

Longest Sandcastle Preservation Strategy

Xinyi Huang, Xin Zhang, Yiqiang Yi

College of Information and Intelligent Science and Technology, Hunan Agricultural University, Changsha Hunan
Email: 2487833998@qq.com

Received: Jul. 6th, 2020; accepted: Jul. 20th, 2020; published: Jul. 27th, 2020

Abstract

Beach is a sacred place for leisure and vacation. Sand casting has become one of the recreational activities of many beach tourists. So, how can we build a successful sandcastle and keep it for longer? This article aims at this goal, starting from the material ratio of building sandcastles, builds a liquid bridge model to determine the best water-sand mixing ratio, so as to ensure that the sandcastle is successfully built and stored for a long time on the construction materials.

Keywords

Sandcastle, Liquid Bridge Model, Capillary Force, Young-Laplace Equation

最长沙堡保存策略

黄欣怡, 张馨, 易毅强

湖南农业大学信息与智能科学技术学院, 湖南 长沙
Email: 2487833998@qq.com

收稿日期: 2020年7月6日; 录用日期: 2020年7月20日; 发布日期: 2020年7月27日

摘要

海滩是一个适合休闲度假的圣地, 堆沙堡也就成为了很多沙滩游客的娱乐活动之一, 那么, 怎样才能堆建一个成功的沙堡并使其保存得更为长久呢? 本文针对这一目标, 从搭建沙堡的材料配比方面入手, 构建了液桥模型来确定最佳的水沙混合比。从而在搭建材料上保证沙堡搭建成功并保存得长久。

关键词

沙堡, 液桥模型, 毛细力, Young-Laplace方程

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

堆沙堡是沙滩游客的娱乐活动之一，沙堡工作的核心其实在于沙子和水之间的混合比例，太少的水无法粘结沙子，太多的水不能固定成形。阿姆斯特丹大学的 Daniel Bonn 通过实验发现最好的比例是 99% 的沙子和 1% 的水，然而水沙比 1:99 在实际生活中很难实现。

栾茂田等[1]基于等径颗粒间液桥的受力分析来建立液桥桥面的弯液面方程，由于考虑了固液接触角，其弯液面方程由 3 个几何条件联立确定，是一个高度非线性的方程组，不能直接得到其解析解，需要通过数值分析的方法求得解析解。张昭等[2]等人在液桥毛细力演化规律的探索中对于液桥体积也是采用迭代的方式计算。

本文在栾茂田等人的基础上进行改进，不考虑固液接触角，得到简化后的弯液面方程，再利用定积分求得液桥体积，以曲率半径为中间变量，得到液桥体积和液桥毛细力的关系，从而可以求得液桥毛细力形成和破裂时的水沙比，并进一步在该范围内求得最佳的水沙比。

本文通过探究颗粒间的液桥毛细力和液桥体积来确定最佳的水沙混合比，为 Daniel Bonnie 的实验提供一定的理论依据，并且给出现实情况下容易实现的最佳水沙混合比。从搭建沙堡的材料配比方面着手，使沙堡保存更为长久，以此增加沙滩度假游客的趣味性，使他们得到堆建沙堡成功的自豪感与满足感，吸引大家前去动手参与活动，提高动手能力，除此之外，堆建沙堡也是一项团体活动，可以在活动中促进大家合作，培养人际沟通能力与合作能力，通过研究出来的水沙混合比，也能给沙雕艺术材料的配比提供一定的理论基础。

2. 数据来源与模型假设

为简化模型，本文做出以下假设：

- 1) 每个沙子都被认为是大小相等的球体；
- 2) 认为与毛细力相比，重力可以忽略不计；
- 3) 不考虑沙子颗粒的浮力。

3. 最佳水沙混合比的模型建立

3.1. 毛细力的形成过程

一堆干沙子之间由于没有吸引力所以是不成形的，我们常常是将沙子与水混合，才能捏出形状。这是因为当沙子和水混合之后，附着在沙子颗粒间的水分子，其颈部表面存在着一种促使液面收缩的力，称之为表面张力。同时还存在着基质吸力，这两种力共同构成了液桥毛细力。液桥如图一所示一堆干沙子之间由于没有吸引力所以是不成形的，我们常常是将沙子与水混合，才能捏出形状。这是因为当沙子和水混合之后，附着在沙子颗粒间的水分子，其颈部表面存在着一种促使液面收缩的力，称之为表面张力。同时还存在着基质吸力，这两种力共同构成了液桥毛细力。液桥如图 1 所示。

图中的蓝色部分表示液桥，它可看作是由两个弧面与两个固体颗粒围成的。液桥中带有阴影部分的椭圆形为液桥颈部，其表面存在着一种与液面相切而与边界线相垂直的促使液面收缩的力，称之为表面张力，还存在促使颗粒之间相互吸引的基质吸力，这两个力共同构成液桥毛细力，以颈部为例，其毛细

力如图 2 所示。

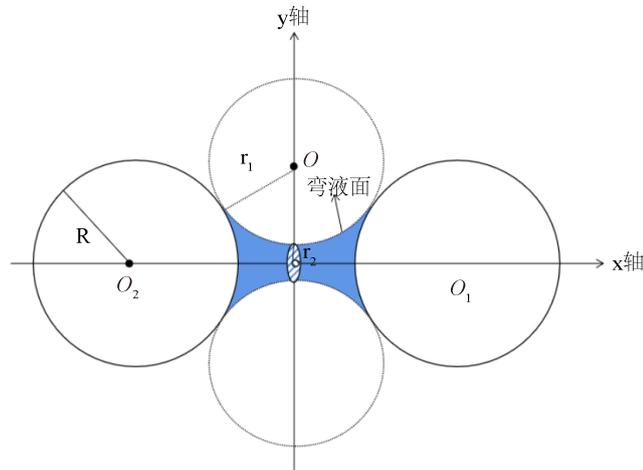


Figure 1. Liquid bridge shape
图 1. 液桥形状图

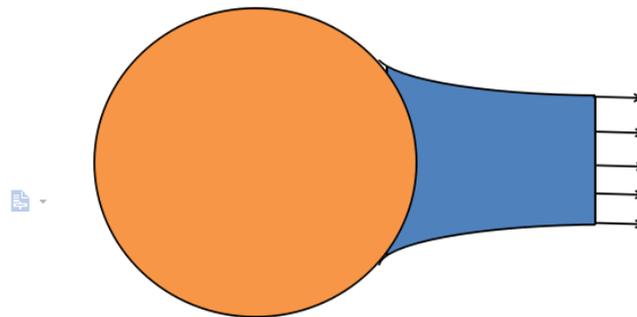


Figure 2. Liquid Capillary Force Diagram
图 2. 液桥毛细力图

由图 2 可知，水分子对沙子颗粒有相互吸引的作用。若水过多，则沙子的吸水量过大，会使其表面张力强度下降，沙子就撑不住彼此而坍软，这也是沙雕很注重排水的主要原因。若水过少，则沙子的吸水量多小，导致表面张力很小。

因此，寻求一个合适的水沙混合比是非常必要的，通过张昭等人的研究发现，液桥毛细力与液桥体积有着很大的关系，液桥体积最大和最小时分别对应着毛细力的形成和断裂状态，并且在这个范围内，液桥毛细力随液桥体积的增大呈先增后减的趋势，所以液桥毛细力势必会有一个最大值。液桥毛细力最大时对应的水沙比就是我们要寻找的最佳水沙比

3.2. 液桥毛细力建立

由 gorge 法可知，液桥毛细力是由作用在两个沙子之间液桥颈部截面内的基质吸力 φ 与其截面周上的表面张力 γ 共同产生，可得到液桥毛细力 f_q 的表达式如下：

$$f_q = \pi r_2^2 \varphi + 2\pi r_2 \gamma \quad (1)$$

由 Young-Laplace 方程可推导得到基质吸力 φ 和表面张力 γ 的关系，如下：

$$\varphi = \gamma \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (2)$$

可进一步得到液桥毛细力的表达式:

$$f_q = \pi \gamma r_2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_1} \right) \quad (3)$$

3.3. 液桥体积模型建立

由栾茂田等[1]人对液桥弯液面方程的建立和求解得到启发, 如图 3 所示, 将弯液面方程表示如下:

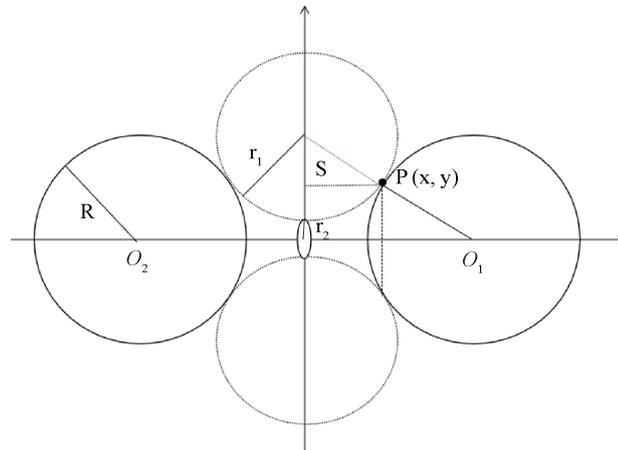


Figure 3. Derivation of meniscus equation
图 3. 弯液面方程推导图

图中 S 区域为一个直角三角形, 根据勾股定理可构造弯液面方程如下:

$$x^2 + (r_1 + r_2 - y)^2 = r_1^2 \quad (4)$$

将等式移项去括号等变形处理, 可得到如下解析式:

$$f(x) = r_1 + r_2 - \sqrt{(r_1^2 - x^2)} \quad (5)$$

得到弯液面方程后, 可将液桥体积表示成弯液面绕 x 轴旋转一周与接触颗粒的体积之差, 如图 4 所示:

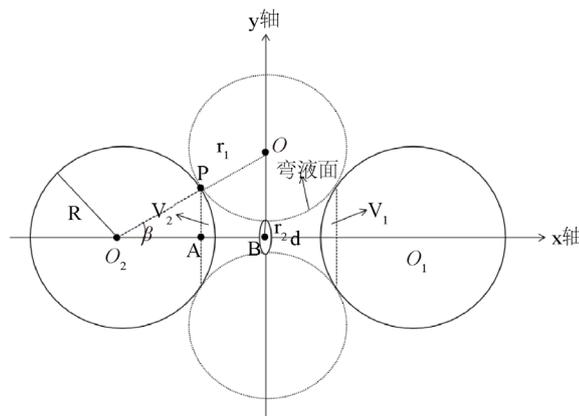


Figure 4. Derivation of liquid bridge volume
图 4. 液桥体积推导图

图中 d 是颗粒间距的一半, β 是液体的填充角。则得到液桥体积如下:

$$V_q = \int_{-(d+R-R\cos\beta)}^{d+R-R\cos\beta} \pi [f(x)]^2 dx - V_1 - V_2 \quad (6)$$

由数学知识, 可得球冠的体积 V_1, V_2 为:

$$\begin{cases} V_1 = \frac{\pi(R-R\cos\beta)(3(R\sin\beta)^2 + (R-R\cos\beta)^2)}{6} \\ V_2 = V_1 \end{cases} \quad (7)$$

由数学知识, 两个圆相切, 切线只有一条, 且连接圆心和切点的连线一定是垂直于切线的, 所以图中一定有点 O, O_2, P 三点共线, 由三角形相似, 则有

$$\frac{R\cos\beta}{R+d} = \frac{R}{R+r_1}, \quad \frac{R\sin\beta}{r_1+r_2} = \frac{R}{R+r_1} \quad (8)$$

再根据 $(R\cos\beta)^2 + (R\sin\beta)^2 = R^2$, 可得到颗粒间距一半 d 与两个曲率半径的关系, 如下:

$$d = \sqrt{R^2 + 2Rr_1 - r_2^2 - 2r_1r_2} - R \quad (9)$$

所以联立以上各式可得到液桥体积的最终表达式如下:

$$V_q = \frac{\left(2x_3r_1(r^2 + r_1^2) * R_1^2 + \frac{x_3^3R^3 - \pi R^2(R_1 - x_3)(2r^2 - 2x_3R_1 + R_1^2)}{3} \right)}{R_1^3} \quad (10)$$

其中 $R_1 = R + r_1$, $r = r_1 + r_2$, $x_3 = \sqrt{R^2 + 2r_1r_2}$, R 为颗粒半径。可以看出, 液桥体积如果不考虑固液接触角, 最终只与曲率半径 r_1, r_2 有关。

3.4. 含水量模型建立

查阅资料得到含水量与液体体积的关系[3]表达式如下:

$$V_q = \frac{8\pi\rho_s R^3}{3n_c\rho} \omega \quad (11)$$

式中, ρ_s 为沙子密度; ρ 为海水密度; n_c 为配位数, 常取值 8, ω 为含水量。

根据含水量, 可以得到水沙的比例为:

$$p_\omega = \frac{\omega}{1-\omega} \quad (12)$$

结合(9)和(10)式, 得到液桥体积和水沙比的关系为:

$$p_\omega = \frac{3n_c\rho V_q}{8\pi\rho_s R^3 - 3n_c\rho V_q} \quad (13)$$

4. 最佳水沙混合比的液桥模型求解

这里我们选取了 4 种不同颗粒半径的沙子。

步骤一: 利用 matlab 求解, 以曲率半径 r_1, r_2 为自变量, 采用暴力搜索的方法, 得到不同液桥体积下对应的毛细力, 关系如图 5 所示:

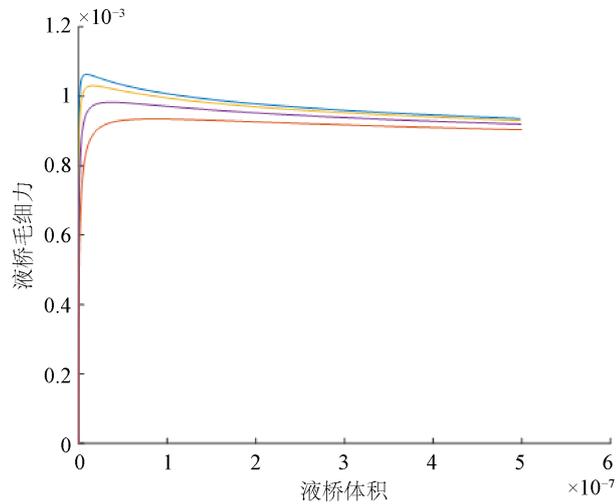


Figure 5. The relationship between liquid bridge capillary force and liquid bridge volume

图 5. 液桥毛细力与液桥体积的关系

毛细力随液桥体积呈现先增后减的趋势，与张昭等人的研究结论相符合。也进一步验证我们的推导是正确的。

步骤二：选取沙子半径 $R = 7 \times 10^{-5}$ ，绘制其毛细力与含水量的关系曲线。

由图 6 可以看出，有 3 个关键点，分别是 A (0.058, 0)，P (0.072, 210)，B (0.0921, 0)。很显然，A、B 两点分别对应着液桥毛细力的形成和断裂。P 点是液桥毛细力最大的状态。由该图可以看到，毛细力随含水量的增加是呈先增后减的一个趋势，当颗粒吸水达到饱和后，毛细力便达到了最大值，随着含水量的慢慢增多，会破坏液桥，导致毛细力下降。最后消失为 0。

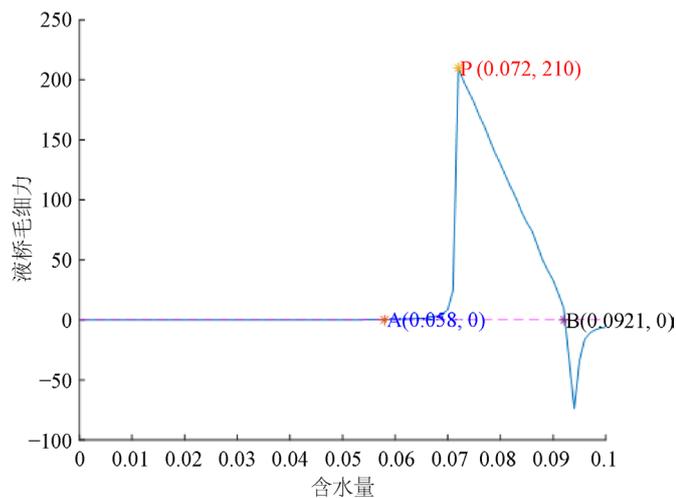


Figure 6. Capillary force and water content diagram

图 6. 毛细力与含水量的关系图

通过式(10)简单计算，A 点对应的水沙比为 16.24，B 点对应的水沙比为 9.85，可近似地取水沙比的范围为[1:10:1:16]。P 点对应的最佳含水量为 0.072 即最佳水沙比例为 $P_w = 1:12.8$ 。取近似为 1:13。

5. 结束语

本文建立的液桥模型在张昭[2]等人的基础上引入了弯液面方程，简化了液桥毛细力的计算。其中弯液面方程是根据栾茂田等人关于液桥体积计算的推导过程进行改进得到，不考虑固液接触角，并且引入了相似三角形得到线段的比例，从而简便计算公式。本文通过研究，在理论上提供了现实情况下容易实现的最佳水沙混合比以及水沙比的范围，从材料配比入手，使人们更加容易地堆建沙堡并保存长久，能在一定程度上增加人们的满足感和喜悦感，培养团队的合作能力。

参考文献

- [1] 栾茂田, 李顺群, 杨庆. 非饱和土的理论土-水特征曲线[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(6): 611-615.
- [2] 张昭, 刘奉银, 齐吉琳, 柴军瑞. 粗颗粒间液桥毛细力演化规律的动态计算方法[J]. 岩土力学, 2016, 37(8): 2263-2270+2278.
- [3] Chen, L. and Young, M.H. (2006) Green-Ampt Infiltration Model for Sloping Surfaces. *Water Resources Research*, **42**, W07420, <https://doi.org/10.1029/2005WR004468>