

基于多波束测线问题的数学建模分析

胡新豪¹, 徐志强¹, 梁铭豪¹, 廖 秀^{2*}

¹桂林信息科技学院电子工程学院, 广西 桂林

²桂林信息科技学院数学教研部, 广西 桂林

收稿日期: 2024年4月30日; 录用日期: 2024年5月22日; 发布日期: 2024年5月31日

摘 要

本研究主要针对多波束测线在海洋测深任务中的应用进行探讨。多波束系统在海洋深度测量和海底地形研究中起着重要作用。研究中关注测线间隔、覆盖宽度和重叠率的设计。通过正弦定理和三角函数推导出海域中心点处的海水深度表达式, 进而得到多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间的重叠率的数学模型。利用MATLAB软件对给定参数进行计算和模拟, 得出不同测线距中心点处的距离时的海水深度、覆盖宽度和重叠率。进一步研究了测线方向和海底坡面法向之间的角度关系, 将二维图形转化为三维图形, 求解了坡度与测线方向的关系。在此基础上, 通过穷举法确定最优测线布局, 得出最短测线总距离为118,528米, 设计出最优的测线布局。

关键词

多波束测线问题, 正弦定理, 最优规划, MATLAB软件

Mathematical Modeling Analysis of Multibeam Sounding Line Problem

Xinhao Hu¹, Zhiqiang Xu¹, Minghao Liang¹, Xiu Liao^{2*}

¹The College of Electronic Engineering, Guilin Institute of Information Technology, Guilin Guangxi

²The Department of Mathematics Teaching and Research, Guilin Institute of Information Technology, Guilin Guangxi

Received: Apr. 30th, 2024; accepted: May 22nd, 2024; published: May 31st, 2024

Abstract

This study mainly discusses the application of multibeam sounding lines in ocean depth measurement tasks. Multibeam systems play a crucial role in ocean depth measurement and seafloor

*通讯作者。

文章引用: 胡新豪, 徐志强, 梁铭豪, 廖秀. 基于多波束测线问题的数学建模分析[J]. 建模与仿真, 2024, 13(3): 3343-3351. DOI: 10.12677/mos.2024.133304

topography research. The study focuses on the design of line spacing, coverage width, and overlap rate. By deriving the expression of water depth at the center of the sea area using the sine theorem and trigonometric functions, a mathematical model for the coverage width and overlap rate between adjacent bands in multibeam sounding is obtained. Using MATLAB software to calculate and simulate given parameters, the water depth, coverage width, and overlap rate at different distances from the central point of the sounding lines are determined. Further research is conducted on the angle relationship between the direction of the sounding lines and the normal to the seafloor slope, converting two-dimensional graphs into three-dimensional graphs to solve the relationship between slope and the direction of the sounding lines. Based on this, the optimal layout of sounding lines is determined through exhaustive enumeration, with the shortest total distance of sounding lines found to be 118,528 meters, resulting in the optimal layout of sounding lines being designed.

Keywords

Multibeam Sounding Line Problem, Sine Theorem, Optimal Planning, MATLAB Software

Copyright © 2024 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

海洋深度的测量对于海洋事业的发展具有重要意义。多波束测深技术作为一种高精度的海洋测深方法，在海洋研究和资源勘测中得到广泛应用。多波束测线的设计是多波束测深系统中的一个关键问题，它涉及测线间隔、覆盖宽度和重叠率的确定，直接影响到测量结果的精度和效率。

目前，我国王天文等[1]对多波束倾斜安装方法在极浅水界址测量中的应用进行了研究；夏昊等[2]对多波束测线进行了仿真优化；赵保成等[3]对无人船的多波束系统在水下地形测量应用；王楠等[4]对动态规划的多波束测线布设模型。这些研究在多波束测线设计和优化方面有一定的相似之处，但在应用领域、方法和重点方面存在一定的差异。这些研究共同推动了多波束测深技术的发展，为海洋测量提供了有益的经验 and 思路。

本研究旨在探讨多波束测线的设计及其在海洋测深任务中的应用。首先，通过分析示意图和运用三角函数推导出海域中心点处的海水深度表达式，进而得到多波束测深的覆盖宽度和相邻条带之间的重叠率的数学模型。其次，利用 MATLAB 软件进行计算和模拟[5]，得出不同测线距中心点处的距离时的海水深度、覆盖宽度和重叠率。然后，通过研究测线方向和海底坡面法向之间的角度关系，进一步优化测线布局，提出了最优的测线设计方法[6]。最后，将单波束测量的测深数据绘制在三维立体图中，分析漏测海区占总待测海域面积的百分比和重叠区域中超过 20%重叠率的总长度。

通过本研究的结果，可以为海洋测深任务中多波束测线的设计和优化提供理论依据和实际参考，提高海洋测深的准确性和效率[7]。此外，本研究的方法和思路还可以应用于其他领域的测量与规划问题，具有一定的实际应用价值。

2. 数学模型的建立

2.1. 覆盖宽度及相邻条带之间重叠率的数学模型的建立

如图 1 为测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 90° 的斜坡截面图。

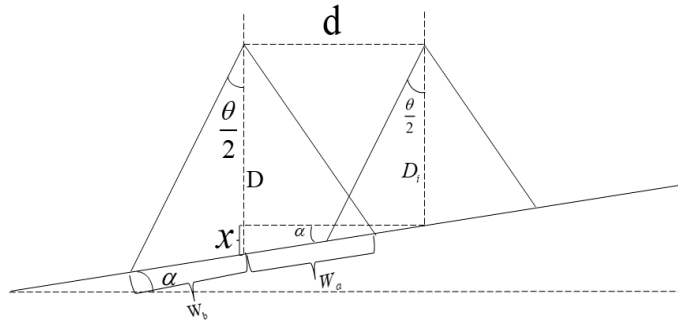


Figure 1. Cross-section diagram of a slope with the angle of 90° between the survey line direction and the normal to the seabed slope projected onto the horizontal plane

图 1. 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 90° 的斜坡截面图

由正弦定理和对图 1 进行几何分析计算可得：

$$\frac{a}{\sin a} = \frac{b}{\sin b} = \frac{c}{\sin c}$$

$$\frac{D}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha\right)} = \frac{W_a}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{D}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha\right)} = \frac{W_b}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$W = W_a + W_b$$

求得海水深度： $D_i = D_{i-1} \pm d \tan \alpha$

$$\text{覆盖宽度: } W = D \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha\right)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha\right)} \right) \cos \alpha \quad (1)$$

$$\text{重叠率: } \eta = 1 - \frac{d}{D \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha\right)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha\right)} \right) \cos \alpha} \quad (2)$$

D 为海水深度， θ 换能器开角角度， η 相邻条带之间的重叠率， α 海底坡度， W 多波束测深条带覆盖宽度。

2.2. 建立不同方向多波束测深覆盖宽度的数学模型

由二维转变到三维。在坡度 α 为 1.5° 的海底坡面上，求解了坡度与测线方向的关系。首先分析当测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角分别为 0° 、 45° 、 90° 的情况，求此时的覆盖宽度。

1) 当角度为 0° 时，如图 2 所示。

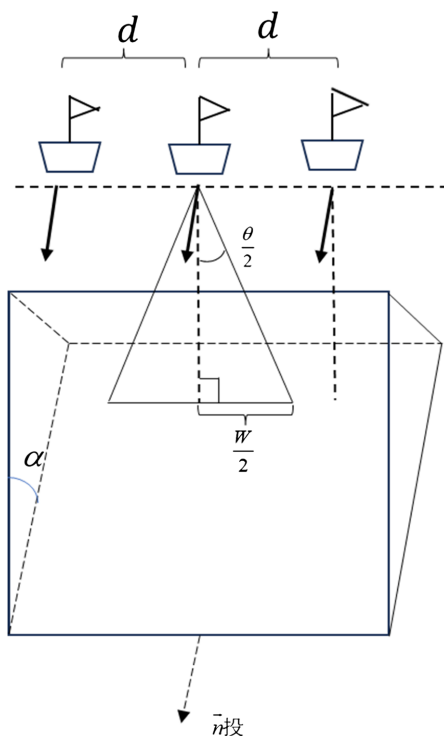


Figure 2. The Angle between the direction of the survey line and the normal direction of the submarine slope projected on the horizontal plane is 0° , and the coverage width W is calculated at this time

图 2. 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 0° 求此时的覆盖宽度 W

$$\text{得出此时的覆盖宽度为: } W = 2D \tan \frac{\theta}{2}$$

2) 当角度为 45° 时, 如图 3 所示

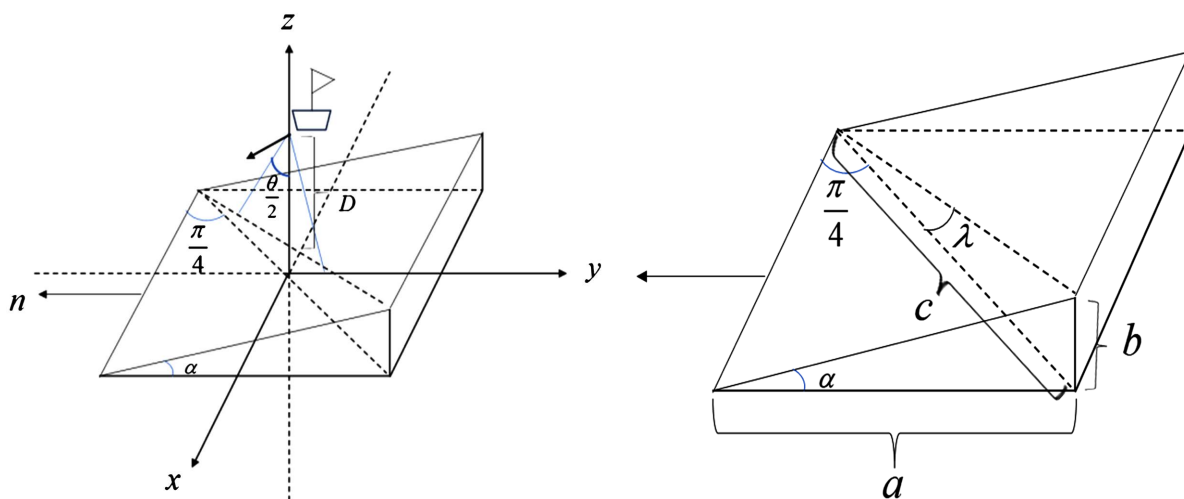


Figure 3. The Angle between the direction of the survey line and the normal direction of the submarine slope projected on the horizontal plane is 45° , and the coverage width W is calculated at this time

图 3. 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 45° 求此时的覆盖宽度 W

根据三角函数的关系为:

$$b = a \tan \alpha, \quad c = \frac{a}{\cos \frac{\pi}{4}}, \quad \tan \lambda = \frac{b}{c}$$

联立可得 λ 的角度为:

$$\lambda = \arctan \left(\tan \alpha \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

该多波束所在的平面如图 4 所示。

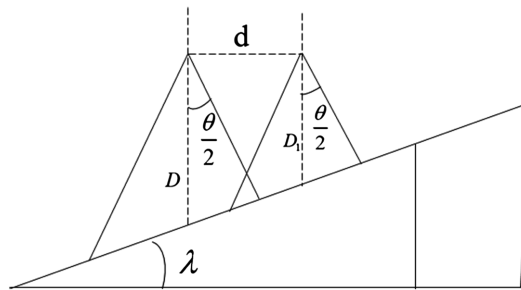


Figure 4. The seafloor slope of α and the Angle between the measured line and the projection is 45° is equivalent to the seafloor slope of λ and the Angle between the measured line and the projection is 90°

图 4. 将海底坡度为 α 且测线与投影夹角为 45° 等效为海底坡度为 λ 且测线与投影夹角为 90°

求出多波束测深覆盖宽度为:

$$W = D \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \lambda \right)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \lambda \right)} \right) \cos \lambda$$

3) 当 β 为 90° 时, 如图 5 所示。

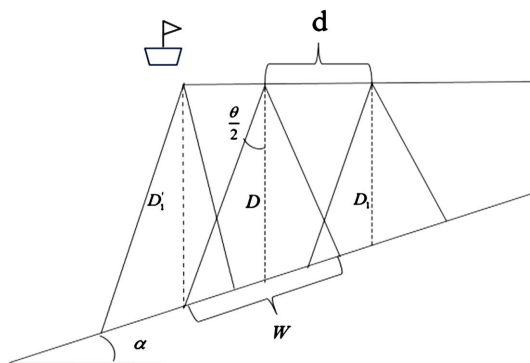


Figure 5. Section diagram of submarine slope with 90° Angle between the direction of survey line and the normal direction of submarine slope projected on the horizontal plane

图 5. 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 90° 的海底斜坡截面图

该情况下的覆盖宽度为:

$$W = D \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \right) \cos \alpha$$

以上是 0° , 45° , 90° 三种情况下多波束测深的数学模型, 考虑到测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角不一定是特殊角, 所以综合考虑将夹角设为未知角, 以下是求角 λ :

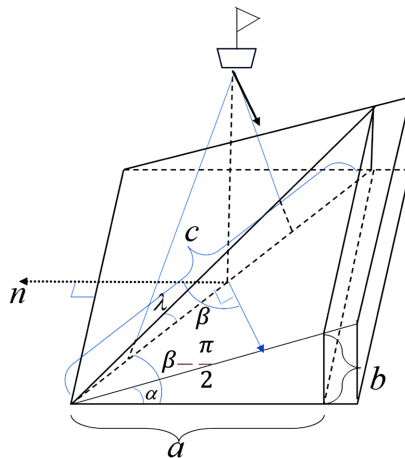


Figure 6. The slope is α , and the Angle between the direction of the survey line and the normal direction of the submarine slope projected on the horizontal plane is λ

图 6. 坡度为 α , 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 λ

所以设底面边长为 a , 坡面的高为 b , 底面对角线为 c , 由题目可知测线与多波束所在的平面垂直, 根据坡度为 α , 测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角为 λ 见图 6。可由几何图形的数量关系得:

$$b = a \tan \alpha, c = \frac{a}{\cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right)}, \tan \lambda = \frac{b}{c}$$

则求得 a 角度的等效角 λ 为:

$$\lambda = \arctan \left(\tan \alpha \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

将其代入(1)的模型得:

$$W = D \left(\frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \arctan \left(\tan \alpha \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)} + \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \arctan \left(\tan \alpha \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)} \right) \cdot \cos \left(\arctan \left(\tan \alpha \cos \left(\beta - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right)$$

3. 设计一组测量总长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线

考虑一个南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域内，海域中心点处的海水深度为 110 m，西深东浅，坡度为 1.5° ，多波束换能器的开角为 120° 。设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，且相邻条带之间的重叠率满足一定的要求，可以先将待测海域的最深深度和最浅深度，然后以最深深度为测线求出刚好覆盖边缘度初始测线。在根据迭代求出由深到浅符合覆盖率的测线距离由此类推，当海水深度低于最低海水深度时，说明求完该组测线，利用 MATLAB 软件求出该组数据，并求出此时的测距宽度。

首先确定测线的方向，假定第一条测线与法线的夹角为一定的度数，测线的两侧为覆盖宽度。再设置第二条测线，为了测线保证可完全覆盖整个海域，测线的调整区间最大不能超过第一条测线的覆盖宽度与海域最高点，故有以下情况：

当给定一个测线与法线夹角 β 小于 90° ，测线越靠近东时，测线距离越大，测线总长越小。

当给定一个测线与法线夹角 β 大于 90° ，测线越靠近东时，测线距离越小，测线总长越大。

综上所述，当测线与法线的夹角等于 90° 时，可调的相邻测线距离 d 越大。设置重叠率为 10%，在满足覆盖率的前提下 d 越大，测线的总数越少，测线的总长度就越短。

首先求出所给待测矩形海域的海水最深深度和最浅深度，矩形海域的宽度为 a ，长度为 b ，令此时测线距离为宽度的一半 $d = \frac{a}{2}$ 。

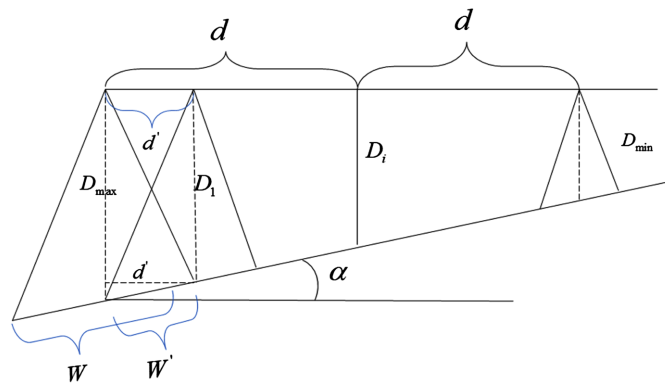


Figure 7. Cross-section of a submarine slope with a slope of 1.5°

图 7. 坡度为 1.5° 的海底斜坡截面图

该测线布设方法是从航道海水深度由深到浅布设，在最大水深处布设一条测线来求航道的第一条测线，可根据海水最深深度进行求解。

先求出待测矩形海域的海水最深深度和最浅深度(用来判断中止条件)：

$$D_{\min} = D_0 - d \tan \alpha ; \quad D_{\max} = D_0 + d \tan \alpha$$

$$D_{\min} = 13.0073465077 \text{ 米}, \quad D_{\max} = 206.9926534 \text{ 米}$$

由图 7 根据几何关系和三角函数关系可得：

$$W' = \frac{D_{\max} \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)}$$

$$d' = W' \cos \alpha$$

$$D_1 = D_{\max} - d' \tan \alpha$$

经过计算可得第一条测线的海水深度 D_1 为 198.0117613337 米。

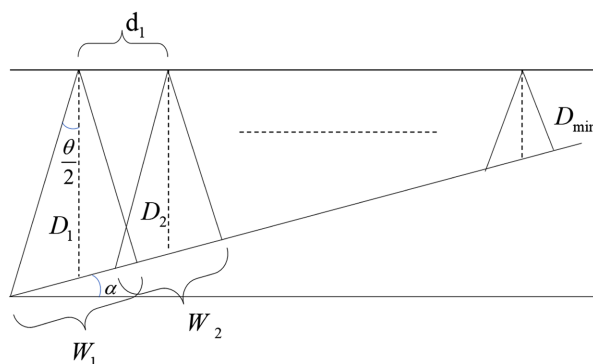


Figure 8. Relationship between seawater depth and strip coverage width of multi-beam sounding

图 8. 海水深度与多波束测深条带覆盖宽度关系图

接着见图 8 可计算海水深度由深到浅时根据以上公式进行对海水深度，覆盖宽度，测线距离。

$$d_i = W_i (1 - \eta)$$

$$D_i = D_{i-1} - d_{i-1} \tan \alpha (i = 2, 3, \dots)$$

$$W_i = \left(\frac{D_i \sin \frac{\pi}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha \right)} + \frac{D_i \sin \frac{\theta}{2}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha \right)} \right) * \cos \alpha (i = 2, 3, \dots)$$

$$d_i = W_i (1 - \eta)$$

用 MATLAB 软件进行求解可得要设计的一组测线为 570.816282 米 524.118994 米 481.241914 米 441.872518 米 405.723850 米 372.532429 米 342.056329 米 314.073415 米 288.379725 米 264.787982 米 243.126230 米 223.236581 米 204.974063 米 188.205563 米 172.808859 米 158.671727 米 145.691124 米 133.772438 米 122.828794 米 112.780427 米 103.554096 米 95.082551 米 87.304046 米 80.161885 米 73.604008 米 67.582618 米 62.053825 米 56.977331 米 52.316135 米 48.036261 米 44.106515 米 40.498253 米，共 31 组，测量总长度为 118528 米。

结果分析

通过将相邻条带之间的重叠率定为 10%，设计的测线确保了漏测海区不占总待测海域面积，同时避免了探测海域时造成过大的无效功。

利用迭代的方法计算各个测线的距离，确保了结果的准确性和可靠性。

以上策略和方法的综合运用，验证了本文提出方法的准确性和有效性，为问题的解决提供了可靠的依据和支持。

4. 结语

本文通过分析多波束测线在海洋测深任务中的应用，关注测线间隔、覆盖宽度和重叠率的设计，并

成功推导出海域中心点处的海水深度表达式以及测深覆盖宽度和重叠率的数学模型。利用 MATLAB 软件进行了计算和模拟,并进行了测线方向与海底坡面法向之间的角度关系研究。最终,通过穷举法确定了最优测线布局,设计出最短测线总距离为 118,528 米。这些成果为海洋测深任务中多波束测线的设计提供了理论依据,并可以帮助提高海洋测深的准确性和效率。

希望今后能有更多的研究和实践,进一步完善多波束测线的设计方法,推动海洋测深技术的发展,为人类认识和保护海洋提供更加精准、高效的手段。

基金项目

2024 年广西高校中青年教师科研基础能力提升项目:分数阶微分方程边值问题解的研究(编号:2024KY1727);2021 年校级重点应用型课程建设项目:概率论与数理统计;2023 年大学生创新训练项目:基于 MATLAB 软件的概率论与数理统计问题的研究与算法。

参考文献

- [1] 王天文,买小争,颜振能.多波束倾斜安装方法在极浅水界址测量中的应用[J].测绘与空间地理信息,2024,47(2): 219-221.
- [2] 夏昊,邱诗雨,单欣悦,等.多波束测线的仿真优化[J].科技风,2024(5): 61-63.
<https://doi.org/10.19392/j.cnki.1671-7341.202405021>
- [3] 赵保成,徐健,徐坚,等.基于无人船的多波束系统水下地形测量应用[J].地理空间信息,2023,21(9): 65-68.
- [4] 王楠,俞治丞,王景贤.基于动态规划的多波束测线布设模型[J].南通职业大学学报,2023,37(4): 64-69+97.
- [5] 刘一军.单波束与多波束测深系统在浅水区水下地形测量中的应用研究[J].经纬天地,2021(3): 4-6.
- [6] 成芳,胡迺成.多波束测量测线布设优化方法研究[J].海洋技术学报,2016,35(2): 87-91.
- [7] 祝慧敏.多波束测深系统水下地形测量关键技术与精度评估[J].经纬天地,2022(2): 4-6.