Modeling and Simulation 建模与仿真, 2025, 14(2), 489-498
Published Online February 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mos
https://doi.org/10.12677/mos.2025.142169

Hans汉斯

变锥度组合圆锥壳结构振动特性分析

张佳亚

江南造船(集团)有限责任公司，上海

收稿日期：2025年1月27日；录用日期：2025年2月20日；发布日期：2025年2月28日

摘　要

变锥度组合圆锥壳结构是一种典型的工程结构，被广泛应用于水下航行器等工程领域。首先基于一阶剪切变形壳理论，采用微分求积法(DQM)建立了五自由度变锥度组合圆锥壳结构振动特性分析模型，采用罚函数法模拟其两端的边界条件；紧接着，对所建立模型进行收敛性分析，确定了最佳微分求积节点数和惩罚因子的取值；然后采用有限软件验证了所建立模型的有效性；最后根据已建立模型，研究结构几何参数对变锥度组合圆锥壳结构振动特性的影响。结果表明，增加半锥度角差，会提高变锥度组合圆锥壳结构的稳定性，使得共振频率向高频移动；增加半锥度角和半径R_1会降低其固有频率，使得共振频率向低频移动。

关键词

微分求积有限元，半锥度角，圆锥壳，振动特性

Vibration Characteristic Analysis of Combined Conical Shell Structures with Variable Taper

Jiaya Zhang

Jiangnan Shipyard (Group) Co. Ltd., Shanghai

Received: Jan. 27th, 2025; accepted: Feb. 20th, 2025; published: Feb. 28th, 2025

Abstract

Combined conical shell structure with variable taper is a typical engineering connection structure, which is widely used in rocket, submarine, satellite and other important engineering fields. Based on the theory of first-order shear-deformed shell, a five-degree-of-freedom model of combined conical shell structure with variable taper is established by employing differential quadrature method,

文章引用：张佳亚. 变锥度组合圆锥壳结构振动特性分析[J]. 建模与仿真, 2025, 14(2): 489-498.
DOI: 10.12677/mos.2025.142169

the boundary conditions are simulated by using penalty function method. Then, the convergence analysis of the proposed model is carried out for determining the optimum number of differential quadrature nodes and the value of penalty factor. Then, the validity of the proposed model is verified by finite software. Finally, the influence of structural geometric parameters on vibration characteristics of combined conical shell structure with variable taper is studied according to the established model. The results show that the increase of semi taper angle difference can improve the stability of combined conical shell structure with variable taper, make the resonant frequency move to high frequency. The increase of semi taper angle and radius R_1 will reduce its natural frequency, make the resonance frequency move to the lower frequency.

Keywords

Differential Quadrature Finite Element, Semi Taper Angle, Conical Shell, Vibration Characteristic

1. 引言

作为工程结构的典型代表，圆锥壳结构外形美观，连接性能优异和稳定性强等一系列优点，已经被广泛应用于水下航行器、飞行器等工程领域。变锥度组合圆锥壳结构是指由不同锥度圆柱壳组合而成的组合结构，该结构可以满足多功能变截面连接需求，其结构振动特性会影响工程整体结构的稳定性和振动传递。因此，需要对变锥度组合圆锥壳结构开展系统化研究。

近些年来，国内学者对组合壳类结构开展了深入研究，取得了一系列研究成果。许卓等[1] [2]基于经典层合理论和 Kichhoff-Love 假设，采用 Rayleigh-Ritz 法开展螺栓连接纤维增强薄壁锥－柱组合壳结构的固有特性分析。张帅等[3]基于经典板和 Love 壳体理论，采用改进傅里叶级数法求解锥－柱－球组合结构的振动特性分析。庞福振等[4] [5]采用 Jacobi-Ritz 法研究复杂边界条件下旋转组合壳结构的自由振动特性。石先杰等[6] [7]基于谱几何法建立考虑温度场影响的功能梯度圆锥壳振动特性分析模型。

国外学者对组合壳类结构也开展了一系列研究，取得了显著的研究成果。Bagheri H 等[8]基于一阶剪切变形理论和 Donnell 型运动学假设，采用广义微分求积法研究锥－柱组合结构的自由振动特性。M. Zarei 等[9]根据 Donnell 浅薄壳理论，采用幂级数法求解圆锥－圆柱连接壳结构的固有频率和振型。R. Ansari 等[10]提出基于瑞利－里兹技术的变分公式计算复合材料锥形壳自由振动特性。

综上所述，现有组合壳结构振动特性分析主要集中在圆柱和圆锥连接结构上，变锥度组合壳结构的振动特性分析研究相对较少。基于现有研究不足，本文选取变锥度组合圆锥壳结构为研究对象，基于一阶剪切变形壳理论，采用微分求积法建立五自由度变锥度组合圆锥壳结构振动特性分析模型，采用罚函数法模拟组合壳结构两端的边界条件。然后对本文所建立模型进行收敛性分析和有效性验证，证明本文模型的准确性、通用性和可靠性。最后通过研究结构几何参数对变锥度组合壳结构振动特性的影响，为变锥度组合壳结构的设计和制造提供理论参考。

2. 理论推导

2.1. 变锥度组合圆锥壳结构模型介绍

变锥度组合圆锥壳结构模型是由三个不同锥度的圆锥壳子结构耦合而成，具体结构如图 1 所示。此

外为了保证结构变化的连续性，假定圆锥壳子结构的半锥度角$\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3$。采用曲线正交坐标系描述变锥度组合圆锥壳整体结构$(x,\theta,z)$。图 1 中$O_1$，$O_2$，$O_3$表示圆锥壳子结构的半锥角顶点；$L_1$，$L_2$，$L_3$表示圆锥壳子结构的长度；$h_1$，$h_2$，$h_3$表示圆锥壳子结构的厚度；$R_1$，$R_2$，$R_3$，$R_4$表示圆锥壳子结构的半径。此外相邻圆锥壳子结构是通过共节点的方式耦合。

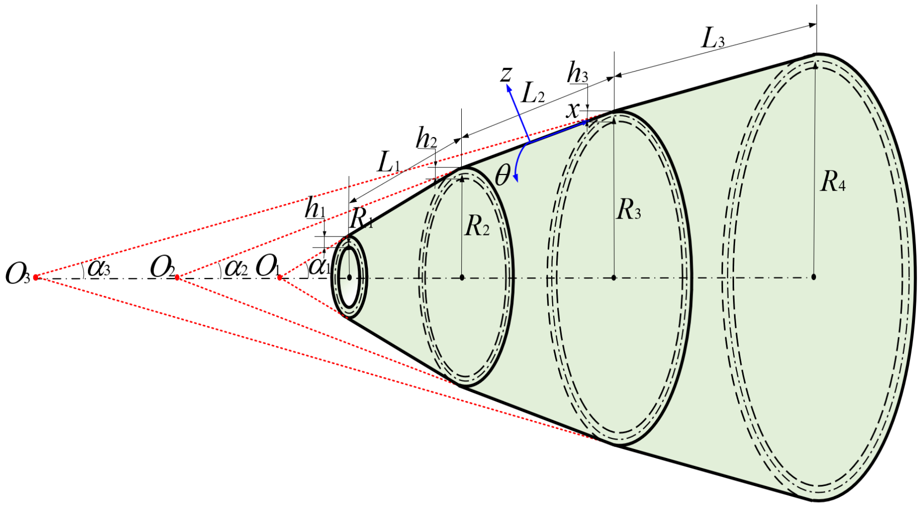

Figure 1. The schematic diagram of the variable taper combination conical shell structure model
图 1. 变锥度组合圆锥壳结构模型示意图

2.2. 变锥度组合圆锥壳结构模型建立

由上所述，变锥度组合圆锥壳结构模型是由圆锥壳子结构耦合而成。因此有必要对圆锥壳子结构进行详细介绍。本节选取变锥度组合圆锥壳中第 i 个圆锥壳子结构为研究对象，具体如图 2 所示。采用曲线正交坐标系(x_i,θ_i,z_i)对圆锥壳子结构进行描述。

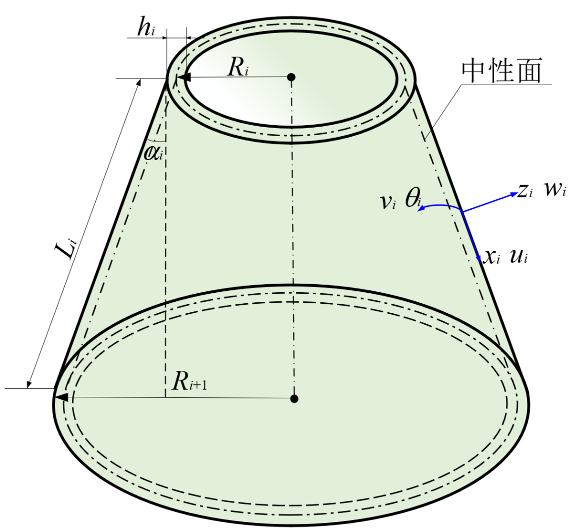

Figure 2. The schematic diagram of the conical shell substructure
图 2. 圆锥壳子结构示意图

图 2 中R_i和R_{i+1}分别表示第 i 个圆锥壳子结构中性面两端的半径；α_i，h_i和L_i分别表示第 i 个圆锥

壳子结构的半锥度角，厚度和长度。u_i，v_i 和 w_i 分别表示第 i 个圆锥壳子结构中性面上任意一点沿 x_i，θ_i 和 z_i 方向的位移。根据一阶剪切变形壳理论[11]，第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的位移分量如下所示。

$$\begin{aligned} u_i\left(x_i,\theta_i,z_i,t\right) &= u_0^i\left(x_i,\theta_i,t\right)+z_i\varphi_x^i\left(x_i,\theta_i,t\right) \\ v_i\left(x_i,\theta_i,z_i,t\right) &= v_0^i\left(x_i,\theta_i,t\right)+z_i\varphi_\theta^i\left(x_i,\theta_i,t\right) \\ w_i\left(x_i,\theta_i,z_i,t\right) &= w_0^i\left(x_i,\theta_i,t\right) \end{aligned} \tag{1}$$

式中 u_0^i，v_0^i 和 w_0^i 分别表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点在中性面上投影点沿 x_i，θ_i 和 z_i 的平动位移分量；φ_x^i 和 φ_θ^i 分别表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点在中性面上投影点关于 θ_i 和 x_i 的旋转位移分量；t 是时间变量。参考文献[11]，第 i 个圆锥壳子结构上任意一点位移和应变之间的关系如下所示。

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{xx}^i=\varepsilon_x^{0i}+z\chi_x^i;\varepsilon_{\theta\theta}^i=\varepsilon_\theta^{0i}+z\chi_\theta^i \\ &\varepsilon_{x\theta}^i=\varepsilon_{x\theta}^{0i}+z\chi_{x\theta}^i \\ &\varepsilon_{xz}^i=\psi_x^i-\frac{u_0^i}{R_x^i}+\frac{1}{A_i}\frac{\partial w_0^i}{\partial x_i} \\ &\varepsilon_{\theta z}^i=\psi_\theta^i-\frac{v_0^i}{R_\theta^i}+\frac{1}{B_i}\frac{\partial w_0^i}{\partial \theta_i} \end{aligned} \tag{2}$$

式中 ε_{xx}^i 和 $\varepsilon_{\theta\theta}^i$ 表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的正应变；$\varepsilon_{x\theta}^i$，ε_{xz}^i 和 $\varepsilon_{\theta z}^i$ 表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的剪切应变；ε_x^{0i}，ε_θ^{0i} 和 $\varepsilon_{x\theta}^{0i}$ 表示第 i 个圆锥壳子结构中性面上一点的膜应变；χ_x^{0i}，χ_θ^{0i} 和 $\chi_{x\theta}^{0i}$ 表示第 i 个圆锥壳子结构中性面上一点的曲率变化；R_x^i 和 R_θ^i 表示第 i 个圆锥壳子结构中性面上一点关于 x 和 θ 的曲率半径；A_i 和 B_i 表示拉梅参数，取决于圆锥壳结构的几何形状。当 h/R_x^i 和 h/R_θ^i 的比值远小于 1，ε_x^{0i}，ε_θ^{0i}，$\varepsilon_{x\theta}^{0i}$，$\chi_x^{0i}$，$\chi_\theta^{0i}$ 和 $\chi_{x\theta}^{0i}$ 的表达式如下所示。

$$\begin{aligned} &\varepsilon_X^{0i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_0^i}{\partial x_i}+\frac{v_0^i}{A_iB_i}\frac{\partial A_i}{\partial \theta_i}+\frac{w_0^i}{R_x^i} \\ &\varepsilon_\theta^{0i}=\frac{1}{B_i}\frac{\partial v_0^i}{\partial \theta_i}+\frac{u_0^i}{A_iB_i}\frac{\partial B_i}{\partial x_i}+\frac{w_0^i}{R_\theta^i} \\ &\varepsilon_{X\theta}^{0i}=\frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{v_0^i}{B_i}\right)+\frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{u_0^i}{A_i}\right) \\ &\chi_X^{0i}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial \varphi_x^i}{\partial x_i}+\frac{\varphi_\theta^i}{A_iB_i}\frac{\partial A_i}{\partial \theta_i} \\ &\chi_\theta^{0i}=\frac{1}{B_i}\frac{\partial \varphi_\theta^i}{\partial \theta_i}+\frac{\varphi_x^i}{A_iB_i}\frac{\partial B_i}{\partial x_i} \\ &\chi_{X\theta}^{0i}=\frac{B_i}{A_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varphi_\theta^i}{B_i}\right)+\frac{A_i}{B_i}\frac{\partial}{\partial \theta_i}\left(\frac{\varphi_x^i}{A_i}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

式中 A_i，B_i，R_x^i 和 R_θ^i 的表达式如下所示。

$$\begin{aligned} &R_x^i=\infty;R_\theta^i=R_i/\cos\alpha_i+x_i\tan\alpha_i \\ &A_i=1;B_i=R_i+x_i\sin\alpha_i \end{aligned} \tag{4}$$

根据广义胡可定律，参考文献[11]，第 i 个圆锥壳子结构上任意一点应力和应变之间的关系如下所示。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}^i = \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i \\
&\boldsymbol{\sigma}^i = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^i & \sigma_{\theta\theta}^i & \tau_{x\theta}^i & \tau_{\theta z}^i & \tau_{xz}^i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&\boldsymbol{\varepsilon}^i = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^i & \varepsilon_{\theta\theta}^i & \varepsilon_{x\theta}^i & \varepsilon_{\theta z}^i & \varepsilon_{xz}^i \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&\boldsymbol{D}_i = \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^i & Q_{22}^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \kappa_s Q_{44}^i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_s Q_{55}^i \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5}
$$

式中 σ_{xx}^i 和 $\sigma_{\theta\theta}^i$ 表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的正应力；$\tau_{x\theta}^i$，τ_{xz}^i 和 $\tau_{\theta z}^i$ 表示第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的剪切应变；Q_{pq}^i $(p,q=1,2,6)$ 表示弹性刚度系数，取决于材料参数；κ_s 表示剪切修正因子，取值为 5/6。Q_{pq}^i 的具体表达式如下所示。

$$
\begin{aligned}
&Q_{11}^i = Q_{22}^i = \frac{E}{1-\mu^2} \\
&Q_{12}^i = Q_{21}^i = \mu Q_{11}^i \\
&Q_{44}^i = Q_{55}^i = Q_{66}^i = \frac{E}{2(1+\mu)}
\end{aligned} \tag{6}
$$

式中 E 和 μ 分别表示材料弹性模量和泊松比。根据能量原理，第 i 个圆锥壳子结构的动能表达式如下所示。

$$
T_i = \frac{1}{2}\iiint_{V_i}\left(\dot{u}_i^2 + \dot{v}_i^2 + \dot{w}_i^2\right) A_i \mathrm{d}x_i \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}z_i \tag{7}
$$

经过变量代换，动能表达式修正为：

$$
T_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L_i}\left(T_0 + T_1 + T_2\right) A_i \mathrm{d}x_i \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}z_i \tag{8-1}
$$

$$
\begin{aligned}
&T_0 = I_0^i\left[\left(\dot{u}_0^i\right)^2 + \left(\dot{v}_0^i\right)^2 + \left(\dot{w}_0^i\right)^2\right] \\
&T_1 = 2I_1^i\left(\dot{u}_0^i \varphi_x^i + \dot{v}_0^i \dot{\varphi}_\theta^i\right) \\
&T_2 = I_2^i\left[\left(\dot{\varphi}_x^i\right)^2 + \left(\dot{\varphi}_\theta^i\right)^2\right]
\end{aligned} \tag{8-2}
$$

式中“·”表示对时间 t 求导；I_0^i，I_1^i 和 I_2^i 表示惯性项，具体表达式为：

$$
\left(I_0^i, I_1^i, I_2^i\right) = \int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}} \rho\left(1, z_i, z_i^2\right) \mathrm{d}z_i \tag{9}
$$

式中 ρ 表示材料密度。根据能量原理，第 i 个圆锥壳子结构的势能表达式如下所示。

$$
U_i = \frac{1}{2}\iiint_{V_i}\left(\boldsymbol{\sigma}^i\right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\varepsilon}^i A_i \mathrm{d}x_i \mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}z_i \tag{10}
$$

当第 i 个圆锥壳子结构收到外载荷激励时，由外载荷激励引起的势能表达式如下所示。

$$
W_i = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{L_i}\left(f_u^i u_0^i + f_v^i v_0^i + f_w^i w_0^i + m_{\varphi x}^i \varphi_x^i + m_{\varphi\theta}^i \varphi_\theta^i\right) A_i \mathrm{d}x_i \mathrm{d}\theta_i \tag{11}
$$

式中 f_u^i，f_v^i 和 f_w^i 表示沿 x_i，θ_i 和 z_i 的外部力载荷；$m_{\varphi x}^i$ 和 $m_{\varphi\theta}^i$ 表示关于 θ_i 和 x_i 的外部力矩载荷。由上所

述，相邻圆锥子结构通过共节点方式进行耦合，但是共节点耦合需要在统一坐标系下实现。由于相邻圆锥子结构(第 i 个和第 $i+1$ 个圆锥子结构)的局部坐标系是不同的，因此需要进行坐标变换，具体变换过程如下所示。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{u}^{i+1}=\boldsymbol{T}^{i}\boldsymbol{u}^{i}\\&\boldsymbol{u}^{i+1}=\begin{bmatrix}u_0^{i+1} & v_0^{i+1} & w_0^{i+1} & \varphi_x^{i+1} & \varphi_\theta^{i+1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{u}^{i}=\begin{bmatrix}u_0^{i} & v_0^{i} & w_0^{i} & \varphi_x^{i} & \varphi_\theta^{i}\end{bmatrix}\end{aligned}\tag{12}$$

式中 $\boldsymbol{T}_i$ 表示坐标变换矩阵，具体表达式如下所示。

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}_i=\begin{bmatrix}\cos\Delta\alpha & 0 & -\sin\Delta\alpha & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \sin\Delta\alpha & 0 & \cos\Delta\alpha & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\&\Delta\alpha=\alpha_{i+1}-\alpha_i\end{aligned}\tag{13}$$

基于第 i 个圆锥壳子结构能量表达式的推导，变锥度组合圆锥壳结构的能量表达式如下所示。

$$T=\sum_{i=1}^{N_s}T_i;U=\sum_{i=1}^{N_s}U_i;W=\sum_{i=1}^{N_s}W_i\tag{14}$$

式中 N_s 表示圆锥壳子结构的个数，$N=3$；T，U 和 W 分别表示变锥度组合圆锥壳结构的结构动能，结构势能和外载荷势能。根据哈密尔顿原理，变锥度组合圆锥壳结构模型的运动方程如下所示。

$$\int_0^{\mathrm{T}}\delta\prod dt=\int_0^{\mathrm{T}}\delta\left(U-T+W\right)\mathrm{d}t=0\tag{15}$$

2.3. 变锥度组合圆锥壳结构模型求解

根据微分求积(DQM)的基本原理，第 i 个圆锥壳子结构上任意一点的位移分量及其微分可以写成如下形式。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f^{(n)}\left(x_p,\theta_q\right)}{\partial x^n}=\sum_{k=1}^{M}a_{pk}^{n}f\left(x_k,\theta_q\right)\\&\frac{\partial f^{(m)}\left(x_p,\theta_q\right)}{\partial \theta^n}=\sum_{s=1}^{N}b_{qs}^{m}f\left(x_p,\theta_s\right)\\&\frac{\partial f^{(n+m)}\left(x_p,\theta_q\right)}{\partial x^n}=\sum_{k=1}^{M}a_{pk}^{n}\sum_{s=1}^{N}b_{qs}^{m}f\left(x_k,\theta_s\right)\\&\left(p=1,\cdots,M;q=1,\cdots,N\right)\end{aligned}\tag{16}$$

式中 a_{pk}^n 和 b_{qs}^m 表示分别表示关于 x 和θ的微分求积加权系数；m 和 n 分别表示微分求积加权系数的阶次，微分求积加权系数的具体表达式见文献[11]。M 和 N 分别表示沿 x 和θ方向划分的微分求积节点数。

根据哈密尔顿原理，通过一系列变量代换，变锥度组合圆锥壳结构的特征方程如下所示。

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}=\boldsymbol{F}\tag{17}$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别表示变锥度组合圆锥壳结构的质量和刚度矩阵；$\boldsymbol{q}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 分别表示变锥度组合圆锥壳结构位移和外载荷列向量；$\boldsymbol{C}$ 表示锥度组合圆锥壳结构的阻尼矩阵，根据瑞丽阻尼的定义，阻尼矩阵的表达式如下所示。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{C}=\alpha\boldsymbol{M}+\beta\boldsymbol{K}\\
&\alpha=\frac{4\pi f_1 f_2\left(f_1\xi_2-f_2\xi_1\right)}{f_1^2-f_2^2}\\
&\beta=\frac{f_2\xi_2-f_1\xi_1}{\pi\left(f_2^2-f_1^2\right)}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

式中 f_1 和 f_2 表示变锥度组合圆锥壳结构前两阶固有频率；ξ_1 和 ξ_2 表示阻尼比，取值为 $\xi_1=\xi_2=0.05$。此外，本文采用罚函数法模拟变锥度组合圆锥壳结构的边界条件，具体步骤参考文献[12]。

3. 算例分析

3.1. 模型收敛性分析

变锥度组合圆锥壳结构模型的收敛性分析主要是研究微分求积节点数对变锥度组合圆锥壳结构模型收敛性的影响，结果如图 3 所示。几何参数：$h=10\ \text{mm}$；$\alpha_1=30^{\circ}$，$\alpha_2=20^{\circ}$，$\alpha_3=10^{\circ}$；$L_1=0.5/\cos\alpha_1\ \text{m}$；$L_2=0.5/\cos\alpha_2\ \text{m}$；$L_3=0.5/\cos\alpha_3\ \text{m}$；$R_1=0.3\ \text{m}$；$R_2=R_1+L_1\sin\alpha_1$；$R_3=R_2+L_2\sin\alpha_2$；$R_4=R_3+L_3\sin\alpha_3$。材料参数：$E=7.1\text{e}10\ \text{Pa}$；$\rho=2700\ \text{kg/m}^3$；$\mu=0.3$。

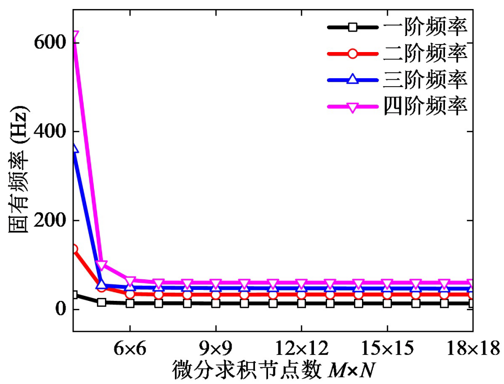

Figure 3. The variation law of natural frequency with the number of differential quadrature nodes
图 3. 固有频率随微分求积节点数的变化规律

从图 3 可以看出，变锥度组合圆锥壳结构前四阶固有频率随微分求积节点数增加出现先下降后保持不变的变化趋势。当微分求积节点数 $M\times N=12\times12$ 时，模型求解结果已经基本收敛。为了保证模型求解精度，本文选取微分求积节点数 $M\times N=15\times15$。

3.2. 模型有效性验证

由上所述，本文已经对变锥度组合圆锥壳结构模型的收敛性进行分析，并确定了最佳微分节点数，下面对变锥度组合圆锥壳结构模型求解结果的有效性进行验证，验证结果如表 1 所示。

Table 1. Comparison and verification of natural frequencies of the tapered composite conical shell structure models
表 1. 变锥度组合圆锥壳结构模型的固有频率对比验证

边界类型	频率阶次	本文结果	有限元结果
自由边界	1	13.28	12.06
	2	33.14	31.96
	3	46.82	51.04

续表

	4	59.93	59.02
	5	93.93	93.24
	1	310.23	312.22
	2	310.64	312.58
简支边界	3	324.59	328.65
	4	343.94	345.25
	5	355.90	363.13
	1	312.59	313.97
	2	314.63	314.68
固支边界	3	327.01	330.09
	4	348.41	348.01
	5	359.89	365.52

从表 1 可以看出，在不同边界条件下，本文模型求解的前五阶固有频率结果与有限元软件(ABAQUS)的求解结果具有较好的一致性，验证了本模型可以求解变锥度组合圆锥壳结构振动特性。

3.3. 模型参数化研究

由上所述，本文已经对所建立变锥度组合圆锥壳结构的收敛性和准确性进行了验证。本节将根据已建立的变锥度组合圆锥壳结构模型，研究模型关键参数对其振动特性的影响，为变锥度组合圆锥壳结构的设计提供参考。

首先，研究半径 R_1 对变锥度组合圆锥壳结构固有频率的影响，具体结果如图 4 所示。模型参数见图 3，边界条件为简支边界。

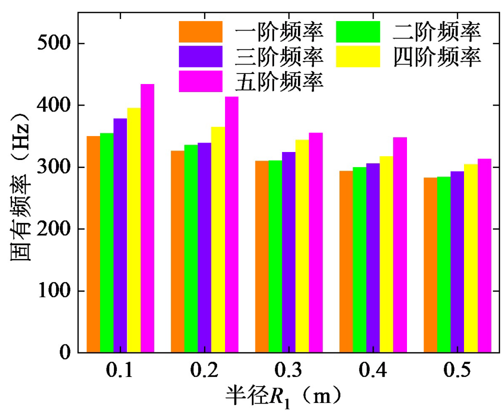

Figure 4. The variation law of natural frequency of the tapered composite conical shell structure with radius R_1
图 4. 变锥度组合圆锥壳结构固有频率随半径 R_1 的变化规律

从图 4 可以看出，变锥度组合圆锥壳结构前五阶固有频率随着半径 R_1 的增加而出现下降的变化趋势。结果表明，增加半径 R_1 会降低变锥度组合圆锥壳结构的稳定性，使其共振频率向低频移动。

然后，研究半锥度角对变锥度组合圆锥壳结构固有频率的影响，具体结果如图 5 所示。除了半锥度角和边界条件外，其余模型参数与图 3 中所用到的模型参数相同。边界条件与图 4 相同。

从图 5 可以看出，变锥度组合圆锥壳结构前五阶固有频率随半锥度角增加出现下降的变化趋势。这是由于当半锥度角增大时，结构的几何形状变得扁平，曲率减小。根据一阶剪切变形壳理论可知，壳体的弯曲刚度与结构曲率呈正相关关系，因此变锥度组合圆锥壳结构的弯曲刚度随着半锥度角的增加而减小，变锥度组合圆锥壳结构的稳定性发生降低，结构的共振频率向低频偏移。

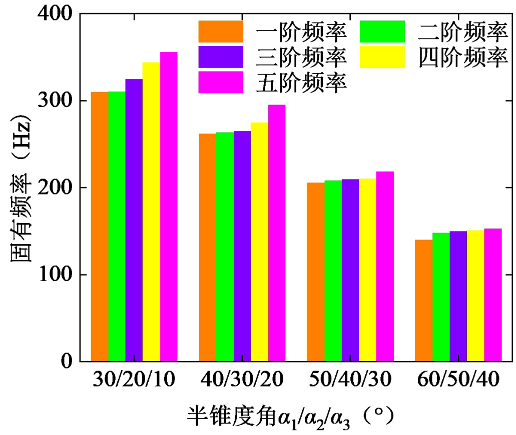

Figure 5. The variation law of natural frequency of the tapered composite conical shell structure with the half cone angle
图5. 变锥度组合圆锥壳结构固有频率随半锥度角的变化规律

最后，研究半锥度角差对变锥度组合圆锥壳结构固有频率的影响，具体结果如图 6 所示。模型参数与图 5 中所用到的模型参数相同。

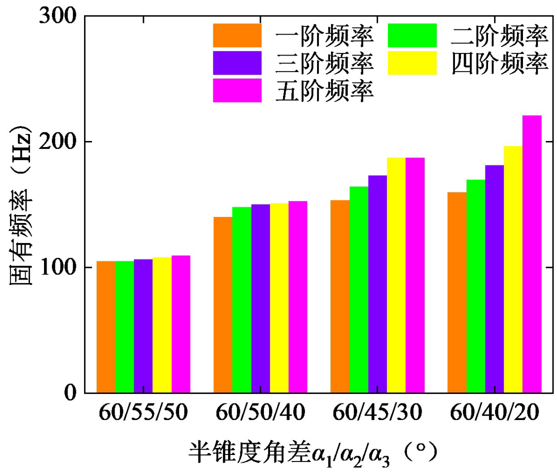

Figure 6. The variation law of natural frequency of the tapered composite conical shell structure with the half cone angle difference
图 6. 变锥度组合圆锥壳结构固有频率随半锥度角差的变化规律

从图 6 可以看出，变锥度组合圆锥壳结构前五阶固有频率随半锥度角差增加出现增加的变化趋势。结果表明，增加半锥度角差会提高变锥度组合圆锥壳结构的稳定性，使其共振频率向高频移动。

4. 结论

本文基于一阶剪切变形壳理论，采用微分求积法构建了五自由度变锥度组合圆锥壳结构振动特性分析模型。通过一系列数值算例验证了本文所建立模型的收敛性与准确性。在此基础上，对变锥度组合圆

锥壳结构振动特性开展了参数化研究，得出如下结论：

(1) 半径 R_1 和半锥度角的增加会降低变锥度组合圆锥壳结构的稳定性，使得结构固有频率发生减小。

(2) 半锥度角差的增加会提高变锥度组合圆锥壳结构的稳定性，使得结构固有频率发生增大。

基金项目

国家自然科学基金资助项目。

参考文献

[1] 许卓, 于翔川, 许沛尧, 等. 螺栓连接纤维增强薄壁锥-柱组合壳的固有特性分析[J]. 振动工程学报, 2024: 1-11.

[2] 曹银行, 柳贡民, 胡志. 锥-柱组合壳结构固有特性计算和优化设计[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2023, 44(3): 395-401.

[3] 张帅, 李天匀, 朱翔, 等. 改进傅里叶级数法求解封口锥柱球组合壳的自由振动[J]. 振动工程学报, 2021, 34(3): 601-609.

[4] 庞福振, 李海超, 霍瑞东, 等. 基于 Jacobi-Ritz 法的旋转组合结构自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2018, 31(5): 827-836.

[5] 庞福振, 李海超, 彭德炜, 等. 双曲率组合结构自由振动特性分析[J]. 振动工程学报, 2020, 33(3): 441-449.

[6] 石先杰, 左朋. 温度场影响下功能梯度圆锥壳振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2022, 41(18): 9-15+24.

[7] 左朋, 石先杰. 温度场下功能梯度圆锥壳-环板振动特性分析[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2024, 45(4): 709-716.

[8] Bagheri, H., Kiani, Y. and Eslami, M.R. (2018) Free Vibration of Joined Conical-Cylindrical-Conical Shells. *Acta Mechanica*, **229**, 2751-2764. https://doi.org/10.1007/s00707-018-2133-3

[9] Zarei, M., Rahimi, G.H. and Hemmatnezhad, M. (2021) On the Free Vibrations of Joined Grid-Stiffened Composite Conical-Cylindrical Shells. *Thin-Walled Structures*, **161**, Article ID: 107465. https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.107465

[10] Ansari, R., Faghih Shojaei, M., Rouhi, H. and Hosseinzadeh, M. (2015) A Novel Variational Numerical Method for Analyzing the Free Vibration of Composite Conical Shells. *Applied Mathematical Modelling*, **39**, 2849-2860. https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.11.012

[11] Li, H., Zhang, W. and Zhang, Y.F. (2024) Vibration Analysis of Graphene-Reinforced Porous Aluminum-Based Variable-Walled Thickness Sandwich Joined Conical-Conical Panel with Elastic Boundary Conditions Using Differential Quadrature Method. *Thin-Walled Structures*, **201**, Article ID: 112016. https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112016

[12] Wang, Q., Li, Z., Qin, B., Zhong, R. and Zhai, Z. (2021) Vibration Characteristics of Functionally Graded Corrugated Plates by Using Differential Quadrature Finite Element Method. *Composite Structures*, **274**, Article ID: 114344. https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114344