

基于空间变分组稀疏和多层空间 - 光谱先验的高光谱图像去噪方法

汪慢慢

上海理工大学光电信息与计算机工程学院, 上海

收稿日期: 2025年3月8日; 录用日期: 2025年4月1日; 发布日期: 2025年4月10日

摘 要

针对高光谱图像的噪声去除问题, 本文提出了一种基于空间变分组稀疏和多层空间 - 光谱先验的高光谱图像去噪方法。在该方法中, 我们使用张量表示高光谱图像, 并对其进行张量张量积分解。为了进一步提升去噪效果, 我们提出了空间变分组稀疏, 用于更好地捕捉高光谱图像的稀疏结构; 其次, 我们对张量张量积分解得到的系数张量继续进行张量张量积分解, 并对分解后的两个张量施加加权Schatten-p范数约束, 以增强对图像稀疏特征的建模能力, 最后使用交替方向乘子法对去噪模型进行求解。实验结果表明, 本文所提出的去噪算法在性能上优于其他对比算法, 验证了该方法的先进性。

关键词

高光谱图像, 张量张量积分解, 空间变分组稀疏, 加权Schatten-p范数

Hyperspectral Image Denoising Based on Spatial Total-Variation Group Sparse and Multilayer Low-Rank Prior

Manman Wang

School of Optical-Electrical and Computer Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Mar. 8th, 2025; accepted: Apr. 1st, 2025; published: Apr. 10th, 2025

Abstract

To address the problem of noise removal from hyperspectral images, this paper proposes a method for denoising hyperspectral images based on spatial variable group sparsity and multilayer spatial-

文章引用: 汪慢慢. 基于空间变分组稀疏和多层空间-光谱先验的高光谱图像去噪方法[J]. 建模与仿真, 2025, 14(4): 181-194. DOI: 10.12677/mos.2025.144277

spectral prior. In this method, we use a tensor to represent the hyperspectral image and decompose it into a tensor tensor product. To further enhance the denoising effect, we propose spatial variable group sparsity for better capturing the sparse structure of the hyperspectral image; second, we continue the tensor tensor product decomposition on the coefficient tensor obtained from the tensor tensor product decomposition, and impose a weighted Schatten-p paradigm constraint on the decomposed two tensors to enhance the ability to model the sparse features of the image, and finally, we use the alternating direction multiplier method to solve the denoising model. The experimental results show that the denoising algorithm proposed in this paper outperforms other comparative algorithms in terms of performance, which verifies the advancement of the method.

Keywords

Hyperspectral Images, Tensor Tensor Product Decomposition, Spatial Variable Grouping Sparse, Weighted Schatten-p Norm

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

HIS (Hyperspectral Image)提供了丰富的光谱信息,已广泛应用于土地覆盖分类[1]、环境保护[2]和目标检测[3]等领域。然而,其独特的较窄光谱通道致使传感器接收的信号大幅减少,进而使得高光谱图像对各类噪声的抗干扰能力急剧下降。常见的噪声类型,如条纹噪声、脉冲噪声、高斯噪声、死线以及死像素等,极易对高光谱图像造成干扰,严重影响图像质量和后续应用效果。由此可见,开发高效的高光谱图像去噪方法,已成为推动其在各后续应用领域稳健发展的关键所在,同时也是极具挑战性的任务。

过去几十年间,高光谱图像去噪领域取得了显著进展。传统方法通常将高光谱图像的每个波段视为灰度图像,并逐波段应用二维或一维去噪方法,如块匹配和三维滤波[4]。然而,这些方法忽视了光谱波段之间的相关性,去噪效果有限。近年来,深度学习方法在复杂噪声环境下表现出色,但由于高光谱图像数据获取困难,监督学习方法的应用受到限制。此外,深度网络结构复杂,训练时间长,且可解释性较差。相比之下,张量分解方法能够充分利用高光谱图像的空间-光谱相关性,常见的分解方法包括CP分解(Canonical Polyadic Decomposition) [5]、Tucker分解[6]、张量环分解[7]和张量 Train 分解[8]。然而,这些方法在分解过程中会产生矩阵分量,破坏了完整的张量结构。本文提出的张量张量积分解[9]方法能够更好地保留张量结构,并在去除混合噪声和保留高频细节方面具有显著优势。

基于以上的分析,本文提出使用张量张量积分解方法,并结合稀疏、低秩等正则化项研究出一个适合去除高光谱图像混合噪声的模型。

2. 去噪原理

2.1. 张量张量积

高光谱图像数据具有空间维度(通常为二维平面的行和列)和光谱维度,构成了一个复杂的多维结构。张量张量积分解首先将这个高维的图像张量 $X \in R^{M \times N \times P}$ 分解为一个字典子张量 $D \in R^{M \times r \times N}$ 和一个系数子张量 $C \in R^{r \times P \times N}$,这种分解方式能够充分利用图像的空间和频谱信息。这种张量分解方式可以用公式表示为:

$$X = D * C \quad (1)$$

当需要恢复原始图像时，通过张量张量积的逆运算，将这些子张量按照特定的规则重新组合起来。由于子张量完整地保留了各自所负责维度的信息，并且张量张量积运算能够准确地将这些信息进行融合，所以可以精确地重构出原始图像，从而实现了信息的无损重组。

2.2. 空间差分组稀疏

对于一个三维张量，可以从三个方向对它进行切片，张量的 mode-n 切片如图 1 所示，分别是水平切片、侧向切片和前向切片：

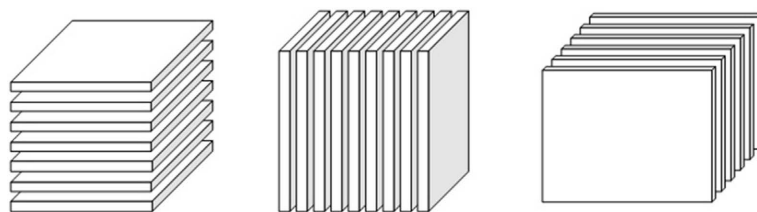


Figure 1. Slices of a 3rd-order tensor

图 1. 三阶张量 mode-n 切片

空间差分组稀疏实现原理如下，空间差分组稀疏(Spatial Total-Variation Group Sparsity, STVGS)是一种基于图像空间结构特性的稀疏表示方法，广泛应用于高光谱图像去噪领域。其核心思想是通过捕捉图像在空间域上的局部变化，利用差分算子提取图像的边缘和纹理特征，进而通过稀疏表示分离图像的结构信息和噪声。具体来说，空间差分算子通过计算像素在空间域上的变化，能够有效提取图像的边缘和纹理特征，从而增强对图像局部结构的建模能力。对于高光谱图像，空间差分算子可以分别作用于水平和垂直方向上的梯度，生成空间差分图像。差分图像在模-3 展开后，便于后续的稀疏表示和正则化处理。在高光谱图像中，像素值在空间和光谱维度上通常具有显著的相关性。空间差分组稀疏通过将差分图像的系数划分为不同的组，考虑组内和组间的稀疏性。每个组对应图像的某种特定结构信息，通过对这些组施加稀疏约束，能够更精确地捕捉图像的内在结构。具体来说，空间差分组稀疏通过最小化加权的组稀疏度量，既关注单个系数的稀疏性，又考虑组与组之间以及组内系数的整体特性。通过对差分图像的 $l_{2,1}$ 约束，可以促进组稀疏性，从而更好地分离图像的结构信息和噪声。

$$\begin{aligned} \|X\|_{STVGS} &= \sum_{i=1}^2 \|X_{\times k} D_k\|_{2,1} \\ &= \|X_{\times 1} D_1\|_{2,1} + \|X_{\times 2} D_2\|_{2,1} \end{aligned} \quad (2)$$

$X_{\times k} D_k$ 表示在第 k 个模式下，高光谱图像经过差分算子 D_k 处理后的结果。这一步计算了图像在行方向($k=1$)和列方向($k=2$)上的梯度或变化。 $\|X_{\times k} D_k\|_{2,1}$ 表示对 $X_{\times k} D_k$ 应用 $l_{2,1}$ 范数。这一步对图像在每个方向上的梯度进行稀疏约束，鼓励梯度矩阵中的某些列整体为零，从而促进图像在空间上的平滑性。 $\sum_{i=1}^2 \|X_{\times k} D_k\|_{2,1}$ 将两个方向(行和列)的 $l_{2,1}$ 范数相加，得到最终的空间全变分-群稀疏范数(STVGS)。这个范数结合了空间全变分(TV)和群稀疏性(Group Sparsity)的优点，能够同时捕捉图像的空间结构信息和稀疏特性。

空间差分组稀疏通常与低秩先验结合使用，以进一步提升去噪效果。低秩先验通过捕捉高光谱图像的全局低秩特性，能够有效去除噪声并保留图像的全局结构。而空间差分组稀疏则通过捕捉图像的局部结构信息，能够保留更多的细节信息。两者的结合能够在去除噪声的同时，更好地保留图像的细节和结

构信息。

2.3. 加权 Schatten-p 范数

加权 Schatten-p 范数[10]是对 Schatten-p 范数的扩展, 通过引入权重矩阵, 能够更灵活地控制奇异值的稀疏性。具体来说, 加权 Schatten-p 范数通过对不同奇异值施加不同的权重, 能够更精确地逼近矩阵的秩函数, 从而在去噪过程中更好地保留图像的细节信息。在矩阵的低秩表示问题中, 它能更有效地促使矩阵的奇异值稀疏化, 使得矩阵的低秩结构更加突出, 该范数可以更精确地逼近秩函数。其表达式为:

$$\|X\|_{w,p} = \left(\sum_{i=1}^{\min(M,N)} w_i \sigma_i^p(X) \right)^{1/p}, \quad 0 < p \leq 1 \quad (3)$$

$\sigma_i^p(X)$ 表示矩阵 X 的第 i 个奇异值的 p 次幂。由于 $0 < p \leq 1$, 奇异值的 p 次幂会进一步压缩较小的奇异值, 从而增强对低秩性的约束。 $w_i \sigma_i^p(X)$ 表示对第 i 个奇异值的加权 p 次幂。权重 w_i 可以根据具体问题进行调整, 例如, 较大的权重可以用于强调较大的奇异值, 较小的权重可以用于抑制较小的奇异值。

$\sum_{i=1}^{\min(M,N)} w_i \sigma_i^p(X)$ 表示对所有奇异值的加权 p 次幂求和。这一步将矩阵的奇异值信息进行加权汇总, 形成一个标量值。之后再对结果取 $1/p$ 次幂。这一步将加权求和的结果重新缩放, 得到最终的加权 Schatten-p 范数。

加权 Schatten-p 范数通常与空间差分组稀疏结合使用, 以进一步提升去噪效果。空间差分组稀疏通过捕捉图像的局部结构信息, 能够保留更多的细节信息。而加权 Schatten-p 范数通过捕捉图像的全局低秩特性, 能够有效去除噪声并保留图像的全局结构。两者的结合能够在去除噪声的同时, 更好地保留图像的细节和结构信息。

2.4. 稀疏先验

2.4.1. 张量 1 范数

在光谱图像去噪领域, 张量 1 范数[11]常用于捕获数据的稀疏性, 从而有效去除噪声。张量 1 范数是对向量 1 范数和矩阵 1 范数在张量空间上的自然拓展。对于一个张量, 其 1 范数定义为张量所有元素绝对值之和, 它是一种简单且直观的张量度量方式, 能够反映张量元素的总体规模。张量 1 范数常被用作正则化项, 它能够促使模型学习到稀疏的解, 值越小表示张量越稀疏, 即让张量中的大部分元素为零, 从而提高模型的可解释性和泛化能力。其表达式为:

$$\|X\|_1 = \sum_{i,j,k} |X(i,j,k)| \quad (4)$$

这里的 $X(i,j,k)$ 表示张量 X 在位置 (i,j,k) 处的元素。 l_1 范数是通过对张量中所有元素的绝对值求和来计算的。 l_1 范数常用于促进稀疏性, 即鼓励模型参数中的许多元素为零。使用 l_1 范数来约束模型, 以防止过拟合。

2.4.2. 加权组稀疏

加权组稀疏[12]是在传统稀疏表示基础上发展而来的概念。传统稀疏表示追求信号在某个字典下的非零系数尽可能少, 而加权组稀疏则将信号的系数划分为不同的组, 考虑组内和组间的稀疏性。每个组可能对应着信号的某种特定特征或结构信息, 并且为不同的组分配不同的权重。通过最小化加权的组稀疏度量, 能够更精确地捕捉信号的内在结构, 使得在稀疏表示过程中, 既关注单个系数的稀疏性, 又考虑组与组之间以及组内系数的整体特性。其表达式如下:

$$\|W \odot X\|_{2,1} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N W_x(i, j) \|X(i, j, :)\|_2 \quad (5)$$

这里的 X 是一个三维张量, W 是一个权重矩阵, $\odot$ 表示逐元素乘法(Hadamard 积), $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 l_2 范数(欧几里得范数)。 $l_{2,1}$ 范数常用于特征选择, 通过促进某些特征的重要性为零来实现稀疏性。在图像处理中, 加权 $l_{2,1}$ 范数可以用于正则化, 以保留图像的重要结构信息。 l_1 范数促进稀疏性, 但对每个元素独立处理。 l_2 范数对大值更敏感, 常用于平滑正则化。结合了 l_2 和 l_1 范数的特性, 适用于需要结构稀疏性的场景。

3. 基于空间变分组稀疏和多层低秩的高光谱图像去噪模型

本节将介绍所提出的高光谱图像去噪算法。我们对去噪问题建模, 对图像张量进行张量张量积分解, 并将该算法命名为 STVGS-MLR 算法。

3.1. 模型公式

通过简单地假设含噪高光谱图像 $Y \in R^{M \times N \times P}$ 受到加性高斯噪声 N 和加性稀疏噪声 S (如椒盐噪声、死线和条纹噪声) 的污染, 高光谱图像的退化模型可以表示为:

$$Y = X + N + S \quad (6)$$

从 Y 中恢复干净的高光谱图像 X 的关键问题在于通过建立适当的正则化项来准确描述高光谱图像的先验信息。从数学上讲, 广义的高光谱图像恢复模型可以表示为

$$\min_{X, S} \frac{1}{2} \|Y - X - S\|_F^2 + \tau R(X) + \mu \|S\|_1 \quad (7)$$

其中, τ 和 μ 是正则化参数; $R(X)$ 是设计用于利用高光谱图像先验信息的正则化项。例如, $R(X)$ 被设计为张量核范数和 Schatten- p 范数以探索低秩先验, 空间-光谱 TV 和增强的 3-DTV 以表征空间-光谱连续性先验, 以及非局部低秩正则化以利用非局部自相似性先验。然而, 由于高光谱图像通常规模较大, 添加正则化项将不可避免地导致较高的计算复杂度。

为了结合先前的去噪原理, 我们引入前文的所有正则项并提出 STVGS-MLR 的高光谱图像去噪模型如下:

$$\begin{aligned} \min_{X, D, C, S} \quad & \frac{\alpha}{2} \|X\|_{STVGS} + \beta \|C\|_{MLR} + \gamma \|C\|_1 + \lambda \|S\|_{2,1} \\ \text{s.t.} \quad & \|Y - X - S\|_F^2 \leq \varepsilon \\ & \|X - D * C\|_F^2 \leq \varepsilon \\ & D^* * D = I \end{aligned} \quad (8)$$

其中 α , β , γ 和 λ 是平衡保真项和正则项的正则化参数; $Y \in R^{M \times N \times P}$ 是观测到的含噪高光谱图像, $X \in R^{M \times N \times P}$ 是我们想要得到的去噪后的干净高光谱图像, D 和 C 分别是对 X 做张量张量积分解得到的张量字典和张量系数, 其中 D 是正交的, $S \in R^{M \times N \times P}$ 是稀疏噪声。

公式(8)基于交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers) [13]的增广拉格朗日函数定义为:

$$\begin{aligned} \min_{X, D, C, S} \quad & \frac{\alpha}{2} \|X\|_{STVGS} + \beta \|C\|_{MLR} + \gamma \|C\|_1 + \lambda \|S\|_{2,1} + \langle G_1, Y - X - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|Y - X - S\|_F^2 \\ & + \langle G_2, X - D * C \rangle + \|X - D * C\|_F^2 + \xi_{I(D^* * D)} \end{aligned} \quad (9)$$

其中 μ 是 ADMM 惩罚参数, G_1 、 G_2 和 G_3 是拉格朗日乘子。

3.2. 模型求解

更新字典 D

$$\min_D \langle G_2, X - D^*C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^*C\|_F^2 + \xi_{I(D^*D)} \quad (10)$$

公式(10)可以转化为:

$$\min_D \frac{\mu}{2} \left\| X - D^*C + \frac{G_2}{\mu} \right\|_F^2 + \xi_{I(D^*D)} \quad (11)$$

基于 SVT 算子, 公式(8)可以有一个封闭解:

$$\bar{D}^{(s)} = \bar{U}(\hat{\varepsilon})^{(s)} * \bar{V}(\hat{\varepsilon})^{*(s)} \quad (12)$$

其中 $\hat{\varepsilon} = \left(\bar{X}^{(s)} + \frac{\bar{G}_2^{(s)}}{\mu} \right) * \bar{C}^{(s)*}$ 。

$U(\hat{\varepsilon})$, $V(\hat{\varepsilon})$ 分别是 $\hat{\varepsilon}$ 的左右奇异值张量, 计算方程如下:

$$t-SVD(\hat{\varepsilon}) = [U(\hat{\varepsilon}), \Theta(\hat{\varepsilon}), V(\hat{\varepsilon})] \quad (13)$$

然后张量字典 D 通过 $D = \text{ifft}(\bar{D}, [], 3)$ 计算。

更新稀疏噪声 S

$$\min_S \lambda \|S\|_{2,1} + \langle G_1, Y - X - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|Y - X - S\|_F^2 \quad (14)$$

S 的第 t 个前向切片可以通过下式计算

$$S(i, j, :) = \text{Thres}_{2,1} \left(\hat{S}(i, j, :), w(i, j) * \frac{\lambda}{2\mu} \right) \quad (15)$$

$$\begin{cases} \hat{S} = Y - X - \frac{G_1}{\mu} \\ w(i, j) = \frac{1}{\|\hat{S}(i, j, :)\|_2 + \varepsilon} \end{cases} \quad (16)$$

ε 是一个很小的常量, $\text{Thres}_{2,1}(x, \varsigma) = \max \left(\frac{\|x\|_2 - \varsigma}{\|x\|_2}, 0 \right)$ 是一个求解组稀疏的算子。

更新干净高光谱图像 X

$$\min_X \frac{\alpha}{2} \|X\|_{\text{TVGS}} + \langle G_1, Y - X - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|Y - X - S\|_F^2 + \langle G_2, X - D^*C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^*C\|_F^2 \quad (17)$$

将公式(17)转化一下

$$\min_X \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^2 \|X \times_k D_k\| + \langle G_1, Y - X - S \rangle + \frac{\mu}{2} \|Y - X - S\|_F^2 + \langle G_2, X - D^*C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^*C\|_F^2 \quad (18)$$

公式(18)可以直接通过下式求解

$$\sum_{k=1}^2 \alpha X_k (D_k^T D_k) + 2\mu X = \mu \left(Y - X - S - \frac{G_1}{\mu} \right) + \mu \left(X - D^* C - \frac{G_2}{\mu} \right) \quad (19)$$

公式(19)可以重写为

$$\alpha X_{(3)}^T + CX_{(3)}^T = K_{(3)}^T \quad (20)$$

其中 $C = \alpha \left[(I_{n_2} \otimes D_1^T D_1) + (D_2^T D_2 \otimes I_{n_1}) \right]$, K 为公式(19)等式的右边部分。容易发现矩阵 C 有一个块循环的结构, 因此我们对 C 应用 2-D FFT。

$$C = F_2^T \Psi_2 F_2 \quad (21)$$

其中 F_2 是 2-D DFT 矩阵, 我们可以有效地求解公式(19)。

$$X = \text{Fold}_3 \left(\left[F_2^T \left((1 \otimes T_2) \odot (F_2 K_{(3)}^T I) \right) I^T \right]^T \right) \quad (22)$$

$$T_2 = (\text{diag}(\Psi_2), \text{diag}(\Psi_2), \dots, \text{diag}(\Psi_2)) + 2\mu \text{ones}(n_1 n_2, r) \quad (23)$$

更新张量系数 C

$$\min_C \beta \|C\|_{MLR} + \gamma \|C\|_1 + \langle G_2, X - D^* C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^* C\|_F^2 \quad (24)$$

将公式(24)进一步重写为

$$\begin{aligned} \min_C \beta \|A\|_{w,sp} + \beta \|B\|_{w,sp} + \gamma \|C\|_1 + \langle G_2, X - D^* C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^* C\|_F^2 \\ \text{s.t. } C = A^* B \end{aligned} \quad (25)$$

其拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \min_C \beta \|A\|_{w,sp} + \beta \|B\|_{w,sp} + \gamma \|C\|_1 + \langle G_2, X - D^* C \rangle + \frac{\mu}{2} \|X - D^* C\|_F^2 + \langle G_3, C - A^* B \rangle \\ + \frac{\mu}{2} \|C - A^* B\|_F^2 \end{aligned} \quad (26)$$

C 的解为

$$\bar{C}^{(s)} = \text{soft} \left(\bar{D}^{(s)} * \left(\bar{X}^{(s)} - \frac{\bar{G}_2^{(s)}}{\mu} \right) + A^* B + \frac{\bar{G}_3^{(s)}}{\mu}, \frac{2\beta}{\mu} \right) \quad (27)$$

然后 C 通过 $C = \text{ifft}(\bar{C}, [], 3)$ 计算。 $\text{soft}(x, \tau) = \text{sgn}(x) \max(|x| - \tau, 0)$ 是软阈值算子。

A 与 B 的更新如下

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon} &= \left(\bar{C}^{(s)} + \frac{\bar{G}_3^{(s)}}{\mu} \right) * \bar{B}^{(s)*} \\ \bar{\varepsilon} &= \bar{A}^{(s)*} * \left(\bar{C}^{(s)} + \frac{\bar{G}_3^{(s)}}{\mu} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

对 $\tilde{\varepsilon}$ 和 $\bar{\varepsilon}$ 做 t -SVD 分解, $\Sigma = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$ 。 $\delta_j = \text{GST} \left(\delta_j, \frac{\beta}{\mu} (w_i)_j, p, J \right)$ ($j=1, 2, \dots, r$), J 是算法的迭代数量, $\Delta = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r)$, 则 A 和 B 的解为 $U \Delta V^T$ 。

完整的算法流程总结在表 1 中。

Table 1. Hyperspectral image denoising based on spatial variable group sparsity and multilayer low rank**表 1.** 基于空间变分组稀疏和多层低秩的高光谱图像去噪算法

算法：基于空间变分组稀疏和多层低秩的高光谱图像去噪

输入：观测图像 Y 。

初始化：

1) 初始化张量字典 D 和张量系数 C

2) 初始化稀疏噪声 S

迭代：执行以下操作直至收敛：

3) 更新 D 通过公式(12)

4) 更新 S 通过公式(15)

5) 更新 X 通过公式(22)

6) 更新 C 通过公式(27)

输出：干净的高光谱图像 X 。

4. 实验结果与分析

本文在处理器为 12th Gen Intel(R) Core(TM) i5-12450H @ 1.10 GHz, 运行内存为 16.0 GB 的 64 位 Windows 11 操作系统上, 利用 MATLAB 2020a 进行实验。我们采用峰值信噪比(Peak Signal-to-Noise Ratio, PSNR)、特征相似性(Feature Similarity Index Measure, FSIM)和结构相似性(Structure Similarity Index Measure, SSIM)来验证本文提出方法的去噪效果, 其计算公式为:

$$MSE = \frac{1}{N \times M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (s_{ij} - \hat{s}_{ij}), \quad (26)$$

$$PSNR = 10 \log_{10} \frac{L^2}{MSE},$$

$$FSIM = \frac{\sum_{x \in \Omega} S_L(x) \cdot PC_m(x)}{\sum_{x \in \Omega} PC_m(x)},$$

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x \mu_y + C_1)(2\sigma_{xy} + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_2)}$$

其中 N 和 M 分别表示图像在 x 和 y 方向上的像素点数量, s_{ij} 和 $\hat{s}_{ij}$ 分别表示原始含噪图像和去噪后的干净图像在像素点 (i, j) 处的像素值, L 为图像灰度的取值范围。

在验证 STVGS-MLR 算法的去噪性能时, 本文采用了 6 种图像去噪算法作为对比算法, 分别为传统的通过可表示系数总变分快速去除高光谱图像中的噪声(RCTV) [14], 带张量核范数的张量主成分分析(TRPCA-TNN) [15], 使用低秩矩阵恢复的高光谱图像复原(LRMR) [16], 通过噪声引导的低秩矩阵近似用于高光谱图像去噪(NAIRLMA) [17], 通过总变分正则的低秩张量分解用于高光谱图像复原(LRTDTV) [18] 和深度网络基于注意力的倍频网络的高光谱图像去噪(AODN) [19]。

在图像的选取上, 我们选取了 Washington DC Mall 和 Pavia University 两幅高光谱图像进行实验, 如图 2 中所示, 两幅图像的尺寸大小分别为 $200 \times 200 \times 191$ 以及 $610 \times 340 \times 103$ 。我们为 Washington DC Mall 图像施加高斯噪声和脉冲噪声以及混合噪声, Pavia University 是真实的含噪图像, 用模拟的含噪图像和真实的来检测不同去噪算法的去噪效果。我们选取 Washington DC Mall 不同波段和 Pavia University 的第 1 个波段来展示我们的实验结果。

在实验中, 我们为 Washington DC Mall 添加的高斯噪声标准差随机为 0.1~0.15 (Case1)、在 Case1 下

随机选择 20 个波段添加 20% 的脉冲噪声(Case2)、在 Case2 下随机选择 10 个波段添加死线(Case3)。实验结果如图 3~6 所示。

我们将不同算法对图像进行去噪后的 PSNR 值列于表 2，并将最佳数据用粗体标注。通过图中的不同算法的对比结果，并结合表中数据，我们可以看出，将高光谱图像表示成张量，对图像的去噪效果要优于传统算法。并且对于混合噪声的处理，我们提出的算法也要优于其余对比算法。



Figure 2. Washington DC Mall and Pavia University used in our experiment

图 2. 实验中使用的图像 Washington DC Mall 和 Pavia University

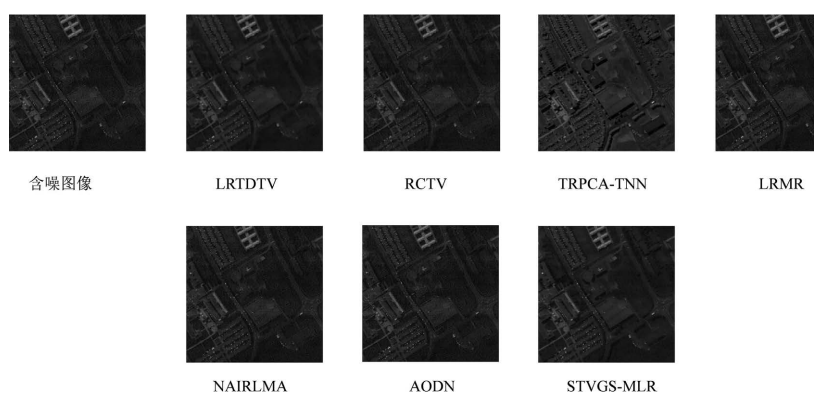


Figure 3. Comparison of denoising of Washington DC Mall after adding gaussian noise

图 3. Washington DC Mall 添加高斯噪声后的去噪效果图

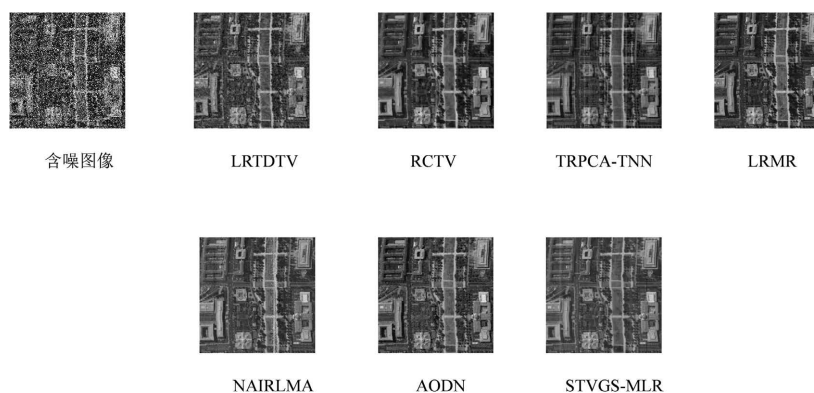


Figure 4. Comparison of denoising of Washington DC Mall after adding pulse noise

图 4. Washington DC Mall 添加脉冲噪声后的去噪效果图

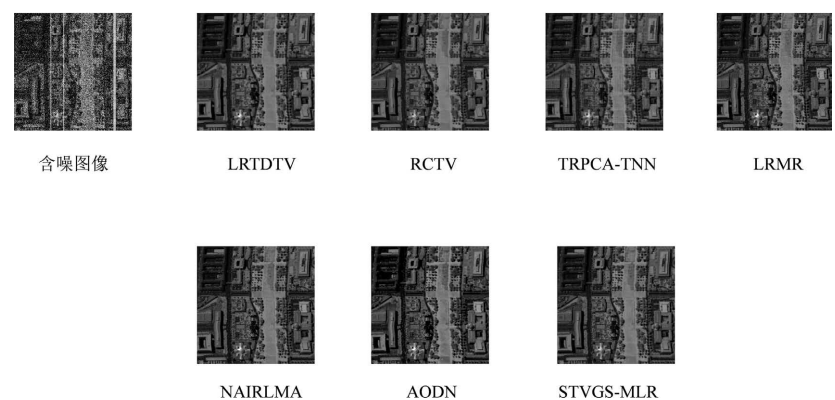


Figure 5. Comparison of denoising of Washington DC Mall after adding mixed noise
图 5. Washington DC Mall 添加混合噪声后的去噪效果图

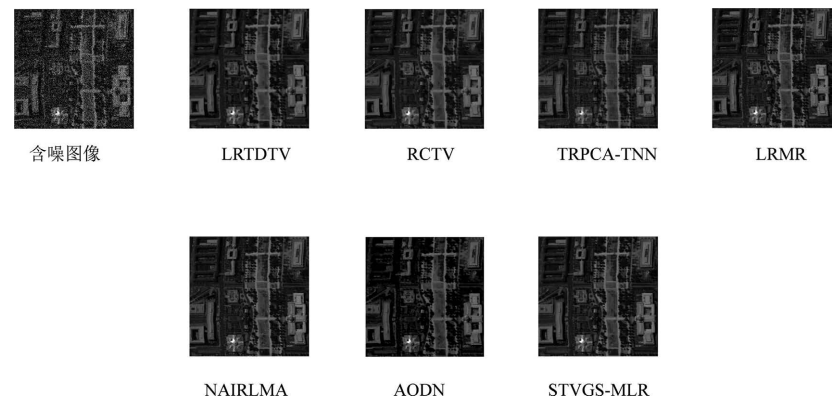


Figure 6. Comparison of denoising of Pavia University
图 6. Pavia University 的去噪效果图

通过对表 2~4 的分析，可以观察到高光谱图像由于其多通道特性，能够捕捉同一场景在不同波段下的成像信息。这种多通道结构导致不同通道之间的像素值存在显著的相关性。因此，采用基于图像张量的低秩分解方法进行去噪，相较于将各通道视为独立处理的方法，能够更有效地利用这些相关性，从而在去噪效果上取得显著提升。此外，与传统的去噪方法相比，该模型既考虑了全局的空间光谱先验又结合了张量系数的低秩性，进一步优化了去噪效果，使得图像质量得到明显改善。

Table 2. PSNR values of different algorithms after adding different noise on Washington DC Mall
表 2. Washington DC Mall 在添加不同噪声后不同算法的 PSNR 值

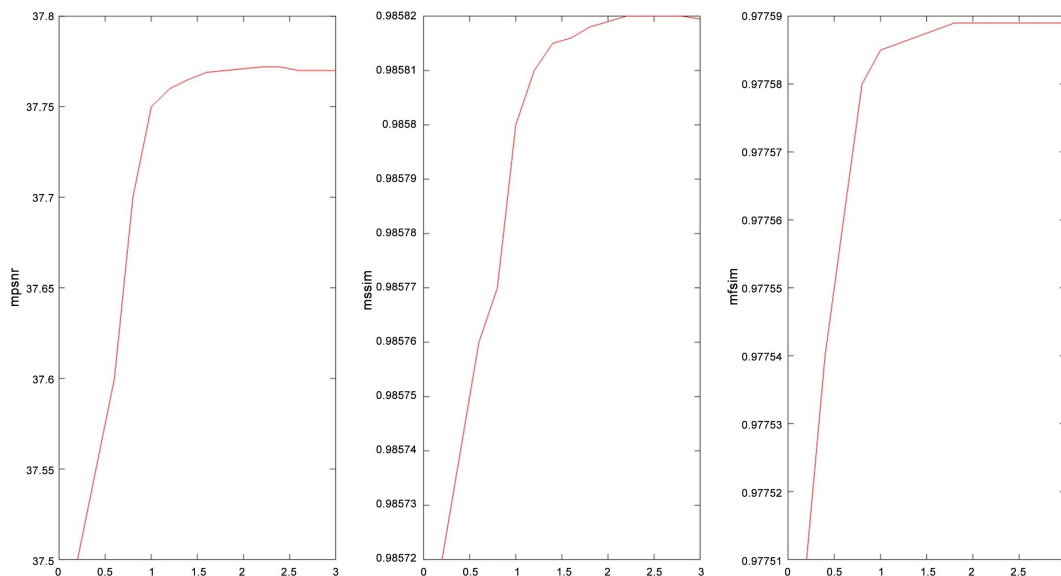
	高斯噪声	脉冲 + 高斯噪声	混合噪声
LRTDTV	33.3495	31.3990	31.3987
RCTV	33.5177	33.3128	33.2212
TRPCA-TNN	29.2618	29.1312	29.0452
LRMR	32.5779	32.3459	32.2340
NAIRLMA	34.8797	33.2863	32.4919
AODN	29.9826	33.3128	33.2212
STVGS-MLR	36.3286	35.2635	35.1036

Table 3. FSIM values of different algorithms after adding different noise on Washington DC Mall**表 3.** Washington DC Mall 在添加不同噪声后不同算法的 FSIM 值

	高斯噪声	脉冲 + 高斯噪声	混合噪声
LRTDTV	0.9668	0.9511	0.9509
RCTV	0.9641	0.9626	0.9618
TRPCA-TNN	0.9367	0.9351	0.9338
LRMR	0.9617	0.9604	0.9600
NAIRLMA	0.9743	0.9679	0.9639
AODN	0.9507	0.9626	0.9618
STVGS-MLR	0.9801	0.9780	0.9779

Table 4. SSIM values of different algorithms after adding different noise on Washington DC Mall**表 4.** Washington DC Mall 在添加不同噪声后不同算法的 SSIM 值

	高斯噪声	脉冲 + 高斯噪声	混合噪声
LRTDTV	0.9399	0.9099	0.9096
RCTV	0.9461	0.9437	0.9426
TRPCA-TNN	0.8844	0.8811	0.8786
LRMR	0.9319	0.9282	0.9276
NAIRLMA	0.9547	0.9423	0.9380
AODN	0.8380	0.9437	0.9426
STVGS-MLR	0.9705	0.9642	0.9623

**Figure 7.** Sensitivity analysis of parameter γ **图 7.** 参数 γ 敏感性分析

在高光谱图像去噪模型中, 参数 γ 的变化对去噪性能有一定的影响。从图 7 中可以看出, 随着 γ 值的增加, 模型的性能指标呈现出先上升后趋于稳定的趋势。在 γ 值较低时, 模型的去噪效果可能不够理想, 噪声抑制能力有限。随着 γ 值的增加, 去噪效果逐渐提升, 图像质量得到改善。

然而，当 γ 值达到一定范围后，性能提升的幅度逐渐减小，最终趋于平稳。这表明在 γ 值较高时，继续增加 γ 值对去噪效果的改善作用有限，甚至可能导致计算复杂度增加而不带来显著的性能提升。针对图中的结果本文对 γ 选取的参数值为 1×10^4 。

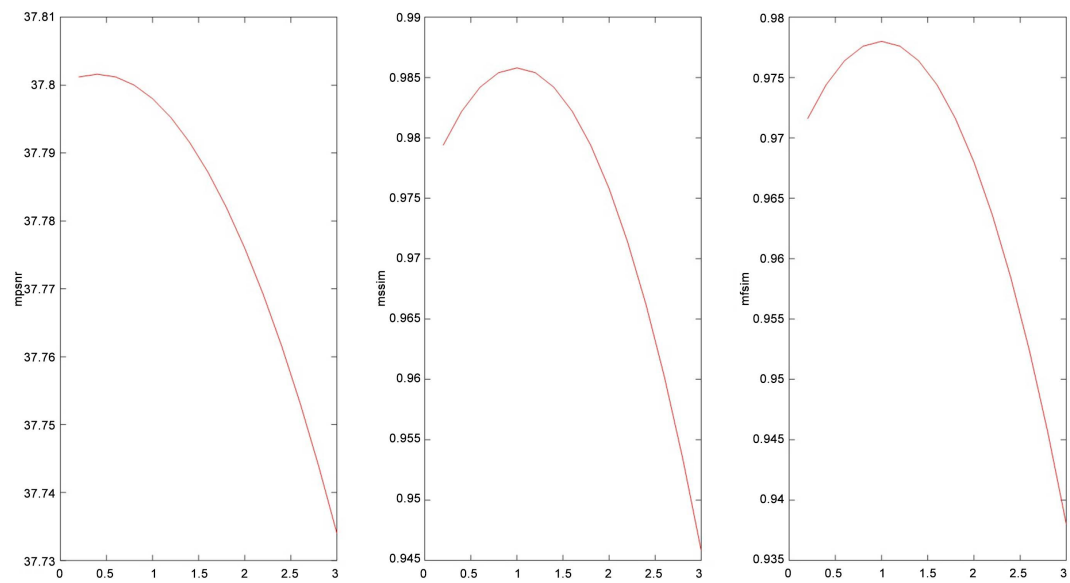


Figure 8. Sensitivity analysis of parameter α
图 8. 参数 α 敏感性分析

在高光谱图像去噪模型中，参数 α 的选择对去噪效果具有显著影响。当 α 值较小时，模型的去噪能力较弱，可能导致图像中的噪声未能有效去除，细节信息保留不足。如图 8 所示，随着 α 值的增加，去噪效果逐渐增强，图像的质量得到明显改善。然而，当 α 值超过某一阈值后，去噪效果甚至出现变差的现象，导致图像细节丢失，因此根据参数 α 的敏感性分析结果来说，本文选择 0.8 为最后的参数值。

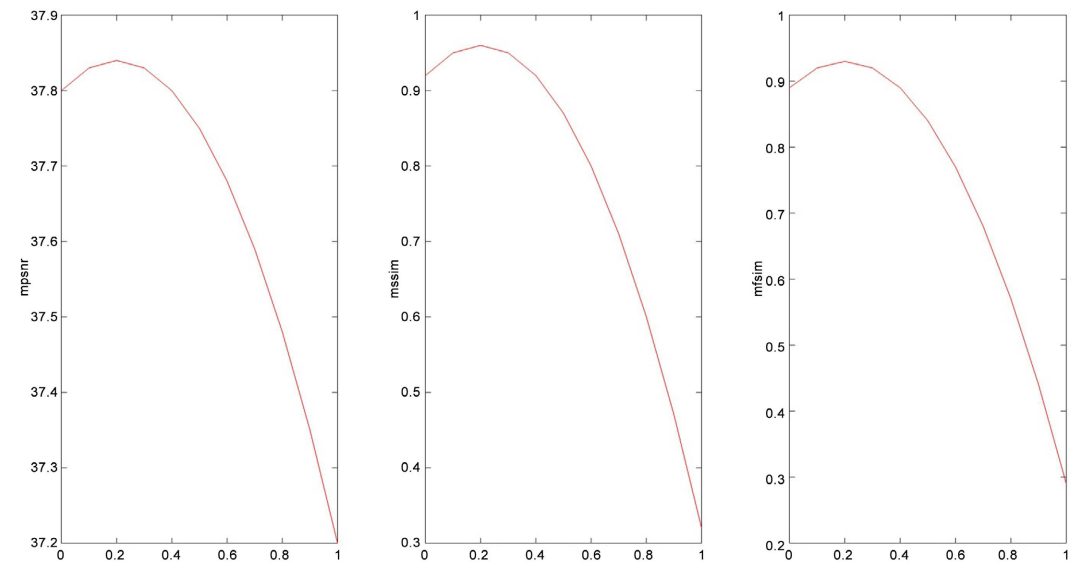


Figure 9. Sensitivity analysis of parameter β
图 9. 参数 β 敏感性分析

在高光谱图像去噪模型中, 参数 β 的变化对去噪性能有显著影响。从图 9 中可以看出, 随着 β 值的增加, 模型的性能指标呈现出先上升后下降的趋势。在 β 值较低时, 模型的去噪效果可能不够理想, 噪声抑制能力有限。随着 β 值的增加, 去噪效果逐渐提升, 图像质量得到明显改善。因此根据参数 β 的敏感性分析结果来说, 本文选择 0.1 为最后的参数值。

5. 结束语

在本研究中, 我们提出了一种创新的高光谱图像去噪模型, 该模型通过结合全局空间变分(Total Variation, TV)和多层分解施加加权 sp 范数约束, 显著提升了去噪效果。实验结果表明, 该模型的峰值信噪比(PSNR)达到了 36.3286, 证明了其有效性。该算法能够有效去除高光谱图像中的噪声, 同时较好地保留图像的细节信息, 尤其在处理非高斯噪声时, 去噪效果更为显著。

具体而言, 我们首先利用全局空间变分方法来捕捉图像中的空间结构信息, 通过最小化图像的梯度幅值来平滑噪声区域, 同时保留边缘和细节。接着, 我们对高光谱图像进行张量分解, 将图像分解为多个低秩分量, 进一步提取光谱和空间特征。

通过将全局空间变分与加权 sp 范数协同使用, 我们的模型能够在去除噪声的同时, 有效保留图像的重要细节和结构信息。全局空间变分处理了图像中的平滑区域和边缘, 而加权 sp 范数则针对低秩张量进行了优化处理, 两者相辅相成, 共同提升了去噪效果。这一方法不仅提高了去噪性能, 还为高光谱图像处理提供了新的思路和技术支持。

致 谢

本论文的完成离不开许多人的帮助和支持, 在此谨致以最诚挚的谢意。

首先, 我要衷心感谢我的导师。他在论文选题、研究方法以及论文撰写等方面给予了我悉心的指导和宝贵的建议。他严谨的治学态度、渊博的学识以及精益求精的科研精神将使我终生受益。感谢课题组的各位老师和同学, 在论文研究过程中给予我的帮助和鼓励。感谢我的家人和朋友, 在我攻读硕士期间给予我无条件的支持和理解, 你们是我不断前进的动力。最后, 感谢评审专家和编辑对本文提出的宝贵意见和建议。

参考文献

- [1] Cao, X., Zhou, F., Xu, L., Meng, D., Xu, Z. and Paisley, J. (2018) Hyperspectral Image Classification with Markov Random Fields and a Convolutional Neural Network. *IEEE Transactions on Image Processing*, **27**, 2354-2367. <https://doi.org/10.1109/tip.2018.2799324>
- [2] Li, D., Chu, D., Guan, X., He, W. and Shen, H. (2024) Adaptive Regularized Low-Rank Tensor Decomposition for Hyperspectral Image Denoising and Destriping. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **62**, 1-17. <https://doi.org/10.1109/tgrs.2024.3385536>
- [3] Yang, X., Tu, B., Li, Q., Li, J., and Plaza, A. (2023) Graph Evolution-Based Vertex Extraction for Hyperspectral Anomaly Detection. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **35**, 17372-17386.
- [4] Kshem, W. and Khmag, A. (2024) Improving Block Matching and 3 Dimensions (BM3D) Filtering for Image Noise Removal Using Discrete Wavelet Transformation (DWT). 2024 *IEEE 4th International Maghreb Meeting of the Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (MI-STA)*, Tripoli, 19-21 May 2024, 375-380. <https://doi.org/10.1109/mi-sta61267.2024.10599673>
- [5] Xu, Z., Yang, J., Wang, C., Wang, F. and Yan, X. (2024) Tensor Robust Principal Component Analysis with Total Generalized Variation for High-Dimensional Data Recovery. *Applied Mathematics and Computation*, **483**, Article ID: 128980. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2024.128980>
- [6] Zhou, Y., Chen, Y., Zeng, J., He, W. and Huang, M. (2024) Unidirectional Spatial and Spectral Smoothed Tensor Ring Decomposition for Hyperspectral Image Denoising and Destriping. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, **21**, 1-5. <https://doi.org/10.1109/lgrs.2024.3412804>

- [7] Tian, X., Xie, K. and Zhang, H. (2024) Hyperspectral Image Denoising via L_0 Regularized Low-Rank Tucker Decomposition. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **17**, 3297-3313. <https://doi.org/10.1109/jstars.2023.3342408>
- [8] Sofuoglu, S.E. and Aviyente, S. (2022) Graph Regularized Low-Rank Tensor-Train for Robust Principal Component Analysis. *IEEE Signal Processing Letters*, **29**, 1152-1156. <https://doi.org/10.1109/lsp.2022.3170251>
- [9] Wang, M., Hong, D., Zhang, B., Ren, L., Yao, J. and Chanussot, J. (2023) Learning Double Subspace Representation for Joint Hyperspectral Anomaly Detection and Noise Removal. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **61**, 1-17. <https://doi.org/10.1109/tgrs.2023.3261964>
- [10] Sun, Y., Li, X., Sun, Q., Zhang, M. and Ren, Z. (2024) Improved Weighted Tensor Schatten p -Norm for Fast Multi-View Graph Clustering. *Proceedings of the 32nd ACM International Conference on Multimedia*, Melbourne, 28 October-1 November 2024, 1427-1436. <https://doi.org/10.1145/3664647.3681334>
- [11] Chen, Y., He, W., Yokoya, N. and Huang, T. (2020) Hyperspectral Image Restoration Using Weighted Group Sparsity-Regularized Low-Rank Tensor Decomposition. *IEEE Transactions on Cybernetics*, **50**, 3556-3570. <https://doi.org/10.1109/tcyb.2019.2936042>
- [12] Wang, S., Zhu, Z., Liu, Y. and Zhang, B. (2023) Weighted Group Sparse Regularized Tensor Decomposition for Hyperspectral Image Denoising. *Applied Sciences*, **13**, Article 10363. <https://doi.org/10.3390/app131810363>
- [13] Wan, X., Li, D., Kong, F., Lv, Y. and Wang, Q. (2024) Spectral Quadratic Variation Regularized Autoweighted Tensor Ring Decomposition for Hyperspectral Image Reconstruction. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **17**, 9907-9921. <https://doi.org/10.1109/jstars.2024.3398201>
- [14] Peng, J., Wang, H., Cao, X., Liu, X., Rui, X. and Meng, D. (2022) Fast Noise Removal in Hyperspectral Images via Representative Coefficient Total Variation. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **60**, 1-17. <https://doi.org/10.1109/tgrs.2022.3229012>
- [15] Lu, C., Feng, J., Chen, Y., Liu, W., Lin, Z. and Yan, S. (2020) Tensor Robust Principal Component Analysis with a New Tensor Nuclear Norm. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, **42**, 925-938. <https://doi.org/10.1109/tpami.2019.2891760>
- [16] Zhang, H.Y., He, W., Zhang, L.P., Shen, H.F. and Yuan, Q.Q. (2014) Hyperspectral Image Restoration Using Low-Rank Matrix Recovery. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, **52**, 4729-4743. <https://doi.org/10.1109/tgrs.2013.2284280>
- [17] He, W., Zhang, H., Zhang, L. and Shen, H. (2015) Hyperspectral Image Denoising via Noise-Adjusted Iterative Low-Rank Matrix Approximation. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **8**, 3050-3061. <https://doi.org/10.1109/jstars.2015.2398433>
- [18] Wang, Y., Peng, J., Zhao, Q., Leung, Y., Zhao, X. and Meng, D. (2018) Hyperspectral Image Restoration via Total Variation Regularized Low-Rank Tensor Decomposition. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **11**, 1227-1243. <https://doi.org/10.1109/jstars.2017.2779539>
- [19] Kan, Z., Li, S., Hou, M., Fang, L. and Zhang, Y. (2022) Attention-Based Octave Network for Hyperspectral Image Denoising. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, **15**, 1089-1102. <https://doi.org/10.1109/jstars.2021.3129622>