

三维固体稳态传热问题的等几何分析

毛翊丞，陈 龙

上海理工大学机械工程学院，上海

收稿日期：2022年12月27日；录用日期：2023年1月23日；发布日期：2023年1月30日

摘要

在芯片微电子、增材制造等领域的机械结构设计中，设备的工作温度往往会影响整体性能，而等几何分析方法作为近年来比较热门的新型数值计算方法，在动力学以及流体力学领域已有部分应用。本文尝试发挥等几何分析不会损失几何精度的特点推展到三维稳态传热分析问题，利用多片拼接NURBS体参数化模型实现几何的多样性，并提出了对三维空间的等几何方式离散，以及对热传导及热对流两种状态下的数值分析结果。实验结果表明等几何分析法在大幅提高计算效率的同时，在传热分析计算精度上能够等效于传统有限元方法。

关键词

有限元理论，等几何分析，传热，空间离散

Isogeometric Analysis for Steady-State Heat Transfer in Three-Dimensional Solid Problems

Yicheng Mao, Long Chen

School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 27th, 2022; accepted: Jan. 23rd, 2023; published: Jan. 30th, 2023

Abstract

In the mechanical structure design of chip microelectronics, additive manufacturing and other fields, the working temperature of the equipment often affects the overall performance. The isogeometric analysis method, as a popular new numerical calculation method in recent years, has been partially applied in the field of dynamics and fluid mechanics. In this paper, this paper attempts to

extend the characteristics of isometric analysis without loss of geometric accuracy to the three-dimensional steady-state heat transfer analysis problem, uses multi-piece splicing NURBS body parametric model to achieve geometric diversity, and proposes the discretization of isogeometric methods in three-dimensional space and the numerical analysis results in heat conduction and heat convection. Experimental results show that the isometric analysis method can be equivalent to the traditional finite element method in terms of calculation accuracy of heat transfer analysis while greatly improving the calculation efficiency.

Keywords

Finite Element Analysis, Isogeometric Analysis, Heat Transfer, Spatial Discretization

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传热问题按传热方式的不同，分为热传导(导热)、热对流及热辐射三种，在机械设计中会直接影响产品的工作效率和性能，在各种工程问题的仿真中，常见的商业软件数值求解方法有以下三种：有限元法(FEM)、有限差分法(FDM)以及有限容积法(FVM) [1]，这三种方法都具有各自独特的空间和时间的离散化方法，系统方程的离散方式和矩阵求解方法。其中有限元法应用最为广泛，在解决传热问题时对不规则的域或边界有良好的适应性。等几何方法作为近些年涌现出的新数值计算方法[2]，它同时包含了有限元方法及无网格法的优点：首先等几何方法通过 NURBS 样条的自然参数域的划分以代替网格划分，减少分析的工作量；同时等几何分析统一了几何模型与分析模型，对于结构优化、大变形模流分析及网格细化等问题，可以节省计算机辅助设计的精确建模与计算机仿真的网格模型之间的数据交换[3] [4]。目前等几何已在板壳[5]、振动[6]、接触分析[7]及流体等领域被成功应用，但主要都是针对他们的力学性能研究[8]。本文旨在利用多片等几何方法实现三维稳态热传导和热对流两种问题的分析求解，并与目前商业有限元的结果对比，证明了等几何在处理多片传热问题的可行性。

2. 等几何热分析的模型构建

2.1. NURBS 基础理论

等几何分析方法的基本思想是在建模和分析使用统一的几何模型表示，目前 CAD 系统通常将非均匀有理 B 样条(NURBS)用于几何表达，并使用形函数代替有限元的基函数。两者的相同之处在于他们都采用了伽辽金变分原理。在进行等几何分析时，对于二维平面或板壳 NURBS 模型，表达式如下：

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (1)$$

式中 p 、 q 分别表示 ξ 、 η 两个方向上的基函数次数， $n \times m$ 个控制点 P_{ij} 生成控制网格，对于二维平面问题 $d_{ij} \in R^2$ ，对于板壳曲面 $d_{ij} \in R^3$ ， ω 是基函数对应的权重。同理可以将上述 NURBS 曲面推广到等几何三维实体，用三个节点矢量定义张量积样条，样条表达式如下：

$$V(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l R_{i,j,k}^{n,m,l}(\xi, \eta, \zeta) P_{i,j,k} \quad (2)$$

其中形函数 R 的表达式如下：

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) Q_{k,r}(\zeta) \omega_{ijk}}{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) Q_{k,r}(\zeta) \omega_{ijk}} \quad (3)$$

以一个 NURBS 体单元为例，其控制点数量为 L ，基函数向量序列为：

$$R = (R_1, R_2, \dots, R_L) \quad (4)$$

各控制点的处的基函数表达为：

$$R_s = M_i N_j Q_k \quad (5)$$

$$s = (k-1)m n + (j-1)n + i \quad (6)$$

其中

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad k = 1, 2, \dots, l \quad (7)$$

该单元的几何张量场的插值形式为：

$$G_e(\xi, \eta, \zeta) = P_e^T R \quad (8)$$

$$P_e = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_L & y_L & z_L \end{pmatrix} \quad (9)$$

2.2. 多片模型构建

由于目前大部分 CAD 模型采用边界表示法(B-Rep)表达精准的几何模型[9]，而等几何分析需要在几何体内部同时生成控制点及网格，因此将 CAD 模型转化成分析可用的样条格式使现在和未来都值得深入的研究，也是等几何难以冲击传统有限元的瓶颈所在。对于相对复杂的模型，本文通过引入片(Patch)的概念并将多个片进行拼接，从而实现一个非四边形或非六面体的 NURBS 模型的建立[10]。如图 1 所示，我们假设(b)所表示的物理域 Ω 是由 $N_{\text{ptc}} = 3$ 的并集组成的，那么其表示方式为 $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{N_{\text{ptc}}} \bar{\Omega}_i$ ，(b)中蓝色标注控制点的区域，即每个片的公共面上的边界函数需要一一对应且与之对应的节点矢量相同才能使模型的离散空间保证连续。在 GeoPDEs 等现有开源等几何分析代码中需要对每个片面的公共边界编号以检索边界，实验证明在宏观尺寸下，直接通过在对整个 Ω 物理域控制点排序的过程中对比控制点坐标及权重信息同样可以判断这些片与片之间重合的控制点。

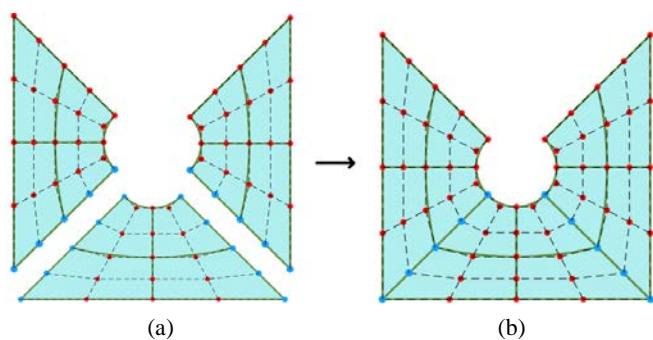


Figure 1. NURBS planar multi-piece stitching
图 1. NURBS 平面多片拼接

2.3. 参数域划分

等几何分析继承了有限元中等参单元的思想, 由于 NURBS 体的基函数有节点矢量定义, 张量积样条的节点适量可以与参数域的规则网格相对应, 这一特点使等几何分析无序对几何模型再进行网格剖分的工作, 只需要通过节点即可剖分分析对象的物理域模型。同时 NURBS 基函数具有局部支撑性, 即在一个参数区间 $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ 中至多有 $p+1$ 个基函数非零, 在经过伽辽金法离散后生成的刚度矩阵为稀疏矩阵。因此我们可以把等几何分析的单元定义为节点之间测度非零的间隙, 节点则定义为单元各顶点的控制点。以图 2(a)例, 一个由两片二维张量积样条组成的二次 NURBS 平面, 通过将各方向控制点数量为 3 的两个片通过一次 k-均值细化成 5×5 , 图中的绿色实线条为模型的单元剖分, 不难看出单元内非零基函数为 $(p+1) \times (q+1) = 9$ 个, 其中 p 和 q 为各方向基函数的次数。当我们有限元法做温度场求解时, 首先需要得到形函数的偏导数, 可以根据复合函数的求导法并稍作转化, 便可获得:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{\xi}} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{\xi}} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\eta}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

在等几何中基函数代替了形函数, 上式中的雅可比矩阵 \mathbf{J} 即可转化为:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\xi}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{\xi}} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \tilde{\eta}} & \frac{\partial y}{\partial \tilde{\eta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{\xi}} x_i & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{\xi}} y_i \\ \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \eta} y_i \\ \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{\eta}} x_i & \sum_{i=1}^9 \frac{\partial R_i}{\partial \tilde{\eta}} y_i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(\eta_{j+1} - \eta_j) \end{bmatrix} \quad (11)$$

为了便于代码的实现, 我们将矩阵 \mathbf{J} 乘号左右两边的部分拆分为 \mathbf{J}_1 、 \mathbf{J}_2 , 分别代表图 2 中物理域(a)与参数域(b)之间的映射关系以及参数域到母域(c)之间的映射关系。如图 2(b)为一个单片的参数域展示, 每一个单元的顶点都有一个相对应的节点矢量, 在计算机实现参数坐标到母单元坐标变换时, 其对应的坐标变换行列式为:

$$|\mathbf{J}_2| = (\xi_{i+1} - \xi_i)(\eta_{j+1} - \eta_j)/4 \quad (12)$$

对于三维问题只需要对上述矩阵增加一个维度即可, 这里不多做赘述。

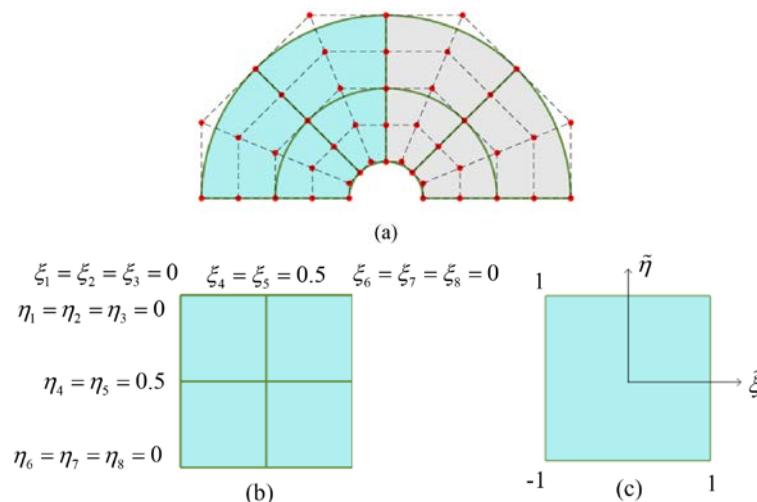


Figure 2. Physical domain, parameter domain and parent domain coordinates
图 2. 物理域、参数域和母域坐标

3. 稳态传热问题的等几何分析推导

3.1. 等几何推导

常见传热问题可以分为热传递、热对流以及热辐射三种，本文主要对前两者的稳态问题展开研究。三维固体瞬态热传导方程如下[11]：

$$\rho c \frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + Q(x, y, z, t) \quad (13)$$

其中 $Q(x, y, z, t)$ 是固体内部热产生的速率， ρ 是密度， c 是比热容， k_x 、 k_y 和 k_z 分别表示各方向的导热系数，稳态问题可以省略时间域的影响，可以将方程简化为：

$$k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = Q(x, y, z) \quad (14)$$

因此在稳态问题的研究中我们可以忽略材料的密度及比热容所带来的影响，对于边界条件可以表示为以下三类：

$$\text{狄利特雷边界: } T|_{\Gamma} = T_k$$

$$\text{纽曼边界条件: } -k \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = q_0$$

$$\text{罗宾边界条件: } k \frac{\partial T}{\partial n}|_{\Gamma} = h_c (T - T_{\infty})$$

其中 T_0 是起始温度， T_k 是已知温度， T_{∞} 为环境介质温度， q_0 是规定边界的热通量， h_c 是对应的对流系数。

根据第一章等几何理论的描述可知对模型进行离散化的过程中单元内的形函数我们用 NURBS 基函数代替，同时温度场是一种标量计算，每个控制点的自由度为 1，因此几何矩阵 B_e 的定义如下：

$$B_e = \begin{bmatrix} \frac{dR_1}{dx} & \frac{dR_2}{dx} & \dots & \frac{dR_L}{dx} \\ \frac{dR_1}{dy} & \frac{dR_2}{dy} & \dots & \frac{dR_L}{dy} \\ \frac{dR_1}{dz} & \frac{dR_2}{dz} & \dots & \frac{dR_L}{dz} \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中 L 为单元所含的控制点数目。值得注意的是，尽管稳态问题省略了热容及密度的影响，但我们仍需要对赋予第三边界条件的平面做一个局部表面传热计算并添加在等式右侧以确保边界上的热通量对整个传热系统方程的影响。结合上述热传导方程及边界条件，通过伽辽金变分原理我们可以获得他的等效积分形式：

$$(\mathbf{K}_t + \mathbf{N}_t)\{\mathbf{T}\} = \{\mathbf{Q}_t\} + \{\mathbf{Q}_c\} \quad (16)$$

式中的矩阵的意义及计算方法分别为：

温度场刚度矩阵：

$$\mathbf{K}_t = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 d\Omega \quad (17)$$

局部表面传热矩阵:

$$\mathbf{N}_t = \int_{\Omega} h_c \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{R} \cdot \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 d\Omega \quad (18)$$

不同边界条件下等效表面热源载荷矩阵:

$$\mathbf{Q}_t = Q \cdot \int_{\Omega_h} \mathbf{R}^T \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 d\Omega_h \quad (19)$$

$$\mathbf{Q}_c = \int_{\Omega_h} \mathbf{R}^T h_c (T_\infty - T) \cdot \mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 d\Omega_h \quad (20)$$

其中 h_c 是边界热通量, Q 代表热源, \mathbf{R} 是 NURBS 基函数, \mathbf{J}_1 为物理域到参数域的雅各比变换矩阵, \mathbf{J}_2 为母域到参数域的雅各比变换矩阵, T 为域内所有节点的温度场向量, T_∞ 为环境温度, 对于三维传热问题的研究, Ω_h 表示边界条件施加的边界面。

3.2. 程序实现

上文展示了等几何传热问题的系统方程离散化及各个矩阵的计算方法, 同样在 1.3 章节中介绍了多片 NURBS 模型及其参数域的划分, 因此在程序设计的过程中我们不仅需要像有限元一样在每个单元内完成各项物理矩阵的计算, 还需要对每一片的结果进行组装。如图 3 的流程所示, 我们将每个 NURBS 片的几何信息及它的边界信息分别存放在两个类型的结构体中, 为了提高计算效率可以让最终系统方程所需的全局矩阵做并行运算, 方程的求解则可以通过将 \mathbf{K} 转化为稀疏矩阵节省内存空间并对赋予第一边界条件的控制点对应得维度进行省略。

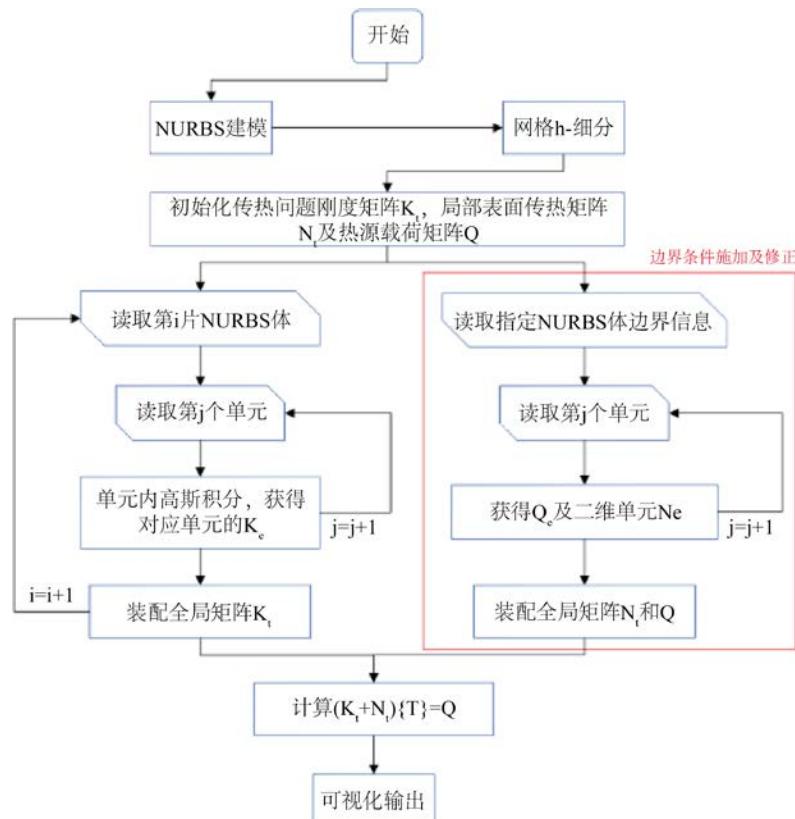


Figure 3. Program implementation flow

图 3. 程序实现流程

4. 算例分析

本文分别针对热传递问题和热对流问题给出两个三维算例，充分验证了等几何方法得适用性，由于目前等几何分析还没有进入商业软件领域，本文的等几何分析方法的算例皆由 MATLAB 实现，实验结果对比选取 COMSOL Multiphysics 的有限元方法进行比较。主要从分布及部分参考点的温度以及特殊表面温度变化等方面进行对比。

4.1. 算例一

本算例为一个完全的三维圆筒模型，其物理属性及边界条件如表 1 所示，高为 0.14 米，内圆的直径为 0.04 米，外圆的直径为 0.2 米，如图 4 所示，通过将模型分成 12 片以实现对圆筒内高度区间在 0.04 至 0.1 米部分的内圆表面区域的热源施加，其分片状态如图 5 所示。用于对比的 COMSOL Multiphysics 有限元模型选择全局极细化网格单元大小，软件显示域单元数量为 1144427。NURBS 建模中的剖分功能使几何模型的网格可以类似有限元方法，根据问题的需要进行相对应的划分。

首先是模型及网格的建立，以各方向控制点数量为 3 的二次 NURBS 体建立圆筒的基本几何造型，各方向节点矢量分别为 $U = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ 、 $V = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ 和 $W = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ ，经过两次 k 均值细化后的模型结果如图 4(b) 和图 4(c) 所示。经 2 次细化后各方向节点矢量均为 $\{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$ ，即每片中包含了 64 个单元，每个单元由 27 个控制点组成。计算结果的温度分布如图 6 所示，为了更直观的数据对比我们选取坐标为 $(0, 0.02, 0.07)$ 、 $(0, 0.02, 0.1)$ 、 $(0, 0.02, 0.14)$ 和 $(0, 0.06, 0.14)$ 的四个特征参考点对比，结果如表 2 所示，实验结果表明当圆筒模型在进行两次细化后即可获得较高精度的计算结果，由于建模后网格信息可以直接生成，因此计算的时间复杂度也大幅度降低。

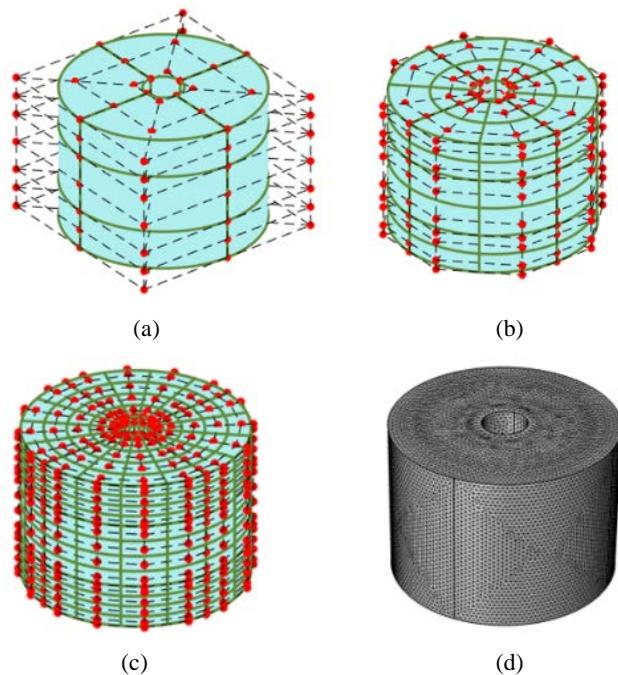


Figure 4. Three-dimensional cylinder and isogeometric models and fine finite element mesh. (a) $k = 0$; (b) $k = 1$; (c) $k = 2$; (d) Finite element mesh

图 4. 三维圆筒等几何模型及精细有限元网格。(a) $k = 0$ ；(b) $k = 1$ ；(c) $k = 2$ ；(d) 有限元网格

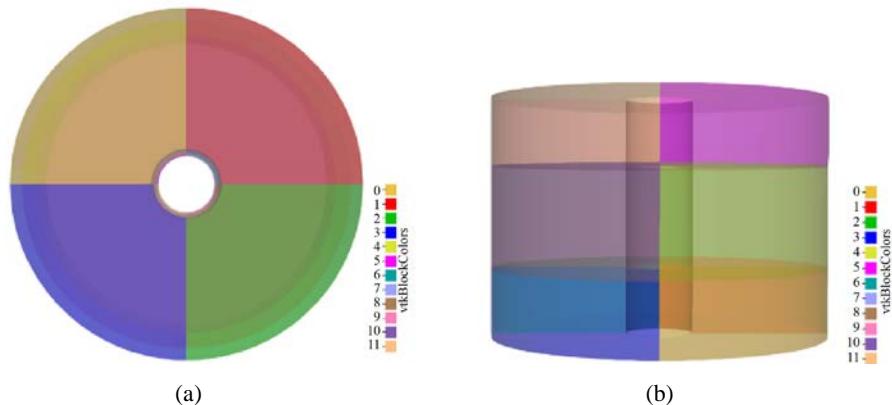


Figure 5. 3D cylinders and isogeometric models slice

图 5. 三维圆筒等几何模型分片

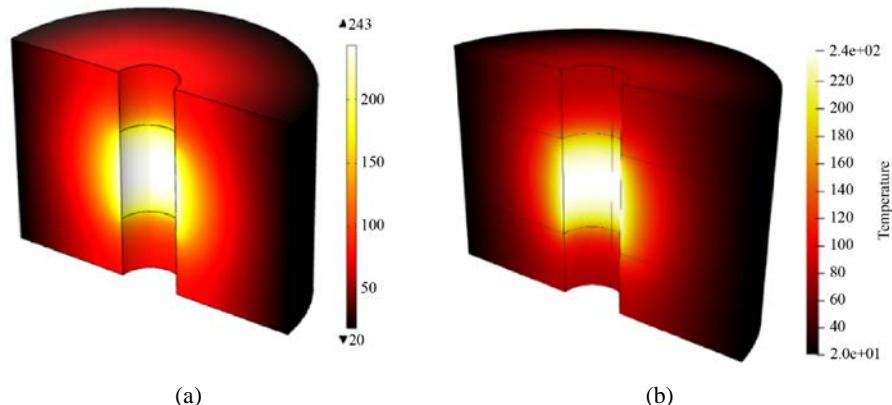


Figure 6. Temperature distribution. (a) Very fine mesh finite element results; (b) Isogeometric results

图 6. 温度分布。(a) 极精细网格有限元结果; (b) 等几何结果

Table 1. Parameters and properties of algorithm 1

表 1. 算例 1 的参数及属性

参数项	单位	参数取值
导热系数 k	$\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$	52
热源 Q	W/m^2	$5 * 10^5$
圆筒外侧边界条件 T	°C	Dirichlet 边界条件 20

Table 2. Parameters and properties of algorithm 1

表 2. 算例 1 的参数及属性

参考点	精细有限元结果	等几何模型细化次数		
		$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$
1	242	294	243.91	241.81
2	169.65	160.93	166.09	167.36
3	78.80	84.78	79.17	78.78
4	53.18	55.16	53.96	53.24

4.2. 算例二

本文给出了一个基于存在对流边界问题的三维单片等几何分析案例，该算例仅由单片构成，几何模型各方向均采用二次 NURBS 样条并最终 k 均值细化两次，其物理属性和边界条件如图 7 所示，这里我们不再对模型的细节做介绍。图 8 的数值分布表明在含对流边界的温度场计算结果与有限元近似。重点观察赋予热通量的边界，即长方体顶部表面沿 x 轴方向的温度变化。由图 9 可以看出对流边界的温度变化，受外接温度影响，精细网格有限元结果和二次细化后的等几何结果都在 20°C 左右浮动，并且等几何在节点数量远小于有限元结果的情况下依然可以在边界上获得一条过渡平滑的曲线。

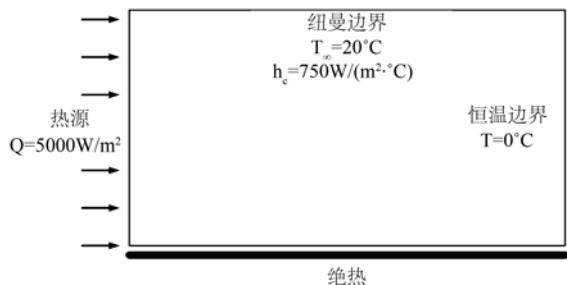


Figure 7. Definition of three-dimensional convective heat transfer problem
图 7. 三维对流传热问题定义

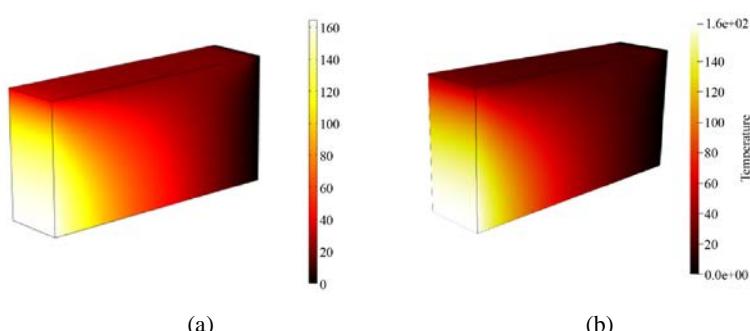


Figure 8. Temperature distribution. (a) Very fine mesh finite element results; (b) Isogeometric results
图 8. 温度分布。(a) 极精细网格有限元结果；(b) 等几何结果

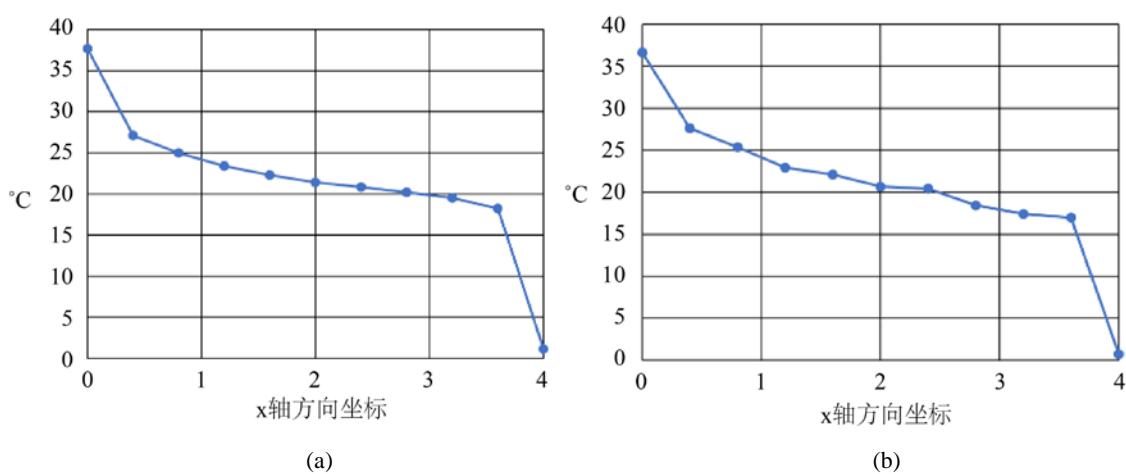


Figure 9. Convective surface temperature change. (a) Very fine mesh finite element results; (b) Isogeometric results
图 9. 对流面温度变化。(a) 极精细网格有限元结果；(b) 等几何结果

5. 结束语

本文将等几何方法运用并拓展到三维稳态的传热问题中，并与商业软件的极高精细网格划分下的分析结果进行对比，表明了该方法的可行性。等几何以 NURBS 体的基函数代替有限元的形函数，使分析网格可以更加精准、高阶光滑地表达模型的几何边界，同时等几何也可以在较少的节点数量下获得与精确解高度近似的结果。同时等几何分析统一了建模与仿真的所有模型的参数化工作，减少了数据处理量并提高了计算速度，为铸件冷却及热流耦合等多物理场问题的拓展奠定基础。后续工作将本文方法推广到热应力及相关结构优化上，充分发挥等几何在几何表达及高阶连续的特点并实现计算获得的形变结果直接反映在几何模型上。

参考文献

- [1] 王玉恒, 刘峰, 宋凤梅. SPH 原理、发展现状及热传导问题模型[J]. 中国工程科学, 2008, 10(11): 47-51.
- [2] Hughes, T.J.R., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y. (2005) Isogeometric Analysis: CAD, Finite Elements, NURBS, Exact Geometry and Mesh Refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**, 4135-4195. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.10.008>
- [3] Nguyen, V.P., et al. (2015) Isogeometric Analysis: An Overview and Computer Implementation Aspects. *Mathematics and Computers in Simulation*, **117**, 89-116. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2015.05.008>
- [4] Wu, J.C. and Wang, D.D. (2021) An Accuracy Analysis of Galerkin Meshfree Methods Accounting for Numerical Integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **375**, Article ID: 113631. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113631>
- [5] Kiendl, J., Bletzinger, K.-U., Linhard, J. and Wüchner, R. (2009) Isogeometric Shell Analysis with Kirchhoff-Love Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **198**, 3902-3914. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.08.013>
- [6] Cottrell, J.A., Reali, A., Bazilevs, Y. and Hughes, T.J.R. (2006) Isogeometric Analysis of Structural Vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 5257-5296. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.09.027>
- [7] 陈龙, 郝婵娟, 汪中厚, 冯文斌, 杨易明. 单齿啮合的齿轮接触等几何分析[J]. 机械工程学报, 2021, 57(3): 107-115.
- [8] 葛建立, 杨国来, 吕加. 同几何分析研究进展[J]. 力学进展, 2012, 42(6): 771-784.
- [9] 孙立镌, 王爱华. 基于特征的 CAD/CAE 集成中并行建模技术研究[J]. 计算机应用研究, 2009, 26(3): 917-919.
- [10] Cotterll, J.A., Hughes, T.J.R. and Bazilevs, Y. (2009) Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and CAE. John Wiley & Sons, New York. <https://doi.org/10.1002/9780470749081>
- [11] 陈涛, 莫蓉, 万能. 等几何分析中 Dirichlet 边界条件的配点施加方法[J]. 机械工程学报, 2012, 48(5): 157-164.