Modeling and Simulation 建模与仿真, 2025, 14(4), 107-117
Published Online April 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/mos
https://doi.org/10.12677/mos.2025.144269

基于无穷远奇点的电力系统稳定域边界拓扑研究

范宇杉[1]，张德培[2]，胡晓豪[3]

[1]上海理工大学机械工程学院电气工程系，上海
[2]国网湖北省电力有限公司宜昌供电公司，湖北 宜昌
[3]国网湖北省电力有限公司荆门供电公司，湖北 荆门

收稿日期：2025年3月2日；录用日期：2025年3月25日；发布日期：2025年4月9日

摘　要

新能源的接入给电网传统稳定性理论带来了挑战，本文从稳定域结构角度出发，研究了稳定域边界上流形的拓扑结构及无穷远奇点的分布特性，旨在为电网稳定运行提供更加全面的理论支撑。基于Poincare紧致性理论推导了电力系统经典模型的新向量场，提出一种改进收缩投影变换方法，获得位于(超)球面上的无穷远奇点位置。通过建立无穷远奇点与电力系统稳定性的之间映射关系，提出了判定电力系统稳定性的指标。仿真结果表明，所提出的收缩投影变换方法同样适用于不确定性的电力系统稳定域边界分析，且基于无穷远奇点的指标能够有效判定系统的稳定程度。

关键词

稳定域，流形，拓扑，奇点

Global Topological Analysis of Power System Stability Boundary Considering Singularities at Infinity

Yushan Fan[1], Depei Zhang[2], Xiaohao Hu[3]

[1]Department of Electrical Engineering, School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai
[2]Yichang Power Supply Company, State Grid Hubei Electric Power Co., Ltd., Yichang Hubei
[3]Jingmen Power Supply Company, State Grid Hubei Electric Power Co., Ltd., Jingmen Hubei

Received: Mar. 2nd, 2025; accepted: Mar. 25th, 2025; published: Apr. 9th, 2025

文章引用: 范宇杉, 张德培, 胡晓豪. 基于无穷远奇点的电力系统稳定域边界拓扑研究[J]. 建模与仿真, 2025, 14(4): 107-117. DOI: 10.12677/mos.2025.144269

Abstract

New energy sources bring challenges to the stability theory. In this paper, the topology of the manifold on the boundary of the stability region and the distribution of the singularities at infinity are studied from the perspective of the region, aiming to provide more comprehensive theoretical support for the stable operation of the grid. Based on the Poincare converse theory, a new vector field of the classical model of the power system is derived, and an improved shrinking projection transformation is proposed to obtain the singularities at infinity located on the (hyper) sphere. By establishing the mapping relationship between the distribution of the singularities and the stability degree of the power system, a stability index based on the singularities is proposed. The simulation results show that the proposed method is also applicable to the boundary analysis of the non-deterministic power system, and the index based on the singularities can effectively determine the stability of the system.

Keywords

Stability Region, Manifold, Topology, Singularity

1. 引言

随着电力负荷持续增长，风能、光伏发电等大规模间歇式能源的接入，高比例可再生能源的并网使得现代电力系统呈现出较强的不确定性和低惯量特性，系统稳定机理发生了显著变化，由此产生了一系列新的稳定问题，给传统稳定性分析手段带来了挑战，迫切需要寻找更加有效的稳定性分析理论和数学方法[1]-[3]。

稳定域是指状态空间上的一个集合，从该集合出发的所有状态轨线将收敛于指定运行状态，刻画其边界可以观测到系统的稳定程度，即偏离稳定状态的允许值。由于非线性微分动力系统的复杂性，导致有关稳定域的研究经过多年发展依然具有挑战性。近年来，国内外涌现出大量有关稳定域边界分析及稳定评估方面的研究成果，包括以下几个方面：

1) 如何有效精确地刻画稳定域边界(Boundary of the Stability Region, BSR)，主要有能量函数法、流形估计法，以及结合了上述理论的综合方法等等。其中，能量函数法的核心是利用 Lyapunov 函数的凸边界逼近系统的稳定域的一个闭合子集[4]，该方法简单直接，避免了运行轨迹的大量数值积分计算。在能量函数的构造方面，目前使用广泛的有首次积分法、Zubov 法、Noether 构造法等，但每种方法构造出来的能量函数形式均不相同，不具有通用性。

流形估计法通过对稳定流形的计算实现 BSR 的估计。十九世纪初，Hilbert 以二维拓扑流形为研究对象，第一次通过邻域来定义平面，并以平面作为刻画流形的理想载体，由此建立起了流形的几何理论，为利用流形描述 BSR 的研究提供了理论基础。1993 年，Guckenheimer 等学者引入测地线水平集[5]的概念对鞍点的稳定流形进行局部近似，初步实现了流形几何结构的可视化，这一成果引起了学者们的广泛关注，此后涌现出了大量研究成果。文献[6]揭示了不变流形与轨迹之间的吸引关系，以及中心流形与倍周期分岔之间的关联。为了进一步提高流形的计算效率，文献[7]提出了轨迹弧长法，由于只涉及数值积

分和插值计算，在仿真速度方面得到大幅提高，但存在插值误差难以控制的缺点。此外，学者们还提出了其它卓有成效的流形计算方法，如自适应轨道延拓法[8]、单纯形法[9]、蜂窝映射法和几何摄动法[10]等，为动力系统的 BSR 刻画提供了理论基础和研究思路。1994 年，Chiang H. D.等学者结合了动力系统理论与流形理论，提出了 BCU 方法[11]，进一步推动了直接法在电力系统暂态稳定分析中的发展，但限于高维流形拓扑的复杂性，流形理论在实际电力系统中的应用尚不多见。

2) 如何定量衡量稳定域的大小。稳定域大小反映了系统保持稳定的能力。文献[12]利用域内点的概率分布来衡量域的大小，并将该方法推广到电力系统的稳定性研究：通过记录故障池中最终能够稳定的样本个数及其与总样本数据的比值，从而定量衡量系统在不同故障情况下的稳定程度。基于这一理论研究成果，文献[13]实现了多机系统中各发电机稳定程度的排序；文献[14]进一步提出广义吸引盆稳定的概念，拓宽了该方法的适用范围。为了提高计算效率，引入了蒙特卡洛仿真法，在研究参数范围内随机选取有限初始点，利用数值仿真检查由这些初始点出发的轨迹的收敛性，确定该参数范围内的稳定域；文献[15]结合蒙特卡洛和样本数据等分析方法和理论，给出了强激励下双摆系统的 9 个稳定域，并对相应的稳定程度进行了验证。

为了拓展电力系统稳定性理论的应用范围，掌握稳定域的拓扑结构，本文通过研究稳定域边界上的流形及无穷远奇点的分布特性，对三维相空间中稳定域的折叠变化趋势进行了讨论，提出一种坐标变换方法，在投影空间中展示稳定域边界的全局结构，并基于无穷远奇点构造电力系统稳定性指标。

2. 稳定域与流形的关系

考虑如下形式的非线性动力学系统：

$$\dot{x} = f\left(x\right) \tag{1}$$

其中，系统的平衡点是指满足方程 $f\left(x_s\right)=0$ 的解，状态转移过程 $\phi\left(t,x\left(0\right)\right)$ 表示从 $t=0$ 时刻出发的解轨迹。在相空间中，能够汇聚至平衡点 x_s 的所有初始点的集合被称为该平衡点的稳定域：

$$\Omega\left(x_s\right)=\left\{x\left(t\right)\middle|\lim\phi\left(t,x\right)=x_s,t\to+\infty\right\} \tag{2}$$

根据上述定义，不难发现 $\Omega\left(x_s\right)$ 的边界上遍布着临界稳定的平衡点，且此类平衡点(记作 x_u)的 Jacobian 矩阵既有含正实部的特征根，也有含负实部的特征根。这就意味着，平衡点 x_u 的邻域内同时包含不稳定流形 $W^u\left(x_u\right)=\left\{x\middle|\phi\left(t,x\right)\to x_u,t\to-\infty\right\}$ 和稳定流形 $W^s\left(x_u\right)=\left\{x\middle|\phi\left(t,x\right)\to x_u,t\to+\infty\right\}$。其中，$W^s\left(x_u\right)$ 自远处出发最终汇聚至 x_u， $W^u\left(x_u\right)$ 自该点出发并逐渐远离 x_u。边界上的这些特定平衡点的稳定流形的并集，则构成稳定平衡点 x_s 的 BSR [16]，即

$$\partial\overline{\Omega\left(x_s\right)}=\bigcup_{i=1}^{m}\overline{W^s\left(x_u\right)} \tag{3}$$

式中， $i=1,2,\cdots,m$， m 为平衡点的数量。

可见，要想确定一个平衡点 x_s 的 BSR，并不需要计算出所有能够汇聚至该点的轨迹集合，只需要计算出边界上稳定流形的并集即可。

图 1 给出了边界上稳定流形与 BSR 的位置示意图。以边界上任意一个平衡点 x_u^1 为例，其稳定流形可以看作是以下平滑函数 $h\left(x\right)$ 的零集：

$$W^s\left(x_u^1\right)=\left\{x\middle|h\left(x\right)=0\right\} \tag{4}$$

式中，平滑函数 $h\left(x\right)$ 为 x_u^1 处的稳定流形表达式，满足充要条件 $\left\{L_f h\left(x\right)=\mu h\left(x\right),h\left(x_u^1\right)=0\right\}$，其中，

$L_f h(x) = \partial h(x)/\partial x\, f(x)$ 是函数 $h(x)$ 沿向量场方向的 Lie 导数；μ 为平衡点 x_u^1 处 Jacobian 矩阵的正特征值，该平滑函数经 Taylor 展开后有如下二次近似形式：

$$h_Q(x) = \left[x - x_u^1\right]^{\mathrm{T}} \eta + \frac{1}{2}\left[x - x_u^1\right]^{\mathrm{T}} \Psi \left[x - x_u^1\right] + 0\left(\|x\|\right)^3 \tag{5}$$

其中，二次系数矩阵 Ψ 是如下方程的特解：

$$\left(\frac{\mu}{2} I - J^{\mathrm{T}}\right)\Psi + \Psi\left(\frac{\mu}{2} I - J\right)^{\mathrm{T}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i H_i \tag{6}$$

式中，η_i 是 Jacobian 矩阵特征值 μ_i 的左特征向量，$H_i = \partial^2 f_i/\partial x^2$ 是 f 在平衡点 x_u^1 处的 Hessian 矩阵。式(5)是稳定流形的隐函数表达式，相邻平衡点 $\left(x_u^1, x_u^2, \cdots, x_u^m\right)$ 的稳定流形的并集(图中的虚线所围域的阴影部分)构成了 x_s 的稳定域。

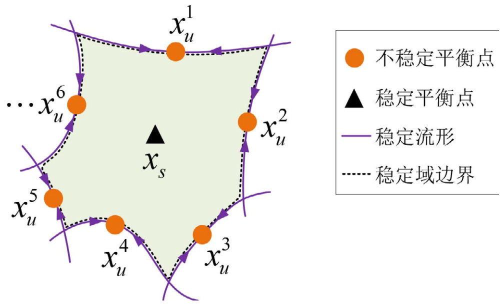


Figure 1. The distribution of stable manifolds of the UEPs on the boundary
图 1. 边界上 UEP 的稳定流形的位置分布

另有一种特殊情况，当边界上平衡点数量较少时，如图 2 所示，平衡点邻域内的局部流形不足以构成闭合形式的稳定域边界，此时，还需要考虑流形的全局拓扑。流形能否向内卷曲构成闭合的边界需进一步分析，该部分内容将在 3.1 节具体讨论。

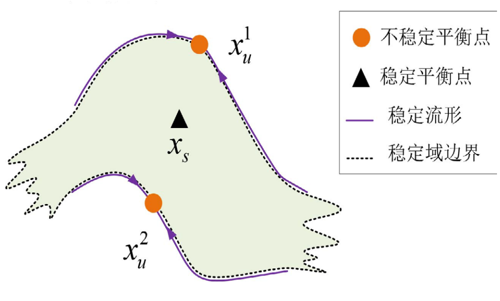


Figure 2. Schematic diagram of the stable manifolds that does not form a closed region
图 2. 稳定流形不构成闭合区域的示意图

3. 无穷远奇点与稳定域边界的关联性分析

对于一个平衡点而言，逼近该点的流形称为稳定流形，远离该点的流形称为不稳定流形。由式(4)~(5)可以获得 BSR 的局部信息。然而，从拓扑结构的角度来看，仅有 BSR 的局部信息还不足以体现非线性系统的完整动力学特性。为了获得 BSR 的全局结构，本节采用收缩投影变换方法将系统投影至有限空间

DOI: 10.12677/mos.2025.144269

范围内，在投影空间中观测稳定域及其 BSR 的全局结构。

针对 n 维非线性系统(1)，按照如下的三维形式对系统进行坐标变换：

$$(y_1, y_2, y_3) = \frac{(x_1, x_2, x_3)}{1+h} \tag{7}$$

其中，$h = (x_1 + x_2 + x_3)^{1/2}$。变换后，原系统轨迹被映射至新的空间中 $S = \left\{(y_1, y_2, y_3) \middle| y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = r^2, r = h/(1+h)\right\}$。

当原系统中任意一点处于无穷远处时在无穷远处时 $(x_i \to \infty, i \in 1,2,3)$，可以确定 $h \to \infty$，从而可以确定 $\lim\limits_{h\to\infty} r = 1$。此时原系统中的轨迹将被投影至单位球体表面 $S' = \left\{y_1, y_2, y_3 \middle| y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1\right\}$，若原系统在无穷远处存在奇点(singularities at infinity, SAI)，它必然分布在 S' 上。

3.1. SAI 的收缩投影变换方法

利用收缩投影变换方法求取原系统中的点投影至 S' 上时，需要根据球面的六个顶点为中心，建立相应的坐标邻域，有效确定坐标对应关系。下文以单位球面的 $(1,0,0)$ 为例建立相应的坐标邻域 α_1 进行分析。

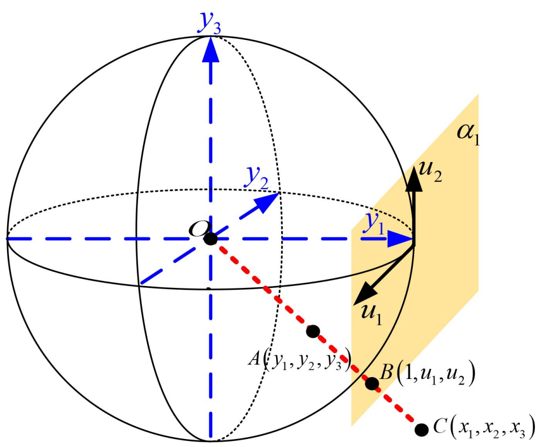


Figure 3. Schematic diagram of contraction projection transformation

图 3. 收缩投影变换示意图

如图 3 所示，在 α_1 中建立坐标轴 u_1 平行于 y_2，u_2 平行于 y_3。在原系统中的点映射至单位球体的过程中时，一定会通过该坐标邻域。通过原系统中的点 $C(x_1, x_2, x_3)$ 与该坐标邻域的点 $B(1, u_1, u_2)$，以及单位球体表面的点 $A(y_1, y_2, y_3)$ 之间存在的共线关系，可以有效确定收缩投影变换的坐标对应关系。

根据 $C(x_1, x_2, x_3)$ 与 $B(1, u_1, u_2)$ 的共线关系可知：$x_1/1 = x_2/u_1 = x_3/u_2$。令 $u_3 = 1/x_1$，对 u 求偏导可得：

$$\begin{cases} du_1 = -\dfrac{x_2}{x_1^2} f_1 + \dfrac{1}{x_1} f_2 \\ du_2 = -\dfrac{x_3}{x_1^2} f_1 + \dfrac{1}{x_1} f_3 \\ du_3 = -\dfrac{1}{x_1^2} f_1 \end{cases} \tag{8}$$

设方程 $du\big|_{u_3=0} = 0$ 有解为 $(u_1^*, u_2^*, 0)$，该坐标值即为原系统中的点 $C(x_1, x_2, x_3)$ 映射至坐标邻域上的点

$B(1,u_1,u_2)$的坐标值$(1,u_1^*,u_2^*)$。

根据$A(y_1,y_2,y_3)$与$B(1,u_1,u_2)$的共线关系可知，一定存在任意标量$d\in\mathbb{R}$满足关系：$(y_1,y_2,y_3)=d(1,u_1,u_3)$。结合球面方程$y_1^2+y_2^2+y_3^2=1$，可以得到$d$的值为：$d=\pm1/(1+u_1^2+u_2^2)^{1/2}$。由此可以确定坐标邻域内点$B(1,u_1,u_2)$映射至单位球体表面的点$A(y_1,y_2,y_3)$的具体坐标：

$$(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{\pm1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}},\frac{\pm u_1}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}},\frac{\pm u_2}{\sqrt{1+u_1^2+u_2^2}}\right) \tag{9}$$

结合前文得到的原系统中的点$C(x_1,x_2,x_3)$映射至坐标邻域上的点$B(1,u_1,u_2)$的坐标值$(1,u_1^*,u_2^*)$，可以确定原系统中的点映射至单位球体表面时的具体坐标：

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(\frac{\pm1}{\sqrt{1+u_1^{*2}+u_2^{*2}}},\frac{\pm u_1^*}{\sqrt{1+u_1^{*2}+u_2^{*2}}},\frac{\pm u_2^*}{\sqrt{1+u_1^{*2}+u_2^{*2}}}\right) \tag{10}$$

以上即为原系统中点的 SAI 通过收缩投影变换投影至球体表面的过程，根据球面上的六个顶点建立相应的六个坐标邻域，则可以确定原系统中任意一处 SAI 投影至单位球体表面的坐标。

3.2. SAI 及全局流形研究的必要性

3.2.1. SAI 研究的必要性

为了说明 SAI 在电力系统稳定域刻画过程中的重要性，下面采用单机无穷大模型来研究电力系统的功角稳定域与其鞍点分界线之间的关系。

$$\begin{cases}\dot{\delta}=\omega_0\omega \\ \dot{\omega}=\dfrac{1}{M}\left(-D\omega+P_M-P_{em3}\sin\delta\right)\end{cases} \tag{11}$$

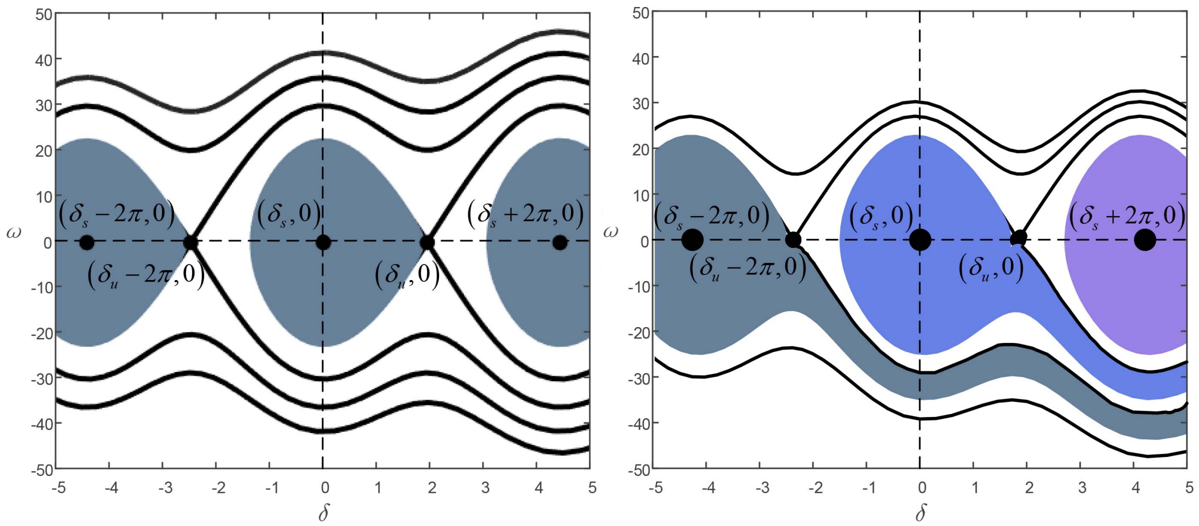
系统(11)在一个周期内有平衡点为$(\delta_s,0)$和$(\delta_u,0)$，由平衡点处的 Jacobian 矩阵的特征方程可知，上述平衡点的稳定性与阻尼系数D有关。当$D=0$时，平衡点$(\delta_s,0)$表现为中心点；当$D<0$时，该点表现为不稳定结点或焦点；当$D>0$时，该点表现为稳定结点或焦点。而针对平衡点$(\delta_u,0)$而言，无论阻尼系数D取何值，该点均表现为鞍点。

当忽略系统阻尼时，平衡点$(\delta_s,0)$表现为中心，该点的完整稳定域边界由相邻鞍点δ_u的鞍点分界线构成，如图 4(a)所示；当系统具有正阻尼时，平衡点δ_s表现为稳定焦点，其稳定域延伸至相平面的无穷远，如图 4(b)所示。要想刻画其完整的稳定域，还需要研究边界延伸至无穷远处的形态，并判断稳定域是否包含 SAI。

3.2.2. 全局流形研究的必要性

针对系统内某一特定平衡点，仅以鞍点分界线的局部信息来确定其 BSR 往往是不全面的，还需要结合含有 SAI 的全局流形来分析。下面以一个简单非线性系统为例进行说明。

令$Q(x,y)=-x+\mu x^2-y^2$，$P(x,y)=y$，$\mu>0$，可知该系统有两个平衡点，平衡点$S(0,0)$表现为中心，平衡点$B(1/\mu,0)$表现为鞍点，二者可以鲜明的表现出鞍点分界线与中心点准确的 BSR 的关系。采用 Poincaé 变换对系统进行投影变换之后，可以得到鞍点分界线在不同参数下的全局结构。如图 5 所示，稳定平衡点为 S，阴影区域为该点的 BSR；鞍点为 B，虚线为其鞍点分界线；$\tilde{D},\tilde{\tilde{D}},\tilde{E},\tilde{\tilde{E}},\tilde{F},\tilde{\tilde{F}}$为无穷远处的鞍结点，实线为该系统的全局相轨线。蓝色分界线所包围的区域为平衡点$S(0,0)$的稳定域。



(a) 阻尼等于零　　(b) 阻尼大于零

Figure 4. The stability of OMIB and separatrix trajectory of saddle points
图 4. 系统稳定域与相邻鞍点的分界线

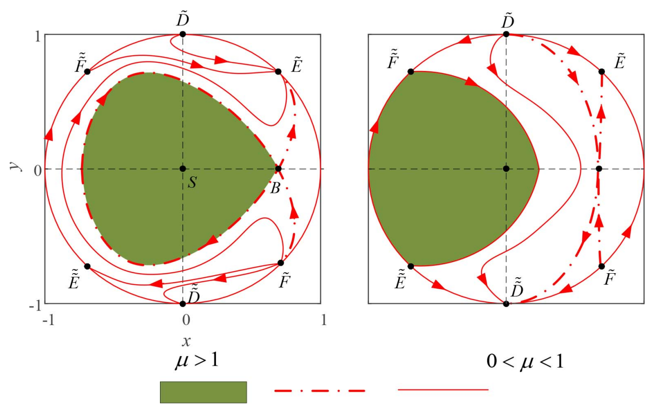


Figure 5. Global structure of the separatrix of the saddle
图 5. 鞍点分界线的全局结构

从图 5 可以发现如下结论：

a) 当 $\mu>1$ 时，图 5 中的虚线围成阴影部分的 BSR，鞍点 B 分界线所构成的闭轨线就是稳定平衡点 S 的 BSR。

b) 当 $0<\mu<1$ 时，可以看出虚线与阴影区域并不相关。鞍点的全局分界线的分支分别由无穷远处的鞍结点 $\tilde{F}$ 和 $\tilde{D}$ 出发，经过鞍点 B 之后，终止于无穷远处的鞍结点 $\tilde{E}$ 和 $\tilde{\tilde{D}}$；此时 S 的稳定域是由无穷远奇点所围成的闭区域 $\tilde{\tilde{F}}\tilde{\tilde{E}}$ 构成。鞍点分界线所围成的闭区域不再作为稳定平衡点 S 的 BSR。

因此在刻画含有 SAI 的全局流形才能准确辨识 BSR 的完整结构，若仅由鞍点分界线所围成的闭轨线来界定系统的 BSR，则会得到相对保守的结论，甚至可能会带来较大误差，这也是本文引入全局流形来分析系统稳定域的主要原因。

3.3. 基于 SAI 的稳定性指标

当电力系统遭受到小扰动，故障消失后系统的平衡点及其 BSR 一般不会有明显变化，相空间中的轨

迹经过短暂的振荡后将逐渐恢复到原来的稳定状态。但是，当电力系统遭受到大扰动(如切机、切负荷等)，故障被清除后，系统的平衡点及其 BSR 可能会发生显著变化，故障后系统能否维持、或跃变至新的稳定平衡点则需要进一步讨论。

三维投影空间中的 SAI 通常分布在单位球表面，随着 BSR 的变化，将沿着球面发生移动，作为稳定域边界上的端点，SAI 的稳定性和位置取决于故障后系统的结构特征。有了 SAI 的补充，一方面，它有助于勾勒出 BSR 的完整结构，另一方面，通过 SAI 的分布特性还可以反映 BSR 的变化情况，从而反映系统的稳定程度。在三维投影空间中，由 SAI 所构成的平面面积可以表示为：

$$I_{\mathrm{SAI}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \tag{12}$$

其中，$a = \|\mathrm{SAI}_1 - \mathrm{SAI}_2\|$，$b = \|\mathrm{SAI}_2 - \mathrm{SAI}_3\|$，$c = \|\mathrm{SAI}_1 - \mathrm{SAI}_3\|$，$p = (a+b+c)/2$，$\mathrm{SAI}_1$、$\mathrm{SAI}_2$、$\mathrm{SAI}_3$ 分别为系统在半球面上的 SAI 坐标。该指标反映了无穷远处的平衡点变化趋势，体现了稳定域的扩张与收缩情况，亦可以衡量系统稳定程度的变化。

4. 仿真分析与验证

电力系统轨迹变化的特征取决于受扰后系统的结构是否稳定，基于轨迹信息判别暂态失稳和紧急控制的方法已经有大量研究成果，本节对轨迹的判别和暂态失稳的预测不作展开，主要探究投影空间中稳定域的动态特性、SAI 分布与系统稳定性的关联，验证收缩投影方法在含有随机扰动的电力系统中的适用性。

4.1. 基于单机无穷大系统暂态功角稳定域边界与无穷远奇点的关系

根据上述内容结合无穷远奇点理论确定阻尼系数对单机无穷大系统暂态功角稳定域全局结构的影响。首先，确定系统平衡点及鞍点分界线；其次，通过 Poincaré 变换计算系统无穷远奇点，将其与平衡点和鞍点映射至单位球面；最后，得到该球面的俯视图，即系统映射在球面上的功角稳定域，根据不同阻尼系数得到不同稳定域。图 6 给出了三种不同阻尼下系统在投影空间下的完整稳定域。

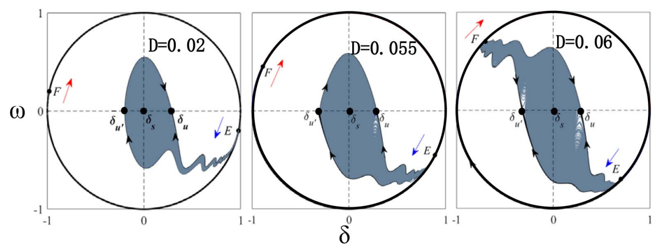


Figure 6. The boundary of the stability domain of the OMIB with a function of damping

图 6. 随阻尼变化的系统稳定域边界

从图 6 中可知：1) 对称分布于赤道的的一组无穷远奇点 E 和 F 的位置随着阻尼系数的增大而规律的发生变化，E 逐渐远离 $(1,0,0)$、靠近 $(0,-1,0)$，F 逐渐远离 $(-1,0,0)$、靠近 $(0,1,0)$；2) 平衡点 $(\delta_s,0)$ 的稳定域边界穿过了无穷远奇点 E 和 F、鞍点 $(\delta_u,0)$ 和 $(\delta_{u'},0)$，稳定域边界随着阻尼的增大而增大，这同时也符合电力系统稳定性理论。如果此时系统切除故障的功角和角速度恰好位于稳定域内，那么系统就会受到稳定平衡点的吸引收敛至该平衡点，反之则会发散。

4.2. 基于 SAI 分布的稳定性验证

为了进一步验证该方法在大型电网中的有效性，本节在 IEEE 16 机 68 节点测试系统上进行了仿真，

实验所涉及的三相短路故障位置：故障 1 (线路 27-53)、故障 2 (线路 55-54)、故障 3 (线路 25-54)和故障 4 (线路 30-53)，已在图 7 中标注。

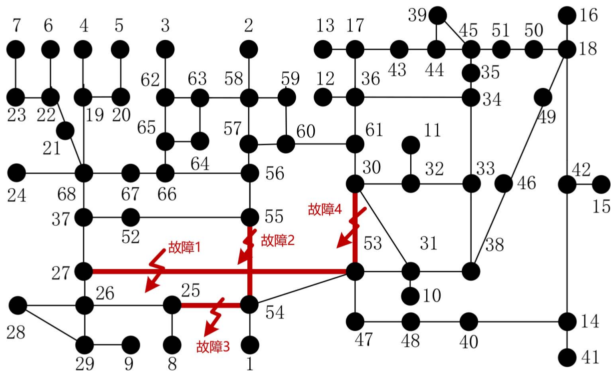


Figure 7. Diagram of the 68-bus 16-generator test system
图 7. 16 机 68 节点测试系统

故障持续时间均设置为 300 ms，测试系统在不同的故障情况下可能被撕裂成 2 群、3 群，甚至多群运行模式。在本节实验中，当领先机群被识别出之后，其余机群将全部被划分为剩余机群，接着采用 SIME 方法对系统进行等值处理，得到两组机群的等效功角 δ_S 和 δ_A 。

下面以故障 1 为例进行分群说明，故障后测试系统的发电机功角曲线如图 8 所示，根据曲线变化趋势可以观测到系统被撕裂成了 3 组机群运行模式：{G2-G8}、{G1, G10-G16}和{G9}，将{G2-G8}定义为领先机群，该组机群的等效功角 δ_S 在图中用粗虚线表示，其余的机组{G1, G10-G16}和{G9}则被定义为剩余机群，等效功角 δ_A 在图中用虚线表示。采用同样的方法可以得到其余 3 种故障情况下系统的领先机群分别为：{G1-G9, G11}、{G2-G9, G11}和{G2-G9, G11}。

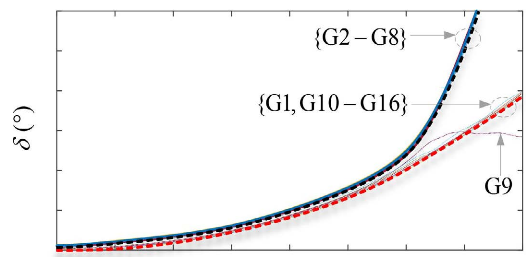


Figure 8. Angel curves of the test system under the fault case 1
图 8. 故障 1 情况下测试系统的功角曲线

对等值模型进行收缩投影变换后，可以进一步得到基于 SAI 的暂态稳定指标 I_{SAI} ，如表 1 所示，其中故障 3 的稳定指标为 $I_{SAI\text{-}3} = 0.0844$ ，是所有故障情况中的最小稳定指标。

Table 1. Stability index based on SAI under different faults
表 1. 不同故障情况下基于 SAI 的稳定指标

故障位置	领先机群	稳定指标	临界稳定时间
故障 1 (线路 27-53)	{G2-G8}	0.0876	839
故障 2 (线路 55-54)	{G1-G9, G11}	0.2075	1088

续表

故障 3 (线路 25-54)	{G2-G9, G11}	0.0844	820
故障 4 (线路 30-53)	{G2-G9, G11}	0.1093	956

为了验证结果的正确性，设定 2 组机群的等效功角之差为 180˚为界限，当 2 组机群等效功角之差大于 180˚时，多机系统失去稳定性，对应的时间则为该故障条件下的临界稳定时间，其时间的长短与电力系统的暂态稳定程度呈正相关。当时间较长时，系统有更多时间来适应故障，从而减缓稳态过程，意味着系统的暂态稳定性更好，能够更好地保持频率、电压和功率的稳定，从而减少系统的失稳风险。如果时间很短，系统可能无法适应故障，从而导致频率和电压的剧烈波动系统，可能会导致系统的崩溃，这对于系统的暂态稳定程度而言是不利的。

如图 9 为故障 3 后系统的功角曲线图，黑色虚线部分为领先机群的功角中心 δ_S，红色虚线部分为剩余机群的功角中心 δ_A，通过放大观察确定其临界稳定时间为 820 ms。利用这种方法将每一个故障的临界稳定时间均找到，并列举在表 1 中。通过比对表 1 中的稳定指标由大至小排序为：故障 2、故障 4、故障 1、故障 3。临界稳定时间同样符合这一排列顺序，以此可以确定基于 SAI 的稳定指标的有效性。

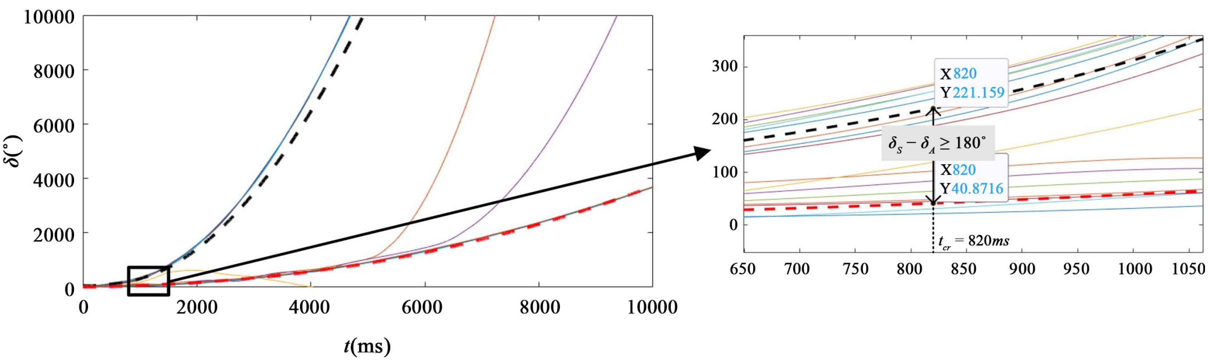


Figure 9. The critical stability time of the system under fault 3
图 9. 故障 3 下系统的临界稳定时间

5. 结论

本文探讨了稳定域与流形在非线性动力学系统中的重要性，强调了 SAI 对于完整稳定域边界的作用。通过引入收缩投影变换方法和三维空间中的 SAI 计算方法，经过数学模型和方程的推导，阐述了它们之间坐标映射的关系，得到了基于 SAI 的投影空间拓扑结构，提出一种基于 SAI 的稳定性指标，验证其在衡量电力系统暂态稳定程度时的有效性。整体而言，本文为电力系统暂态稳定性分析提供了新的视角和理论支持，为电力系统稳定性理论的应用范围拓展提供了有益的思路和方法。

参考文献

[1] 王长江, 姜涛, 陈厚合, 等. 基于相位校正李雅普诺夫指数的电力系统暂态电压稳定评估评估[J]. 电工技术学报, 2021, 36(15): 3221-3236.

[2] 卢锦玲, 郭鲁豫. 基于改进深度残差收缩网络的电力系统暂态稳定评估[J]. 电工技术学报, 2021, 36(11): 2233-2244.

[3] 王科, 秦文萍, 张宇, 等. 双馈风机等效惯量控制比例系数对系统功角首摆稳定的影响机理分析[J]. 电工技术学报, 2022, 37(7): 1-12.

[4] Ding, L., Guo, Y., Wall, P., Sun, K. and Terzija, V. (2018) Identifying the Timing of Controlled Islanding Using a

Controlling UEP Based Method. *IEEE Transactions on Power Systems*, **33**, 5913-5922. https://doi.org/10.1109/tpwrs.2018.2842709

[5] Guckenheimer, J. and Worfolk, P. (1993) Dynamical Systems: Some Computational Problems. In: Schlomiuk, D., Ed., *Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields*, Springer, 241-277. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8238-4_5

[6] Lobas, L.G. and Pol, V.D. (1996) Invariant Manifolds and the Behavior of Dynamic Systems with Symmetry near the Boundary of the Region of Stability. *International Applied Mechanics*, **32**, 395-401. https://doi.org/10.1007/bf02091365

[7] 周驰, 李颖晖, 郑无计, 等. 电力系统稳定域确定及算法特性研究[J]. 浙江大学学报(工学版), 2019, 53(1): 1-7.

[8] 贾蒙, 樊养余, 李慧敏. 基于自适应因子轨道延拓法的不变流形计算[J]. 物理学报, 2010, 59(11): 7686-7692.

[9] 李清都, 杨晓松. 二维不稳定流形的计算[J]. 计算物理, 2005, 22(6): 449-463.

[10] Georgiou, I.T. and Schwartz, I.B. (2001) Invariant Manifolds, Nonclassical Normal Modes, and Proper Orthogonal Modes in the Dynamics of the Flexible Spherical Pendulum. In: Vakakis, A.F., Ed., *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*, Springer, 3-31. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2452-4_1

[11] Chiang, H.D., Wu, F.F. and Varaiya, P.P. (1994) A BCU Method for Direct Analysis of Power System Transient Stability. *IEEE Transactions on Power Systems*, **9**, 1194-1208. https://doi.org/10.1109/59.336079

[12] Menck, P.J., Heitzig, J., Kurths, J. and Joachim Schellnhuber, H. (2014) How Dead Ends Undermine Power Grid Stability. *Nature Communications*, **5**, Article No. 3969. https://doi.org/10.1038/ncomms4969

[13] Liu, Z., He, X., Ding, Z. and Zhang, Z. (2019) A Basin Stability Based Metric for Ranking the Transient Stability of Generators. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, **15**, 1450-1459. https://doi.org/10.1109/tii.2018.2846700

[14] Schultz, P., Menck, P.J., Heitzig, J. and Kurths, J. (2017) Potentials and Limits to Basin Stability Estimation. *New Journal of Physics*, **19**, Article ID: 023005. https://doi.org/10.1088/1367-2630/aa5a7b

[15] Brzeski, P., Wojewoda, J., Kapitaniak, T., Kurths, J. and Perlikowski, P. (2017) Sample-Based Approach Can Outperform the Classical Dynamical Analysis—Experimental Confirmation of the Basin Stability Method. *Scientific Reports*, **7**, Article No. 6121. https://doi.org/10.1038/s41598-017-05015-7

[16] Zaborszky, J., Huang, G., Zheng, B. and Leung, T.-C. (1988) On the Phase Portrait of a Class of Large Nonlinear Dynamic Systems Such as the Power System. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**, 4-15. https://doi.org/10.1109/9.356