反映出不同状态下轮轨的粗糙特征, 还会提供计算车轮磨耗的所需的参数。粗糙面的接触摩擦现象可以看作是粗糙面上众多微凸体综合作用的结果, 而有效地表征接触面的粗糙形貌对接触力学模型的建立至关重要。要研究粗糙表面的微观特性需要从两个关键点展开: 粗糙接触面的形貌表征和单个微凸体的接触状态。本章将基于分形理论进行粗糙表面接触模型的建立。基于统计学理论的接触模型虽经多年发展已形成较为完善的理论体系, 但其准确性受采样长度制约, 且对粗糙表面的表征缺乏唯一性。传统欧式几何方法已难以有效表征机械零件表面粗糙形貌的复杂特征。为此, 分形几何理论为解决这一难题提供了新的研究思路。粗糙表面接触下, 两个表面的接触可以视为两个表面上的微凸体的相互挤压。Majumber 与 Bhushan [6]基于 W-M 函数构建了表征粗糙表面形貌的数学模型, 结合接触理论发展出 M-B 模型。该理论模型展现出以下主要特性:

- 1) 将两个粗糙表面的接触问题转化为刚性平面与单个粗糙表面的接触;

- 2) 表面形貌视为统计意义上的各向同性;
- 3) 未考虑接触过程中材料硬度随深度变化的效应、弹性接触产生等的强化现象;
- 4) 假设各个微凸体之间不存在影响, 忽略相邻微凸体间引起的相互作用[7]。

2.2. 二维分形表面建模

分形理论中分形维数、分形粗糙度参数具有自相似性和尺度独立性, 可以实现粗糙面上形貌表征。构造具有自仿射粗糙度的曲面是一种用少量参数控制粗糙度综合表征统计特性的有效方法, 车轮表面具有分形特征, 为了表征列车车轮的多尺度自仿射形貌, 使用了分形几何和比例无关的分形参数进行参数化建模。根据 M-B 分形模型, 可以将两粗糙接触面简化为一刚性平面与柔性粗糙平面接触问题, 其中粗糙平面的轮廓函数为:

$$z(x) = G^{D-1} \sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\gamma^n x)}{\gamma^{(2-D)n}} \quad (1)$$

式中: $z(x)$ 表示表面二维表面轮廓高度; n 为粗糙表面的频率指数; γ 为频率密度因子, 本文中 $\gamma = 1.5$ 。

在粗糙表面形貌的建模中, 设定特征尺度参数为 $G = 1 \times 10^{-8}$, 并选取微凸体的频率指数范围为 0 到 1。为研究分形维数 D 对表面轮廓的影响, 依次取 $D = 1.2$ 、1.4、1.6、1.8 代入式(1)进行计算, 所得二维粗糙轮廓如图 1 所示, 随着分形维数的增大, 二维粗糙表面的轮廓形貌呈现以下变化规律, 表面轮廓变得更加密集且复杂, 轮廓的高度值整体减小, 说明分形维数较高的表面具有更精细的微观结构, 宏观上表现为更低的粗糙度。

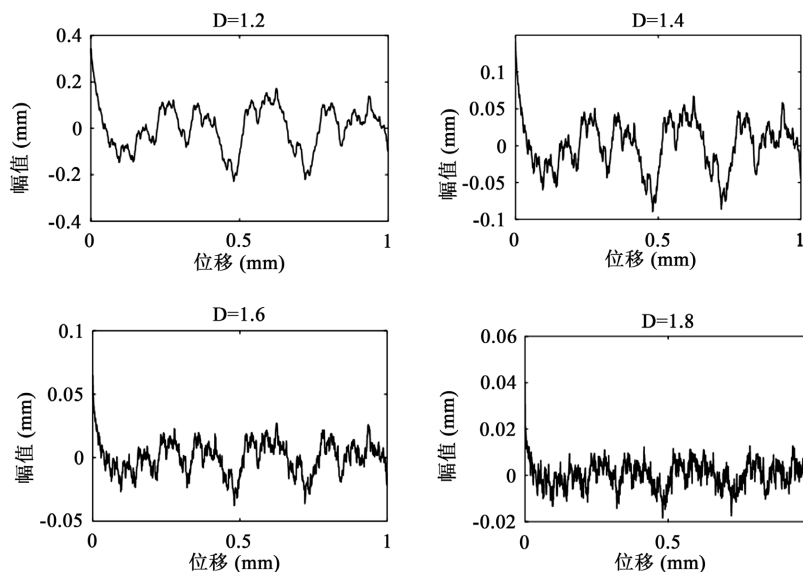


Figure 1. Variation of 2D fractal surfaces with changing D

图 1. D 变化的二维分形表面变化图

分形维数 D 是粗糙面轮廓测度的相对测量参数, 其反映了曲线的复杂和不规则程度, 其与尺度系数无关, 即具有尺度独立性。分形维数 D 越大, 粗糙面轮廓的细节就越丰富。特征尺度系数 G 是粗糙面轮廓测度的绝对测量参数, 其反映了粗糙面轮廓曲线的幅值大小。特征尺度系数 G 越大, 粗糙面的粗糙度越大。 D 主要控制曲线的复杂程度, 也就是曲线高度的变化频率; G 控制曲线高度变化的幅值, 不会影响曲线的变化。确定分形维数 D 的值为 1.4, 通过改变特征尺度系数 G 观察二维粗糙表面轮廓形貌变化, 如图 2 所

示。随着特征尺度系数 G 的增大, 表面微凸体的峰谷高度差扩大, 导致凸起和凹陷的形貌更加显著。

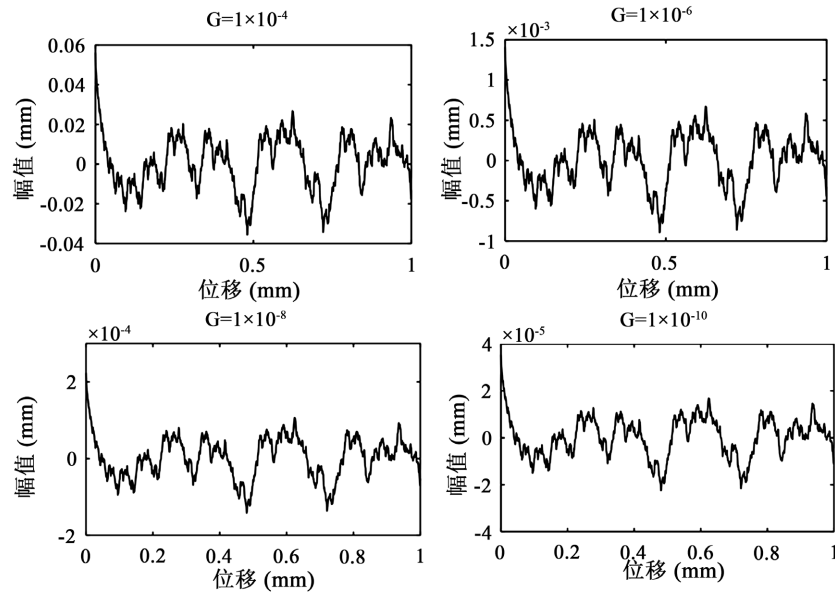


Figure 2. Variation of 2D fractal surfaces with changing G

图 2. G 变化的二维分形表面变化图

W-M 函数仅限于二维水平上的粗糙表面轮廓表示, 不能在三维尺度上表达粗糙表面的变化, 进一步推导建立粗糙表面的三维分形函数模型的表达式[8], 即:

$$z(x, y) = L \left(\frac{G}{L} \right)^{D-2} \left(\frac{\ln C}{M} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^M \sum_{n=n_{\min}}^{n_{\max}} c^{(D-3)n} \left\{ \cos a_{m,n} - \cos \left[\frac{2\pi r n (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{L} * \cos \left(\tan^{-1} \frac{y}{x} \right) - \frac{\pi m}{M} + a_{m,n} \right] \right\} \quad (2)$$

式中, $z(x, y)$ 为粗糙表面轮廓高度; x 、 y 为轮廓几何坐标; M 表示用于构造曲面的叠加脊的数量; L 为样本长度; L_s 为截止长度。

3. 三维分形表面模型

Mandelbrot 从岛屿面积分布理论中获得灵感提出了分形表面的分布状态参数化表征的方式。基于此理论, 提出当使用接触点分布模式可类比于海平面上的岛屿分布。基于这一相似性原理, 可以建立如下假设: 粗糙表面与理想平面接触时, 其接触点截面积的分布规律与海平面岛屿的平均面积分布规律相一致, 可推导出参与接触的微凸体的概率分布函数计算式如下:

$$n(a) = \frac{D}{2} \cdot \frac{a_{\max}^{D/2}}{a^{D/2+1}} \cdot \psi^{-\frac{2-D}{2}} \quad (3)$$

W-B 模型是以分形参数的尺度独立性建立粗糙表面的弹塑性接触模型, 适用于低维平面副。与传统的二维方法相比, 磨损表面的三维测量可以提供更多的信息。由式(3)和式(4)可知, 在二维和三维的分形表面中, 影响表面特征的主要因素是分形维数 D 和特征尺度系数 G 。研究分形表面应探讨 G 、 D 对粗糙度的影响。如下图 3 所示, 分形维数 D 决定了表面轮廓的复杂程度, 分形维数越高, 表明轮廓的波动越微小, 精细度也就越高。选择标准的尺度系数 G 取值为 1.0×10^{-8} , 改变变分形维数 D 可以得到不同粗糙度的表面, 分形维数 D 越大, 表面越光滑。相同尺度系数下, 不同分形维数 D 对应的三维粗糙表面形貌。

可以看出, 尺度系数不变时粗糙表面微凸体的峰谷个数随着分形维数的数量级变换而增多, 说明分形维数主要影响表面形貌的粗糙度级。

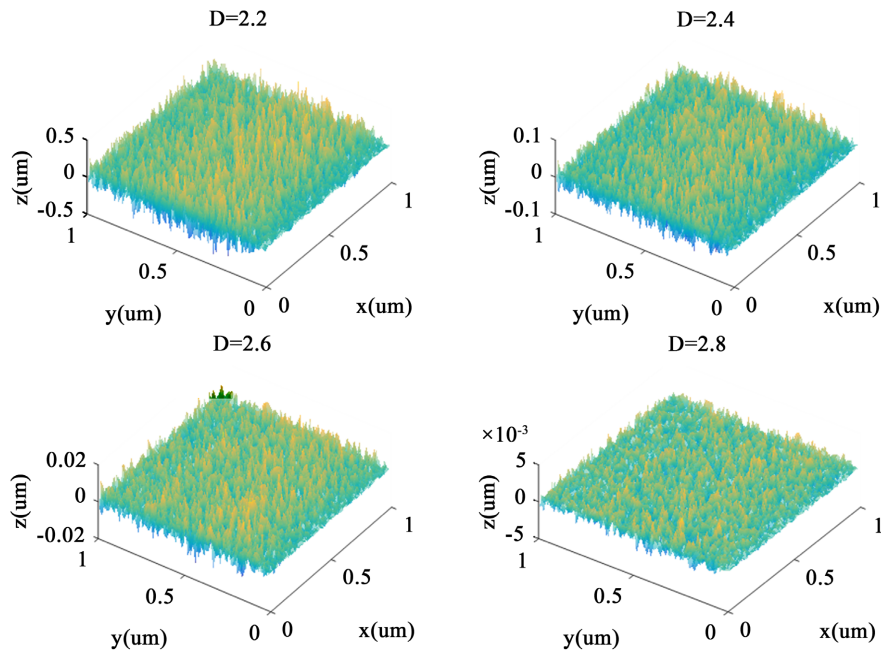


Figure 3. Variation of 3D fractal surfaces with changing D
图 3. D 变化的三维分形表面变化图

如下图 4 所示, 保持 D 不变时, 表面轮廓的形状保持一致, 其复杂性基本保持不变。随着尺度系数的减小, 表面轮廓的幅度相应降低。分形维数不变时粗糙表面高度随尺度系数减小的倍数递减, 说明尺度系数主要影响表面形貌平整性。

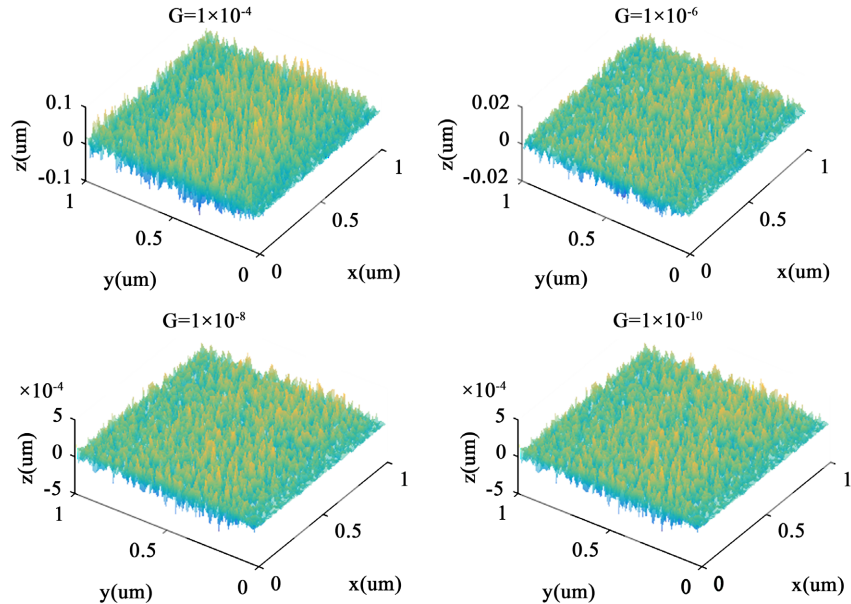


Figure 4. Variation of 3D fractal surfaces with changing G
图 4. G 变化的三维分形表面变化图

4. 分形车轮表面模型

4.1. 传统叠加模型

轮轨接触分析时往往将轮轨等效成一个刚性平面和一个弹性曲面,影响仿真效率和准确性,为了获得三维分形车轮表面,在以往的研究中,往往将粗糙度和接触表面直接叠加,形成如图5的表面,车轮表面的微凸体始终保持垂向方向。将式(3)中 x 替换成车轮周向长度, y 替换成车轮厚度,从而保证分形特征在车轮表面上均匀分布,可以得到三维车轮粗糙表面,生成的表面微凸体通常沿垂直方向分布,而实际车轮表面的微凸体方向应与接触点处的法线方向一致。

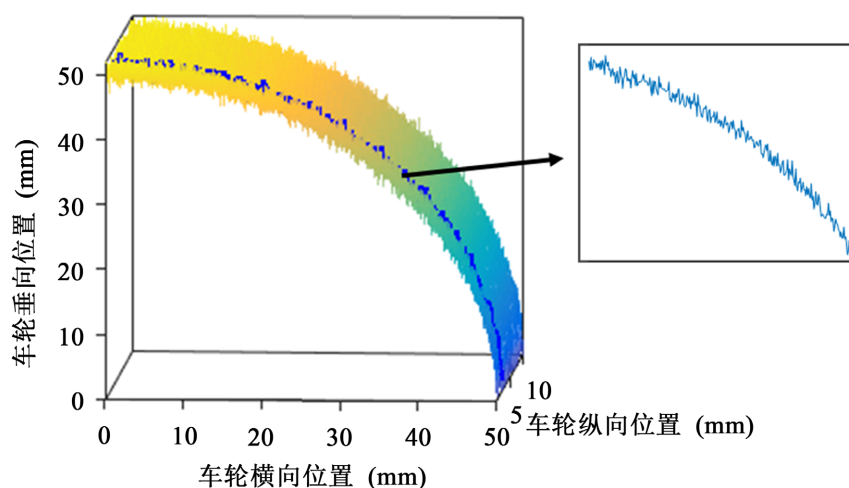


Figure 5. Schematic of traditional 3D superposition modeling approach

图5. 传统三维模型叠加方式示意图

4.2. 周向叠加的车轮模型

但是实际上由于车轮周向结构,车轮应当具有周向的不均匀的粗糙度,因此有必要建立车轮的接触区域分形模型。本文将钢轨和车轮的地形数据进行叠加,这样的组合粗糙度被定位到轮坯的表面。对于轮轨接触界面,微凸体的方向应与车轮各点的法线方向一致。因此,本文提出了一种基于局部坐标系变换的微凸体修正方法。使用旋转矩阵 T ,如下式(4)。

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (4)$$

首先建立全局坐标系下的分形粗糙表面,然后根据车轮曲面几何特征,通过坐标旋转变换将微凸体调整至其对应位置的局部法向方向,从而更真实地反映车轮表面形貌的空间分布特性。取不同分形维数 D 和尺度系数 G 的粗糙表面进行建模分析。 D 为 2.4、2.6 和 2.8, G 为 1×10^{-4} 、 1×10^{-6} 和 1×10^{-8} , 其中 D 和 G 的基准值分别为 2.4 和 1×10^{-4} 。最终得到的各参数下的横截面对比图,如图6所示。通过对比可知,本研究构建的三维各向异性分形车轮与真实车轮具有较高的相似性。因此,所构建的三维各向异性分形表面能够表征真实表面。分形维数 D 和特征尺度系数 G 共同决定了车轮表面的不规则性和粗糙度特性: D 主要控制轮廓的复杂度,而 G 影响幅值大小。通过合理选择这两个参数,可以更准确地表征车轮表面的微观形貌及其对轮轨接触行为的影响。

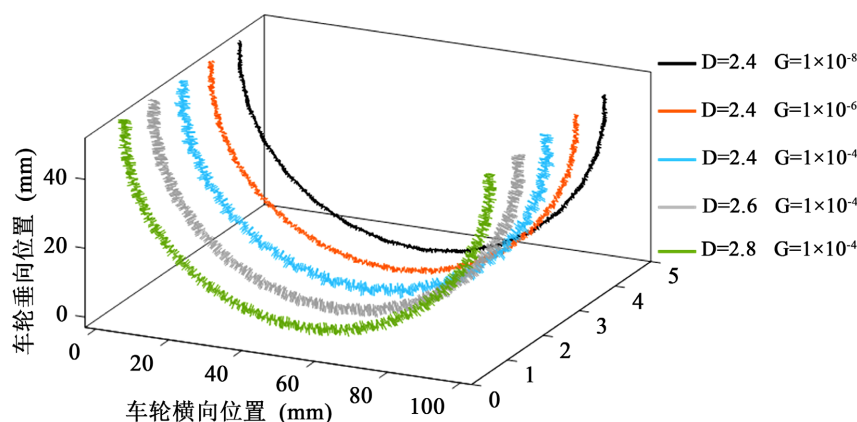


Figure 6. Wheel surface models with different parameters

图 6. 不同参数的车轮表面模型

5. 结论

本研究基于分形理论，建立了考虑周向特性的车轮粗糙表面接触模型。系统研究了粗糙表面接触模型的构建。通过三维形貌表征方法，系统分析了轮轨接触的几何特性，揭示了车轮分形表面的形貌特征对接触行为的影响。研究表明：分形参数能够有效量化表面粗糙度，随着分形维数的继续增大，车轮表面轮廓高度继续减小，但曲线变简单，表面的细小特征变少。因此，分形维数可以在一定程度上描述车轮表面的不规则性和粗糙度。提出了适用于旋转部件的分形参数计算方法，通过局部坐标系变换修正微凸体方向，可以建立更符合实际情况的车轮模型。本研究提出的建模方法为轮轨界面行为分析提供了新的研究工具，后续可进一步结合多尺度接触力学理论，深化对轮轨摩擦、磨损与振动特性的机理研究。

基金项目

本研究得到了国家自然科学基金项目[5247053032]、四川省科技计划项目[2024YFHZ0280]和四川省自然科学基金创新研究群体项目[2023NSFSC1975]的支持。

参考文献

- [1] Bigerelle, M., Nianga, J.M., Najjar, D., Iost, A., Hubert, C. and Kubiak, K.J. (2013) Roughness Signature of Tribological Contact Calculated by a New Method of Peaks Curvature Radius Estimation on Fractal Surfaces. *Tribology International*, **65**, 235-247. <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2013.03.017>
- [2] Sha, Z., Hao, Q., Yin, J., Ma, F., Liu, Y. and Zhang, S. (2022) Wear Calculation and Life Prediction Model of Disc Brake Based on Elastoplastic Contact Mechanics. *Advances in Mechanical Engineering*, **14**, 1-17. <https://doi.org/10.1177/16878132221093136>
- [3] 温淑花, 张学良, 文晓光, 等. 结合面切向接触刚度分形模型建立与仿真[J]. 农业机械学报, 2009, 40(12): 223-227.
- [4] Babici, L., Tudor, A., Romeu Garbi, J. and Stoica, M. (2020) Fractal Evaluation Aspects in Characterizing the Roughness of a Driving Wheel from a Locomotive. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, **724**, Article ID: 012028. <https://doi.org/10.1088/1757-899x/724/1/012028>
- [5] 孙见君, 嵇正波, 马晨波. 粗糙表面接触力学问题的重新分析[J]. 力学学报, 2018, 50(1): 68-77.
- [6] Majumdar, A. and Tien, C.L. (1990) Fractal Characterization and Simulation of Rough Surfaces. *Wear*, **136**, 313-327. [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(90\)90154-3](https://doi.org/10.1016/0043-1648(90)90154-3)
- [7] Li, L., Yun, Q., Wang, J., et al. (2021) A Continuous and Smooth Contact Stiffness Model for Mechanical Joint Surfaces. *Journal of Mechanical Engineering*, **57**, 117-124. <https://doi.org/10.3901/JME.2021.07.117>
- [8] Zobory, I. (1997) Prediction of Wheel/Rail Profile Wear. *Vehicle System Dynamics*, **28**, 221-259. <https://doi.org/10.1080/00423119708969355>