

Contrast Study on the Fitting Method of Life Distribution of Torpedo Equipment

Xinpeng Wang¹, Jingyuan Zhang¹, Peng Wang^{1*}, Xinyong Ying²

¹College of Weaponry Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei

²No. 91115 Unit of PLA, Zhoushan Zhejiang

Email: 1204297054@qq.com, jingyuan@163.com, *yichen_wp@163.com, 343563487@qq.com

Received: Dec. 31st, 2018; accepted: Jan. 14th, 2019; published: Jan. 21st, 2019

Abstract

The life distribution fitting is the precondition of the torpedo equipment reliability research. Based on the failure data of torpedo with long service life, the maximum likelihood estimation method and the minimum χ^2 estimation fitting method are respectively used for parameter estimation and goodness of fit test to determine the best life distribution function. Through the example comparison, the minimum χ^2 estimation fitting method fits better and can better reflect the variation rule of equipment reliability, and has better engineering practice value.

Keywords

Torpedo, Life Distribution, Maximum Likelihood Estimation, Minimum χ^2 Estimation, Parameter Estimation, Goodness of Fit Test

鱼雷装备寿命分布拟合方法比较研究

王新鹏¹, 张静远¹, 王 鹏^{1*}, 应新永²

¹海军工程大学兵器工程学院, 湖北 武汉

²91115部队, 浙江 舟山

Email: 1204297054@qq.com, jingyuan@163.com, *yichen_wp@163.com, 343563487@qq.com

收稿日期: 2018年12月31日; 录用日期: 2019年1月14日; 发布日期: 2019年1月21日

摘 要

寿命分布拟合是鱼雷装备可靠性研究的前提。以部队服役时间较长的某型鱼雷的失效数据为基础, 利用

*通讯作者。

极大似然估计方法和极小 χ^2 估计拟合方法分别进行参数估计和拟合优度检验,确定最佳的寿命分布函数。通过实例比较研究,极小 χ^2 估计拟合方法拟合效果更好,更能反映装备可靠性变化规律,具有更好的工程实践价值。

关键词

鱼雷, 寿命分布, 极大似然估计, 极小 χ^2 估计, 参数估计, 拟合优度检验

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

鱼雷寿命分布函数的确定是鱼雷装备可靠性评估中的重要问题。目前装备寿命分布的确定一般采用多种模型拟合择优法。利用失效数据对常用的几种寿命分布进行拟合优度检验[1] [2],确定最佳的寿命分布模型。

目前研究寿命分布拟合的方法较多,不同的拟合方法其计算出的结果和误差区别较大。文献[3] [4] [5] 凭借积累经验选择分布具有较大的不确定性。在实践中运用较多的矩估计法和图估计法[6],虽计算方法简单,但两种方法不仅对失效数据的样本量要求较大,而且计算精度较低,易受主观因素的影响。文献[7]分别运用极大似然估计和最小二乘法对三种失效分布进行拟合,通过实例比较确定了失效分布,但最小二乘法对数据不敏感。

对于投入部队使用很长时间的鱼雷,其数据量较大。依据中心极限定理,当测量数据样本达到一定数量时,估计得到的参数值与参数真值误差很小,具有较高的可信度。本文针对数据量较大的某型鱼雷贮存过程中的失效数据的特点,用极大似然估计法和极小 χ^2 估计法分别对常用的几种常见分布进行参数估计和分布拟合,分析拟合结果,选择较好的拟合方法,确定鱼雷装备的寿命分布函数。

2. 可靠性数据结构

随着贮存时间的增加,受贮存环境的影响,鱼雷可靠性逐渐降低。在贮存过程中会定期对鱼雷进行全面的技术检测,确认装备是否发生故障,记录检测结果。对于在部队服役时间较长的某型鱼雷,根据检测记录结果。统计从服役开始到时刻 t_i 时间段内某型鱼雷的总数 n_i 中未失效的数量为 s_i ,失效数为 r_i ,统计的可靠性数据结构为

$$(n_i, s_i, t_i), i = 1, 2, \dots, k \quad (1)$$

设鱼雷装备的贮存寿命为 T ,则 T 的寿命分布函数为:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - R(t) \quad (2)$$

式中, $R(t)$ 为贮存可靠度。

检测统计结果中未失效数据 s_i 可以看作是一个服从 $B(n_i, p_i)$ 的二项分布的样本,且 $p_i = R(t_i)$,则可以用 t_i 时刻 p_i 的极大似然估计对 $R(t_i)$ 进行估计,即

$$R(t_i) = \hat{p}_i = s_i / n_i, i = 1, 2, \dots, k \quad (3)$$

3. 参数估计

3.1. 常见的分布类型

假设 $H_0: F \in \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0 = \{F(\bullet; \theta), \theta \in \Theta\}$ 是分布族, Θ 为参数空间, 根据鱼雷装备贮存可靠性的相关研究, 鱼雷常见的寿命分布有下列 4 种:

- 1) 指数分布: $\{F(t; \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}, \lambda \in R\}$
- 2) 威布尔分布: $\{F(t) = 1 - \exp(-(t/\eta)^m), m, \eta \in R\}$
- 3) 极值分布: $\{F(t) = 1 - \exp(-e^{-\lambda(t-\mu)}), \lambda, \mu \in R\}$
- 4) 对数正态分布: $\left\{F(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\lg x - \mu}{\sigma}\right), \mu > 0\right\}$

文中利用极大似然估计法和极小卡方估计法对 4 种分布分别进行参数估计和拟合优度检验, 确定最佳的寿命分布作为鱼雷装备的贮存寿命分布函数, 并比较两者的优劣。

3.2. 极大似然估计

失效数 r 为随机变量, 服从二项分布, 则似然函数为

$$L = \prod_{i=1}^k F(t_i)^{r_i} (1 - F(t_i))^{s_i} \quad (4)$$

极大似然估计就是选取使得似然函数达到最大的数值作为参数的估计值[8], 即寻找 $\hat{\theta}$ 使得 $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta} L$ 成立。

对于指数分布:

$$F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$\ln L(t_1, t_2, \dots, t_r; \lambda) = r \ln \lambda - \lambda \left[\sum_{i=1}^r t_i + (n-r)t_r \right]$$

其似然方程为

$$\frac{r}{\lambda} - \sum_{i=1}^r t_i - (n-r)t_r = 0 \quad (5)$$

对于威布尔分布:

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right]$$

$$\ln L = r \ln m - mr \ln \eta + (m-1) \sum_{i=1}^r \ln t_i - \sum_{i=1}^r \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^m - (n-r) \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^m$$

其似然方程为

$$\begin{cases} \eta^m = \frac{1}{r} \left[\sum_{i=1}^r t_i^m + (n-r)t_r^m \right] \\ \frac{\sum_{i=1}^r t_i^m \ln t_i + (n-r)t_r^m \ln t_r}{\sum_{i=1}^r t_i^m + (n-r)t_r^m} = \frac{1}{m} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln t_i \end{cases} \quad (6)$$

对于极值分布:

$$F(t) = 1 - \exp[-\exp(at + b)]$$

$$\ln L = \sum_{i=1}^k r_i \ln[1 - \exp(-\exp(at_i + b))] - \sum_{i=1}^k s_i e^{at_i + b}$$

其似然方程为

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^k r_i \frac{-t_i e^{at_i + b} e^{-e^{at_i + b}}}{1 - e^{-e^{at_i + b}}} - \sum_{i=1}^k s_i t_i e^{at_i + b} = 0 \\ \sum_{i=1}^k r_i \frac{-e^{at_i + b} e^{-e^{at_i + b}}}{1 - e^{-e^{at_i + b}}} - \sum_{i=1}^k s_i e^{at_i + b} = 0 \end{cases} \quad (7)$$

对于对数正态分布:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} t_i} e^{-\frac{(\ln t_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{k}{2}} \left(\prod_{i=1}^k t_i \right)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (\ln t_i - \mu)^2\right)$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{k}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \ln \prod_{i=1}^k t_i - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^k (\ln t_i - \mu)^2$$

其似然方程为

$$\begin{cases} \frac{d \ln L(\mu, \sigma^2)}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k (\ln t_i - \mu) = 0 \\ \frac{d \ln L(\mu, \sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^k (\ln t_i - \mu)^2 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

通过计算机编程等方法可以求得各个分布的参数估计, 从而确定假定的装备寿命分布的形式。

3.3. 极小卡方估计法

1) 构造 χ^2 统计量

鱼雷的寿命分布为 $F(t, \theta)$, 设 $p_i(\theta) = 1 - F(t_i, \theta)$, 基于统计数据 $s_i \sim B(n_i, p_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$, 则

$$s_i = \begin{cases} 1 & p_i(\theta) \\ 0 & 1 - p_i(\theta) \end{cases} \quad (9)$$

当 $n_i \rightarrow \infty$ 时, 根据中心极限定理得:

$$\frac{\sum_{i=1}^k s_i - n_i p_i(\theta)}{\sqrt{n_i p_i(\theta)(1 - p_i(\theta))}} \sim N(0, 1) \quad (10)$$

对式(5)两边取平方, 将式(3)带入可得:

$$\frac{n_i (\hat{p}_i - p_i(\theta))^2}{p_i(\theta)(1 - p_i(\theta))} \sim \chi^2(1) \quad (11)$$

令

$$\chi^2(\theta) = \sum_{i=1}^k \frac{n_i (\hat{p}_i - p_i(\theta))^2}{p_i(\theta)(1 - p_i(\theta))} \quad (12)$$

当 $n_i \rightarrow \infty$ 时, $\chi^2(\theta)$ 统计量的渐近分布是自由度为 k 的 χ^2 分布。

2) 参数估计

待估参数 θ 的估计 $\hat{\theta}$ 若满足

$$\chi^2(\hat{\theta}) = \inf_{\theta \in \Theta} \chi^2(\theta) \quad (13)$$

称 $\hat{\theta}$ 为参数 θ 的极小 χ^2 估计, 则对 $\chi^2(\theta)$ 统计量求关于 θ 的最小值, 就可得到参数 θ 的估计 $\hat{\theta}$ 。

4. 拟合优度检验

利用极大似然估计和极小 χ^2 估计的参数估计结果分别对 4 种分布函数构造 χ^2 统计量, 进行拟合优度检验, 由于 4 种分布族的待估计参数数量不同, 设各个分布的待估参数数量为 m , 则对于各个分布的 χ^2 统计量的渐近分布的自由度为 $k - m$ 。

拟合优度 p 为:

$$p = P(\chi^2(k - m) > \chi^2(\hat{\theta})) \quad (14)$$

拟合优度 p 值衡量假定分布与统计样本数据的拟合程度, p 值越大, 拟合程度越好, 所以可以通过比较 4 种分布情况下的 p 值来确定最佳的寿命分布。

5. 拟合方法的评判

设利用两种拟合方法确定的最佳寿命分布函数分别求得鱼雷装备的贮存可靠度为 $p_i(\hat{\theta})$, 统计数据得到的可靠度为 \hat{p}_i , 两者的相对误差为:

$$E_i = \left| \frac{p_i(\hat{\theta}) - \hat{p}_i}{\hat{p}_i} \right| \times 100\% \quad (15)$$

则相对误差的标准差估计为:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^m E_i^2} \quad (16)$$

将标准差估计 S 作为评价两种寿命分布拟合方法优劣的标准, S 值越小则说明该种拟合方法较好。

6. 实例计算与分析

6.1. 数据来源及结构

以目前服役的某型全部鱼雷作为样本总体, 统计从投入部队到时刻 t_i 时间段内鱼雷出现故障的条数, 统计结果如表 1 所示。

Table 1. Storage life data of torpedo equipment

表 1. 鱼雷装备贮存寿命数据

贮存时间/年	3	5	8	11	15	18	20	22	24	25
样本量	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
失效数	1	2	3	4	8	13	18	24	32	36

6.2. 参数估计和拟合优度检验

1) 极大似然估计

利用极大似然估计拟合方法计算 4 种寿命分布的参数估计和拟合优度值如表 2 所示。

Table 2. The calculated results of maximum likelihood estimation and goodness of fit test

表 2. 极大似然估计拟合方法计算结果

寿命分布类型	指数分布	威布尔分布	极值分布	对数正态分布
参数估计值	0.0156	0.0003 2.1837	28.982 5.633	3.7621 0.9326
拟合优度	0.0087	0.7352	0.9769	0.5541

从表 2 中可以看出, 极值分布的拟合优度值最大, 拟合效果最好, 则该型鱼雷装备的最佳的寿命分布函数为:

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t-28.982}{5.633}} \quad (17)$$

极大似然估计拟合方法得到的不同分布类型贮存可靠度的函数曲线如图 1 所示。

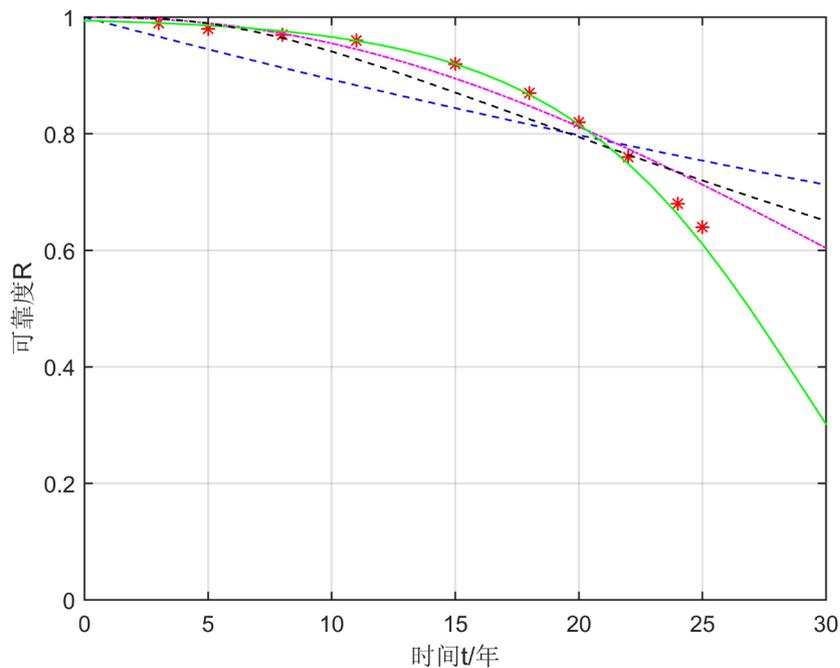


Figure 1. The effect of maximum likelihood fitting estimation

图 1. 极大似然估计拟合效果

从图 1 中可以看出, 极值分布与统计的寿命数据得到的可靠度之间拟合程度最好。

2) 极小 χ^2 估计拟合方法

利用极小 χ^2 估计拟合方法计算 4 种寿命分布的参数估计和拟合优度值如表 3 所示。

从表 3 中可以看出, 极值分布的拟合优度值最大, 拟合效果最好, 则该型鱼雷装备的最佳的寿命分布函数为:

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t-29.6813}{5.9211}} \tag{18}$$

极小卡方估计拟合方法得到的不同分布类型贮存可靠度的函数曲线如图 2 所示。

Table 3. The calculated results of minimum χ^2 estimation fitting method

表 3. 极小卡方估计拟合方法计算结果

寿命分布类型	指数分布	威布尔分布	极值分布	对数正态分布
参数估计值	0.0113	0.0003 2.2043	29.6813 5.9211	3.7661 0.9628
拟合优度	0.0091	0.7563	0.9914	0.5692

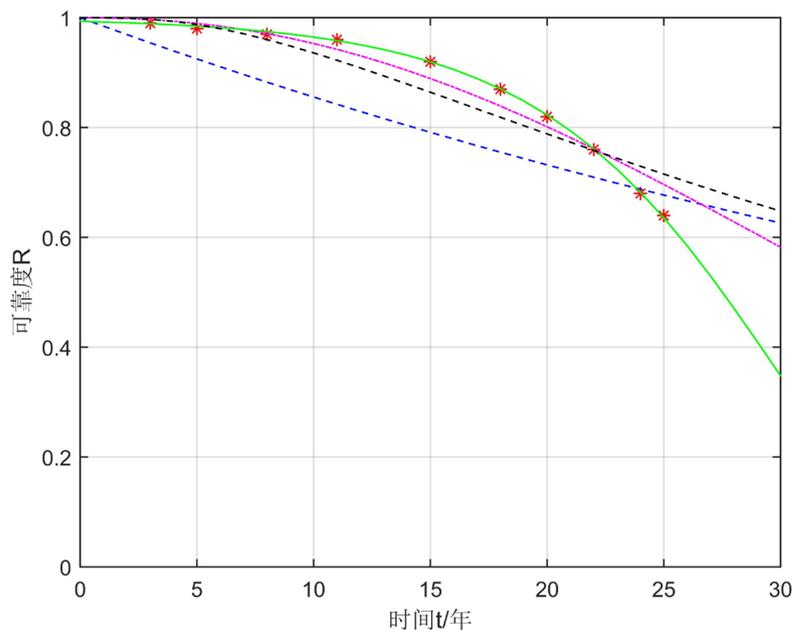


Figure 2. The effect of minimum χ^2 estimation fitting method

图 2. 极小 χ^2 估计拟合效果

从图 2 中可以看出，极值分布与统计的寿命数据得到的可靠度之间拟合程度最好。

6.3. 拟合方法比较分析

1) 相对误差标准差计算及分布函数曲线

两种方法确定装备的寿命分布函数均服从极值分布，因此可以得到装备随时间增加的贮存可靠度，通过计算得到两种拟合方法的 $p_i(\hat{\theta})$ 和 \hat{p}_i 相对误差的标准差分别为 $S_1 = 0.0169, S_2 = 0.00381$ ，因为 $S_1 > S_2$ ，则认为极小 χ^2 估计方法拟合效果较好。

极大似然估计拟合法和极小 χ^2 估计拟合法得到的装备寿命分布函数如图 3 所示。

2) 拟合方法比较分析

两种拟合方法得到的装备最佳寿命分布函数相同，结合拟合优度值和相对误差标准差可以看出，相对极大似然估计拟合方法，极小 χ^2 估计拟合法的拟合优度值更大，相对误差标准差更小。从函数曲线上可以看出极小 χ^2 估计拟合方法得到的曲线拟合程度更高，所以对于鱼雷装备寿命分布拟合而言，极小 χ^2 估计拟合方法效果更好。

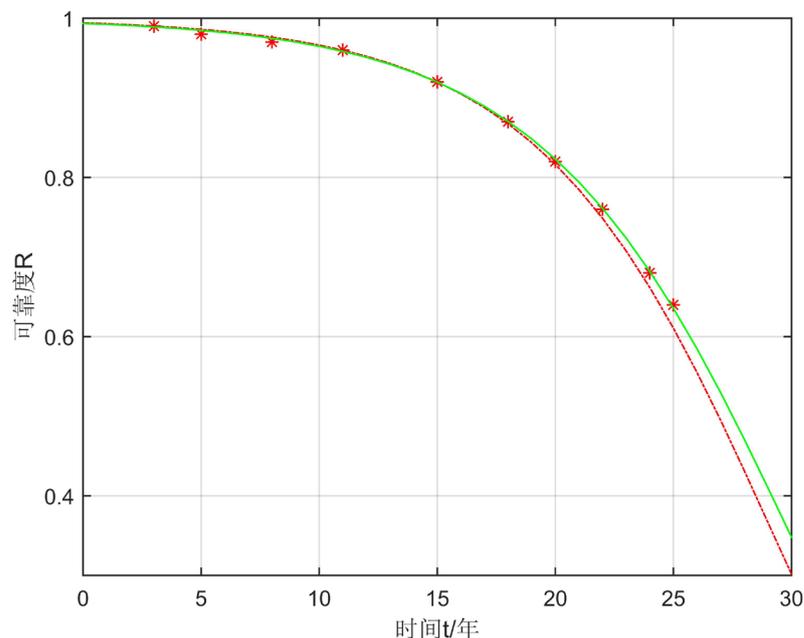


Figure 3. Comparison of the two estimation methods
图 3. 两种估计拟合方法对比

7. 结论

针对部队服役时间较长、数据量较大的某型鱼雷寿命数据的特点，分别利用极大似然估计拟合方法和极小 χ^2 估计拟合方法对装备寿命分布进行参数估计和分布拟合。通过比较分析得出极小 χ^2 估计拟合方法拟合效果更好，更加准确反映鱼雷装备可靠性变化规律。极小 χ^2 估计拟合方法较极大似然估计方法而言，程序化较好，应用较为方便，更适合鱼雷装备寿命分布拟合。

基金项目

“十三五”水中兵器预先研究项目(3020605030302)。

参考文献

- [1] 杨振海, 程维虎, 张军舰. 拟合优度检验[M]. 北京: 科学出版社, 2011.
- [2] 罗赓, 穆希辉, 杨振海, 等. 某装备系统机电产品贮存可靠性评估方法[J]. 火力指挥与控制, 2015, 40(4): 176-180.
- [3] Chen, Z. (2003) Component Reliability Analysis of K-out-of-n Systems with Censored Data. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **116**, 305-315. [https://doi.org/10.1016/S0378-3758\(02\)00179-9](https://doi.org/10.1016/S0378-3758(02)00179-9)
- [4] Whitman, C.S. (2003) Accelerated Life Test Calculations Using the Method of Maximum Likelihood: An Improvement over Least Squares. *Microelectronics Reliability*, **43**, 859-864. [https://doi.org/10.1016/S0026-2714\(03\)00071-4](https://doi.org/10.1016/S0026-2714(03)00071-4)
- [5] Sarhan, A.M. (2003) Estimations of Parameters in Pareto Reliability Model in the Presence of Masked Data. *Reliability Engineering and System Safety*, **82**, 75-83. [https://doi.org/10.1016/S0951-8320\(03\)00125-X](https://doi.org/10.1016/S0951-8320(03)00125-X)
- [6] 龚自立, 贾新章, 白永亮. 元器件质量与可靠性数据统计分布规律的拟合[J]. 西安电子科技大学学报, 2001, 28(3): 336-339.
- [7] 祝逢春, 王晓鸣, 崔大伟, 等. 航空弹药失效分布拟合方法比较研究[J]. 火箭与制导学报, 2006, 26(2): 922-925.
- [8] 王岩, 隋思涟. 数理统计与 MATLAB 数据分析[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2014.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-8696，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：mos@hanspub.org